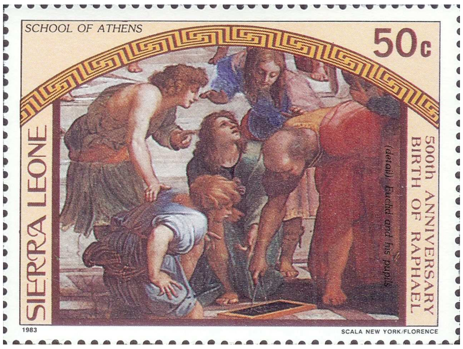
April 2010

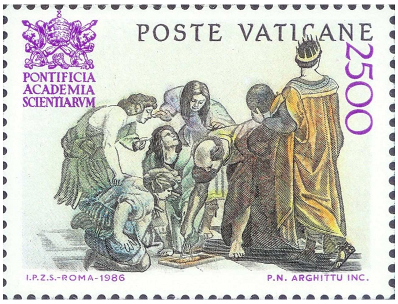
Vor 2300 Jahren lebte **EUKLID VON ALEXANDRIA** (um 300 v. Chr.)



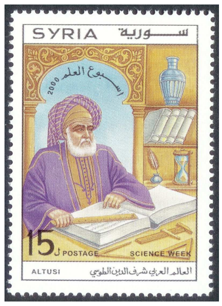
Die Briefmarke aus Sierra Leone zeigt einen Ausschnitt aus dem berühmten Fresko *La scuola di Atene (Die Schule von Athen)*, das der Renaissance-Maler RAFFAEL vor genau 500 Jahren in der *Stanza della Segnatura* (den Sälen des Vatikan, in denen Unterschriften unter wichtige Verträge geleistet wurden) anfertigte. Mit dem Bild sollten die Philosophen und Wissenschaftler der Antike geehrt werden, durch welche die Entwicklung der europäischen Kultur maßgeblich geprägt wurde. Die Persönlichkeiten der Antike tragen die Züge von berühmten Zeitgenossen RAFFAELS; beispielsweise porträtierte RAFFAEL das Universalgenie LEONARDO DA VINCI, um den Philosophen PLATON darzustellen. Für die Darstellung von EUKLID wählte er den Architekten des Petersdoms, den Baumeister DONATO BRAMANTE. Der Ausschnitt zeigt EUKLID, der, über eine Tafel gebeugt, gerade eine Konstruktion anfertigt; ihm gegenüber ist PYTHAGORAS dargestellt, der gerade in ein Buch vertieft ist.

Über den griechischen Mathematiker EUKLID ist nur wenig bekannt; in manchen Quellen wird das Jahr 325 v. Chr. als Erscheinungsjahr der *Elemente* genannt. Es gilt als sicher, dass er während der Regierungszeit von Pharao PTOLEMAIOS I., einem ehemaligen General ALEXANDER DES GROßEN, in Alexandria gelebt und gelehrt hat. Und über diesen wird erzählt, er habe EUKLID einmal gefragt, ob es einen weniger aufwendigen Weg zur Geometrie gebe als den über die *Elemente*, und dieser habe geantwortet, dass es keinen „Königsweg“ (zur Mathematik / zur Geometrie) gebe. Eine andere Anekdote kennzeichnet seine grundsätzliche Einstellung zum Erwerb von Wissen: Ein Schüler fragt ihn, was er davon habe, wenn er all diese Dinge lerne. Darauf soll er einen Sklaven angewiesen haben, dem Schüler drei Münzen zu geben, denn dieser habe es offensichtlich nötig, mit dem, was er lernt, Geld zu verdienen.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30		



Die *Elemente* wurden noch bis ins 19. Jahrhundert als Lehrwerk im Mathematikunterricht verwendet. Es war nach der Bibel das am meisten verbreitete Buch der Weltliteratur – mit Sicherheit ist es das einflussreichste Werk der Mathematikgeschichte. Dass dieses Kompendium des mathematischen Wissens der Antike erhalten ist, verdanken wir den Übersetzungen von Mathematikern des islamischen Kulturkreises, wie Thabit ibn Qurra und Nasir al-Din al-Tusi. Im ausgehenden Mittelalter wurden die Texte aus dem Arabischen ins Lateinische übersetzt und nach der Erfindung der Druckkunst in viele andere Sprachen. Bemerkenswert ist die Tatsache, dass der Jesuit Matteo Ricci die chinesische Übersetzung des Textes als „Türöffner" für die westliche Mathematik in China benutzte.



