Computer-Kurzweil

Mit einem Computer-Mikroskop untersuchen wir ein Objekt von faszinierender Struktur in der Ebene komplexer Zahlen.

Von A. K. Dewdney

Im Zentrum der komplexen Zahlenebene liegt die Mandelbrot-Menge. Wendet man eine bestimmte mathematische Operation wiederholt auf die komplexen Zahlen an, dann fliehen die Zahlen außerhalb der Menge ins Unendliche, während die Zahlen innerhalb der Menge in ihr herumwandern. In der Nähe des Randes markieren immer detailliertere Strukturen von seltener Vielfalt und fremdartiger Schönheit den Beginn der Instabilität.

Die Menge ist nach Benoit B. Mandelbrot benannt, einem Wissenschaftler vom IBM Thomas J. Watson-Forschungszentrum in Yorktown Heights, New York (in der deutschsprachigen Literatur bezeichnet man sie manchmal auch als „Apfelmännchen"). Aus seiner Arbeit mit geometrischen Formen heraus hat Mandelbrot ein Gebiet entwikkelt, das er fraktale Geometrie nennt: die mathematische Untersuchung von Gebilden mit gebrochener Dimension. Der Rand der Mandelbrot-Menge ist ein solches Gebilde – aber daneben hat er noch viele weitere Eigenschaften.

Mit Hilfe eines recht einfachen Programms läßt sich ein Computer in eine Art Mikroskop zur Untersuchung des Randes der Mandelbrot-Menge verwandeln. Im Prinzip kann man sich jede Stelle der Menge in beliebiger Vergrößerung ansehen (Bilder 1 bis 4 und Titelbild). Aus der Ferne betrachtet sieht die Menge aus wie eine gedrungene, mit Warzen bedeckte, auf der Seite liegende Acht. Das Innere der Figur ist von einem weißen Halo eingehüllt, der weiter draußen in Blau- und Schwarztöne übergeht.

Untersucht man die Mandelbrot-Menge aus der Nähe, findet man kleine Figuren, die auf den ersten Blick der ursprünglichen ähneln. Bei genauerem Hinsehen zeigt sich jedoch ein ganz unterschiedliches Bild mit Mustern, die beispielsweise an organische Strukturen wie Ranken erinnern.

Vergrößert man die Ranken, zeigen sich Spiralpaare, die durch filigrane Brücken miteinander verbunden sind (Bild 2). Im Mittelpunkt einer solchen Brücke sind wiederum zwei Ranken, in deren Zentrum man vier weitere Ranken erkennt. Im Zentrum dieses Gebildes findet man schließlich eine weitere Version der Mandelbrot-Menge (Bild 2 rechts unten).

Die vergrößerte Version sieht nicht ganz genauso aus wie die ursprüngliche Mandelbrot-Menge. Mit zunehmender Vergrößerung scheinen immer neue derartige Objekte aufzutauchen, aber bei genauem Betrachten zeigen sich stets Unterschiede. So geht es in unendlicher Vielfalt mit ästhetischen Überraschungen immer weiter.

Computerprogramme für iterierte Abbildungen

Im folgenden werde ich zwei Computerprogramme beschreiben, mit denen sich iterierte Abbildungen untersuchen lassen – wie etwa die Abbildung, welche die Mandelbrot-Menge erzeugt.

Mit dem ersten Programm wurden die farbigen Abbildungen erzeugt, die in diesem Artikel zu sehen sind. Das Programm läßt sich auch für Personal Computer anpassen, die für graphische Ausgabe eingerichtet sind. Es liefert selbst dann gute Bilder, wenn Sie nur eine einfarbige Ausgabemöglichkeit haben. Das zweite Programm ist für Leser, die – wie ich – ab und zu eine Pause von der unendlichen Komplexität nötig haben und sich dann in der scheinbaren Einfachheit des Endlichen erholen wollen.

Das Wort „komplex" gebrauche ich hier in zwei Bedeutungen. Die eine ist offenbar angemessen zur Beschreibung der Mandelbrot-Menge, die andere gehört in die Mathematik. Eine komplexe Zahl besteht aus zwei Summanden. Sie heißen, aus historischen Gründen, Realteil und Imaginärteil. Zum Beispiel ist $7+4i$ eine komplexe Zahl mit Realteil 7 und Imaginärteil 4. Der Buchstabe i neben der 4 zeigt an, welcher Teil der Imaginärteil ist.

