



FREISTETTERS FORMELWELT EIN MATHEMATISCHES MONSTER

Überraschende Entdeckungen sind in der Mathematik nicht unbedingt an der Tagesordnung. Wenn es dann doch einmal passiert, ist der Aufruhr groß.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

» spektrum.de/artikel/1535087

Eigentlich und ganz offiziell befassen sich die Mathematiker ausschließlich mit Produkten des eigenen Geistes. Sie bestehen darauf, dass alle Gegenstände ihrer Wissenschaft, von den Mengen über die Zahlen und die Funktionen bis hin zu den unglaublichsten stochastischen Differenzialoperatoren, nichts weiter sind als das, was die Wissenschaftler selbst definiert haben. Wo sollen da Überraschungen herkommen wie die Schwarzen Löcher der Astronomen, die Pfeilgiftfrösche der Zoologen, die Dinosaurier der Paläontologen oder die Quarks der Teilchenphysiker? Doch auch in der Mathematik gibt es immer wieder »Entdeckungen«, die alle erstaunen. Zum Beispiel diese Funktion:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

Das ist die Weierstraß-Funktion, benannt nach dem deutschen Mathematiker Karl Theodor Wilhelm Weierstraß (1815–1897). Sie sieht – zumindest nach mathematischen Maßstäben – auf den ersten Blick recht harmlos aus. Als sie allerdings 1872 das erste Mal öffentlich vorgestellt wurde, kam das für fast alle Experten ziemlich unerwartet. Es handelte sich nämlich um das erste Beispiel einer Funktion, die überall stetig und nirgends differenzierbar ist.

Stetigkeit ist ein fundamentales mathematisches Konzept. Anschaulich beschreibt man damit Funktionen, die keine Sprünge aufweisen. Die Funktion einer Sinusschwingung ist zum Beispiel stetig. Die Funktion, welche die Menge an Geld auf meinem Konto beschreibt, dagegen nicht; sie kann plötzlich von einem Wert zu einem anderen springen.

Differenzierbarkeit dagegen ist nicht die Abwesenheit von Sprüngen, sondern von Knicken. Eine Funktion ist differenzierbar in einem Punkt, wenn sie in diesem

Punkt eine Tangente hat. Die Steigung dieser Tangente (die »Ableitung« der Funktion) beschreibt die lokale Änderungsrate der Funktion.

Bislang war man allgemein davon ausgegangen, dass eine stetige Funktion immer auch überall differenzierbar sein muss, bis auf höchstens ein paar isolierte Punkte, in denen sie sich einen Knick genehmigt. Aber dass sie stetig ist und trotzdem so zerknittert, dass man in keinem Punkt eine Tangente anlegen kann, das konnten sich die Zeitgenossen nicht vorstellen – bis Weierstraß das Gegenteil bewies.

In seiner Funktion muss a zwischen 0 und 1 liegen, b ist eine ungerade natürliche Zahl, und das Produkt von a und b muss größer als $1 + 3\pi/2$ sein. Sind alle diese Bedingungen erfüllt, dann hat die unendliche Summe in der Formel für jede reelle Zahl x einen wohlbestimmten Wert, und die resultierende Funktion ist überall stetig. Sie mag zwar ein wenig kompliziert aussehen, und tatsächlich kann sie sogar als das erste Beispiel eines Fraktals gelten, also einer Figur, die immer im Wesentlichen gleich aussieht, einerlei bei welcher Vergrößerung man sie betrachtet. Aber sie ist stetig und – wie Weierstraß beweisen konnte – gleichzeitig in keinem einzigen Punkt differenzierbar.

Das Ergebnis war höchst gewöhnungsbedürftig. Schon wenige Jahre nach ihrer Entdeckung hieß die Funktion bei den Fachkollegen das »weierstraßsche Monster«. Und der französische Mathematiker Charles Hermite (1822–1901) schrieb noch 1893 an einen Kollegen: »Ich wende mich mit Grausen vor dieser beklagenswerten Plage der stetigen Funktionen, die keine Ableitung haben.«

Heute weiß man, dass es unendlich viele stetige Funktionen gibt, die nirgendwo differenzierbar sind. Die Weierstraß-Funktion ist nur eine von ihnen. Die Mathematiker haben sich mit der überraschenden Entdeckung arrangiert – und den Wert dieses »Monsters« erkannt (**Spektrum** März 1992, S. 72).