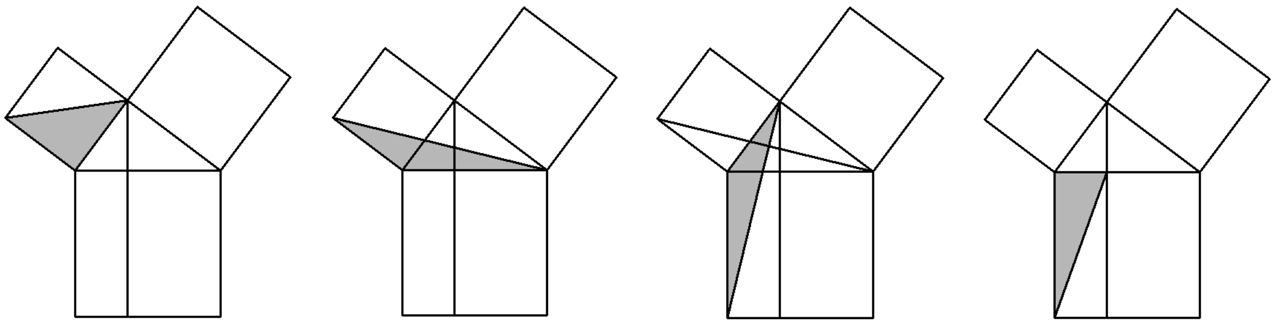
Die *Elemente* bestehen aus 13 Büchern (Kapiteln), sechs über die Geometrie in der Ebene, drei über Arithmetik, Zahlentheorie und die Lehre von den Proportionen, eines über inkommensurable Größen und drei über Raumgeometrie. Möglicherweise hat Euklid in das Werk nur wenige mathematische Sätze eingebracht, die von ihm selbst entdeckt wurden; sein besonderes Verdienst aber ist es, die Erkenntnisse seiner Vorgänger (vor allem die der Pythagoräer sowie von Eudoxos von Knidos und Theaitetos) in genialer Weise geordnet und zusammengestellt zu haben. Die Strenge der Vorgehensweise in seinem Werk wurde zum Vorbild für nachfolgende Mathematiker und Naturwissenschaftler.

Ausgehend von insgesamt 35 Begriffsdefinitionen (wie „Ein Punkt ist, was keine Teile hat." oder „Eine Linie ist eine breitenlose Länge.") und fünf Postulaten (s. u.) sowie logischen Axiomen (wie „Was demselben gleich ist, ist auch einander gleich.") werden in knappem Stil insgesamt mehr als 450 mathematische Sätze in streng logischer Folge aneinandergereiht. Die Beweise der Sätze stützen sich nur auf die Definitionen, die Postulate und die Axiome sowie auf vorangestellte Sätze. Ein Beweis soll nur Argumente verwenden, die bereits vorher bewiesen wurden (oder deren Richtigkeit durch die Postulate und Axiome gesichert ist). Insbesondere in der Geometrie besteht dabei leicht die Gefahr, dass man sich bei den Schlüssen der Anschauung bedient – was bei einem streng geführten Beweis eben nicht sein darf.

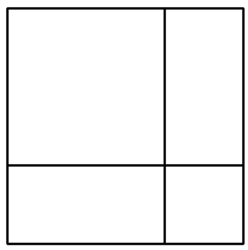
Die fünf Postulate des Euklid lauten: Gefordert wird,

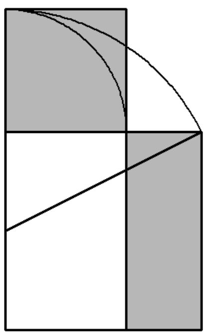
I. dass man von jedem Punkt nach jedem Punkt die Strecke ziehen kann,
II. dass man eine begrenzte gerade Linie zusammenhängend gerade verlängern kann,
III. dass man zu jedem Mittelpunkt und Abstand den Kreis zeichnen kann,
IV. dass alle rechten Winkel einander gleich sind,
V. dass, wenn eine gerade Linie beim Schnitt mit zwei geraden Linien bewirkt, dass innen auf derselben Seite entstehende Winkel zusammen kleiner als zwei Rechte werden, dann die zwei geraden Linien bei Verlängerung ins Unendliche sich treffen auf der Seite, auf der die Winkel liegen, die zusammen kleiner als zwei Rechte sind.

Das 1. Buch beginnt mit den Beweisen zur Durchführbarkeit von Konstruktionen wie die der Halbierung einer Strecke oder der eines Winkels; dann folgen Sätze über Winkel (Gleichheit der Basiswinkel in gleichschenkligen Dreiecken, Gleichheit von Scheitel- und Wechselwinkel, Winkelsumme im Dreieck), Kongruenzsätze für Dreiecke sowie Sätze über die Flächengleichheit von Dreiecken und Parallelogrammen mit gleicher Grundseite und gleicher Höhe. Den Abschluss bildet der Beweis des Satzes von PYTHAGORAS und dessen Umkehrung (Sätze 47 und 48). Der Beweis von Satz 47 erfolgt durch Anwendung des Satzes, den wir heute als *Kathetensatz des EUKLID* bezeichnen. Der Satz trägt mit Recht dessen Namen; denn vor EUKLID war es üblich, den Satz mithilfe von Proportionen zu beweisen, hier aber wird die Kongruenz von Dreiecken sowie die Flächengleichheit von Dreiecken und halben Rechtecken verwendet.



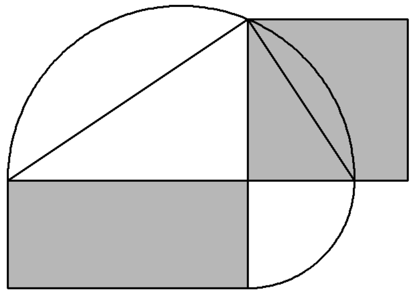
Das 2. Buch, dessen Inhalt als *geometrische Algebra* bezeichnet wird, beschäftigt sich mit Flächenbestimmungen, die sich – aus heutiger Sicht – auch so interpretieren lassen, dass mit ihnen Formeln begründet oder Gleichungen gelöst werden. Beispielsweise lässt sich der Satz *Teilt man eine Strecke in zwei Abschnitte, so ist das Quadrat über der ganzen Strecke zusammen gleich den Quadraten über den Abschnitten und zweimal dem Rechteck aus den Abschnitten* als 1. Binomische Formel $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ interpretieren.





Auch die (zum heute so genannten *Goldenen Schnitt* gehörende) quadratische Gleichung $a \cdot (a-x) = x^2$ ist über Flächenumwandlung lösbar (*Eine Strecke soll so geteilt werden, dass das Rechteck aus der ganzen Strecke und einem der Abschnitte gleich dem Quadrat über der restlichen Strecke ist*).

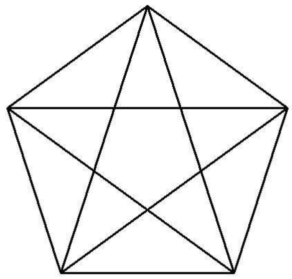
Das 2. Buch enthält abschließend den Beweis, dass man *jede* geradlinig begrenzte Fläche in ein flächengleiches Quadrat verwandeln kann; ein Spezialfall ist der heute als *Höhensatz des EUKLID* bezeichnete Fall der Flächenumwandung eines Rechtecks in ein flächengleiches Quadrat.



Das 3. Buch behandelt die Geometrie des Kreises; es enthält u. a. die Konstruktion einer Tangente an den Kreis, die Sätze über Mittelpunkts- und Umfangswinkel (als Spezialfall den *Satz des THALES*), über Winkel in umbeschriebenen Vierecken sowie den Sehnensatz: *Schneiden sich zwei Sehnen in einem Kreis, dann ist das Rechteck aus den Abschnitten der einen Sehne flächengleich zum Rechteck aus den Abschnitten der anderen Sehne.*

Im 4. Buch werden die Konstruktionen des Inkreises und des Umkreises eines Dreiecks erläutert sowie die Konstruktion regelmäßiger 5-Ecke, 6-Ecke und, durch Kombination der Konstruktionen, auch regelmäßiger 15-Ecke, sowie deren In- und Umkreise.

Das 5. Buch, das auf die Proportionenlehre des Eudoxos von Knidos zurückgeht, beschäftigt sich mit Größen und Verhältnissen. Es stellt den Versuch dar, eine Grundlage für das Rechnen mit *inkommensurablen* Größen zu schaffen. Etwa 150 Jahre zuvor hatte Hippasos von Metapont entdeckt, dass es für die Seitenlänge eines regulären Fünfecks und die Länge der Diagonalen *kein gemeinsames Maß* gibt (wenn eine Seite eine rationale Länge hat, dann hat die Diagonale ein irrationales Maß).



Die Ähnlichkeitslehre im 6. Buch enthält u. a. den Satz, dass eine Winkelhalbierende im Dreieck die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt, außerdem die wichtige Eigenschaft, dass das Verhältnis der Flächen von zueinander ähnlichen Figuren gleich dem Quadrat des Ähnlichkeitsfaktors der Seiten ist. Auch werden die Proportionen $a : x = x : (a-x)$ und $a : x = x : b$ behandelt (vgl. 2. Buch).

Zu Beginn des 7. Buches wird definiert, was gerade und ungerade Zahlen sind, Teiler und Vielfache, Prim-, Quadrat- und Kubikzahlen sowie vollkommene Zahlen. Satz 2 führt die Methode des heute so genannten *Euklidischen Algorithmus* zur Bestimmung des *größten gemeinsamen Teilers* (ggT) zweier (natürlicher) Zahlen ein: Zwei gegebene Zahlen werden als Streckenlängen |AB| und |CD| interpretiert: *Wenn CD aber AB nicht misst* (d. h., wenn |AB| nicht ein Vielfaches von |CD| ist) *und man bei AB, CD abwechselnd immer das Kleinere vom Größeren wegnimmt, dann muss eine Zahl übrig bleiben, welche die vorangehende misst.*

Beispiel: Gesucht ist der größte gemeinsame Teiler von 6 und 15:

Nimm das Kleinere vom Größeren weg: 15 – 6 = 9; das Größere ist jetzt 9.

Nimm das Kleinere vom Größeren weg: 9 – 6 = 3; das Größere ist jetzt 6.

Nimm das Kleinere vom Größeren weg: 6 – 3 = 3.

3 misst demnach 6 und 15.

Euklid erkennt prinzipiell, dass sich jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen lässt (Satz 30: *Wenn eine Primzahl das Produkt zweier Zahlen teilt, dann teilt sie auch einen der beiden Faktoren.*), die Eindeutigkeit der Primfaktorzerlegung wird jedoch erst 2100 Jahre später von Carl Friedrich Gauss in den *Disquisitiones Arithmeticae* bewiesen.

Am Ende des 7. Buches steht ein Verfahren zur Bestimmung des *kleinsten gemeinsamen Vielfachen* (kgV) von Zahlen: kgV(a,b) = ($a \cdot b$) / ggT(a,b). Beim Beweis wird die Eigenschaft genutzt, dass durch den ggT(a,b) das größte gemeinsame Maß der beiden zugehörigen Strecken gegeben ist.

Das 8. Buch der *Elemente* beschäftigt sich mit fortgesetzten Proportionen von natürlichen Zahlen (in heutiger Sprechweise: mit geometrischen Folgen). Beispielsweise stehen die drei Zahlen $a = 2^2$, $b = 2 \cdot 3$, $c = 3^2$ in der Proportion $a : b = b : c$; sie bilden den Anfang einer geometrische Folge mit 4 als erstem Glied und konstantem Faktor $q = 3/2$. Zu zwei Quadratzahlen a und c gibt es immer eine natürliche Zahl b mit der Eigenschaft $a : b = b : c$. Das Kapitel enthält auch Sätze wie: *Misst ein Quadrat ein anderes Quadrat, dann misst auch die eine Seite die andere Seite, und umgekehrt.* (a^2 teilt b^2 genau dann, wenn gilt: a teilt b); an diesem Beispiel kann man ablesen, das EUKLID Zahlen stets geometrisch interpretiert, Quadratzahlen als Quadrate, Produkte von zwei Zahlen als Rechtecke, Produkte von drei Zahlen als Quader.

Das 9. Buch untersucht zunächst Eigenschaften und Zusammenhänge von Quadrat- und Kubikzahlen, bevor dann — ohne Übergang — Satz 20 folgt, der heute auch den Namen *Satz des EUKLID* trägt:

Es gibt mehr Primzahlen als jede vorgegebene Anzahl von Primzahlen.

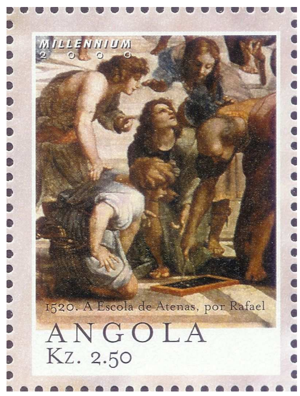
Im Beweis betrachtet EUKLID drei Primzahlen a, b, c und addiert zum Produkt der drei Zahlen die Einheit 1. Dann ist diese Zahl entweder selbst eine Primzahl oder sie ist es nicht. Wenn sie eine Primzahl ist, dann haben wir mit $a \cdot b \cdot c + 1$ eine weitere Primzahl gefunden (denn sie ist größer als a, b, c). Wenn sie keine Primzahl ist, dann muss es eine Primzahl p geben (also eine der drei Primzahlen a, b oder c), welche die Zahl $a \cdot b \cdot c + 1$ teilt. Da aber a, b und c das Produkt $a \cdot b \cdot c$ teilen, teilt also p sowohl das Produkt $a \cdot b \cdot c$ als auch $a \cdot b \cdot c + 1$, demnach auch die Differenz, die Einheit 1, was nicht möglich ist. Also kann p keine der vorgegebenen Primzahlen a, b, c sein.

Nach einer Reihe von Sätzen über gerade und ungerade Zahlen (z. B. Satz 22: *Addiert man eine gerade Anzahl von ungeraden Zahlen, dann ist die Summe gerade.*) folgt zum Abschluss Satz 36, der eine Aussage über vollkommene Zahlen trifft:

Ist die Summe $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ *eine Primzahl,*
dann ist $(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}) \cdot 2^{n-1}$ *eine vollkommene Zahl.*

Dabei heißt eine natürliche Zahl *vollkommen*, wenn sie gleich der Summe ihrer echten Teiler ist. (Die Summe $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-1}$ lässt sich auch als $2^n - 1$ schreiben.)

Beispiele: Für $n = 2$ gilt: $1 + 2 = 3$ ist eine Primzahl; daher ist $3 \cdot 2^1 = 6$ eine vollkommene Zahl: $1 + 2 + 3 = 6$. Für $n = 3$ gilt: $1 + 2 + 2^2 = 7$ ist eine Primzahl; daher ist $7 \cdot 2^2 = 28$ eine vollkommene Zahl: $1 + 2 + 4 + 7 + 14 = 28$. Auch für $n = 5$ und $n = 7$ ergeben sich vollkommene Zahlen. – LEONHARD EULER konnte ca. 2000 Jahre später beweisen, dass sich alle *geraden* vollkommenen natürlichen Zahlen auf diese Weise erzeugen lassen. (Bisher kennt man „nur“ 47 vollkommene Zahlen, und man weiß nicht, ob es ungerade vollkommene Zahlen gibt.)



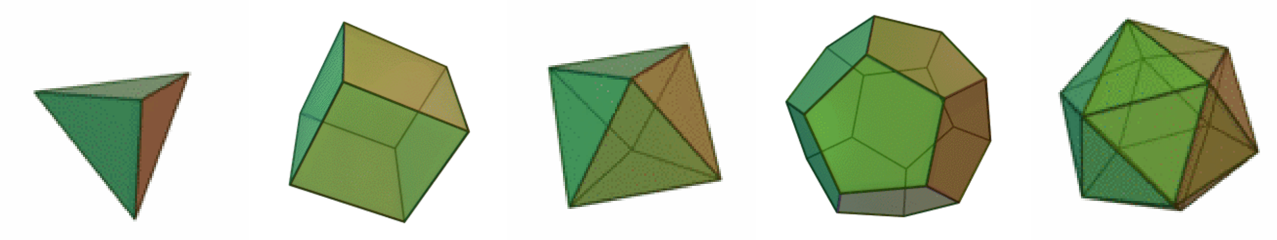
Buch 10 beschäftigt sich sehr ausführlich mit dem Problem kommensurabler und inkommensurabler Strecken und den damit zusammenhängenden Konstruktionen.

Zu Beginn von Buch 11 stehen 28 Definitionen von Begriffen der Raumlehre. Man vermutet, dass sich EUKLID auf Quellen stützte, die älter waren als die seiner ersten Bücher über ebene Geometrie; denn Postulate zur Raumgeometrie werden nicht formuliert.

Aus heutiger Sicht sind die „Sätze" 2 und 3 eher Postulate zur Einführung von Ebenen (*Wenn zwei Geraden sich schneiden, dann liegen sie in einer Ebene; jedes Dreieck liegt in einer Ebene.* und W*enn sich zwei Ebenen schneiden, dann schneiden sie sich in einer Gerade.*) — Nach einigen Sätzen über die Parallelität von Geraden werden Raumecken von Körpern untersucht: *Eine Ecke wird durch ebene Winkel gebildet, deren Summe kleiner ist als vier rechte Winkel* (Satz 21), und es werden Aussagen über Volumina von schiefen Quadern (Parallelepipede) formuliert: *Parallelepipede mit gleicher Grundfläche und gleicher Höhe haben gleiche Volumina* (Satz 31).

Bevor Euklid in Buch 12 auf Pyramiden, Prismen, Zylinder, Kegel und Kugeln eingeht, beweist er: *Kreisflächen verhalten sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser* (Satz 2). Dann folgt, dass sich dreiseitige Prismen stets in drei volumengleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche zerlegen lassen (Satz 7); hieraus ergibt sich, dass das Volumen eines Kegels gleich einem Drittel des Volumens eines Zylinders mit gleicher Grundfläche und Höhe ist (Satz 10). Das Kapitel endet mit Satz 18: *Die Volumina von Kugeln verhalten sich wie die 3. Potenzen ihrer Durchmesser*.

Den Abschluss der *Elemente* bildet das 13. Kapitel mit Sätzen über das regelmäßige 5-Eck, die eine Grundlage darstellen für die Konstruktion der Seiten der fünf regulären Polyeder (Tetraeder, Hexeder, Oktaeder, Dodekaeder, Ikosaeder), die einer Kugel einbeschrieben sind (Sätze 13 – 17); in Satz 18 erfolgt dann der Beweis, dass diese fünf Körper die einzig möglichen regulären Polyeder sind.



Es ist eine bemerkenswerte Tatsache, dass dieses 2300 Jahre alte Werk über so viele Jahrhunderte Vorbild für Generationen von Mathematikern war. Wenn ein Wissenschaftler sein eigenes Vorgehen als *More geometrico* (nach Art der Geometrie) beschrieb, dann huldigte er damit der Strenge des Vorgehens in Euklids Elementen.

Im Laufe der Jahrhunderte wurden die Schwachpunkte der *Elemente* gefunden, Beweislücken und Scheinbeweise aufgedeckt, das Unbehagen hinsichtlich der Postulate und Axiome artikuliert. All dies – insbesondere auch die Auseinandersetzung mit dem 5. Postulat (Parallelenpostulat) – führte im 19. Jahrhundert zur Entdeckung der *nicht-Euklidischen Geometrien* durch Janos Bolyai und Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski sowie zur Präzision der *Grundlagen der Geometrie*, welches dann durch die gleichnamige Schrift von David Hilbert im Jahr 1899 zu einem Abschluss kam.

Euklid schrieb noch weitere Bücher, die überliefert wurden: *Data* (Eigenschaften von geometrischen Figuren), *Über die Teilung von Figuren* (Konstruktionen, mit deren Hilfe Figuren in einem vorgegebenen Verhältnis geteilt werden können), *Sectio canonis* (Musiktheorie), außerdem andere, die verloren gingen: *Pseudaria* (Trugschlüsse), *Phaenomena* (Einführung in die Astronomie) und *Conica* (Kegelschnitte).