Jede komplexe Zahl kann man sich als Punkt in einer Ebene vorstellen, der Ebene der komplexen Zahlen – oder kurz, der komplexen Ebene. Um $7+4i$ in dieser Ebene zu finden, beginnen Sie im Ursprung, das heißt mit der komplexen Zahl $0+0i$, und gehen sieben Einheiten nach rechts und vier Einheiten nach oben. Die komplexe Ebene besteht aus überabzählbar vielen derartigen Punkten. Ihre Real- und Imaginärteile können positiv oder negativ, ganzzahlig oder nicht ganzzahlig, rational oder irrational sein.

Komplexe Zahlen lassen sich leicht addieren: Man addiert die beiden Summanden einfach separat. So ist beispielsweise $3-2i$ plus $7+4i$ gleich $10+2i$. Die Multiplikation von komplexen Zahlen ist etwas schwieriger. Behandelt man das i zunächst wie das x aus der Schulmathematik, dann ergibt sich für das Produkt der Zahlen $3-2i$ und $7+4i$ der Ausdruck $21+12i-14i-8i^2$. An dieser Stelle kommt eine besondere Eigenschaft des Symbols i ins Spiel: i^2 ist gleich -1. Also ergibt sich, wenn man Real- und Imaginärteil zusammenfaßt, $29-2i$.

Jetzt können wir den Iterationsprozeß beschreiben, der die Mandelbrot-Menge erzeugt. Beginnen Sie mit dem algebraischen Ausdruck z^2+c; dabei ist z eine komplexe Variable und c eine feste komplexe Zahl. Setzen Sie zunächst z gleich der komplexen Zahl 0 beziehungsweise $0+0i$. Das Quadrat von z ist dann immer noch 0, und die Addition von c ergibt c. Dieses Resultat setzen Sie im nächsten Schritt für die Variable z in den Ausdruck z^2+c ein. Als neue Summe ergibt sich dann c^2+c. Das setzen Sie wieder ein, und Sie erhalten $(c^2+c)^2+c$. So fahren Sie fort, indem Sie immer das Ergebnis des letzten Schrittes im nächsten Schritt für z einsetzen.

Führt man diese Iteration für bestimmte Werte von c durch, so passieren seltsame Dinge. Nehmen wir zum Beispiel für c die komplexe Zahl $1+1i$, so erhalten wir:

erste Iteration $1+3i$,
zweite Iteration $-7+7i$,
dritte Iteration $1-97i$.

Wie Sie sehen, können Real- und Imaginärteil wachsen, fallen oder ihre Vorzeichen wechseln. Wenn wir diese Iteration fortsetzen, dann werden die komplexen Zahlen immer größer.

Was ist hier mit der Größe einer komplexen Zahl gemeint? Man kann sich die komplexen Zahlen als Punkte in der Ebene vorstellen; die Größe (der Betrag) einer komplexen Zahl ist einfach der Abstand des zugehörigen Punktes vom Ursprung, der komplexen Zahl $0+0i$.

Dieser Abstand ist die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten gleich dem Real- beziehungsweise Imaginärteil der komplexen Zahl sind. Man kann ihn also einfach nach dem Satz des Pythagoras berechnen: Sie müssen nur Real- und Imaginärteil quadrieren, die beiden Quadrate addieren und aus dem Resultat die Wurzel ziehen.

Der Betrag von $7+4i$ beispielsweise ist also gleich der Wurzel aus 7^2+4^2, also ungefähr 8,062. Komplexe Zahlen, die im Verlaufe der beschriebenen Iteration eine gewisse Größe erreichen, wachsen danach sehr schnell weiter und überschreiten bald die größte in einem Computer darstellbare Zahl.

Zum Glück kann man in unserem Zusammenhang alle Zahlen ignorieren, die unter der Iteration nach Unendlich divergieren: Die Mandelbrot-Menge besteht gerade aus der Menge der Zahlen c, deren Betrag unter beliebig langer Iteration gemäß der Vorschrift $z \to z^2+c$ endlich bleibt. Der Realteil ihrer Elemente liegt im Bereich zwischen -2 und 1, der Imaginärteil zwischen $-1{,}5$ und 1,5.

Das Programm, das ich gleich beschreiben werde, sucht nach solchen Zahlen. Ich verdanke es John H. Hubbard, einem Mathematiker von der Cornell-Universität. Hubbard ist einer der Spezialisten für die Mandelbrot-Menge; zusammen mit Heinz-Otto Peitgen von der Universität Bremen hat er die fundamentalen Computer-Experimente von Benoit B. Mandelbrot fortgeführt. Die meisten Bilder in diesem Artikel haben Heinz-Otto Peitgen und seine Kollegen Hartmut Jürgens, Michael Prüfer, Peter H. Richter und Dietmar Saupe an der Universität Bremen erzeugt.

Bilder der Mandelbrot-Menge

Hubbards Programm diente mir als Vorlage bei meinem Programm für einen „Zoom in die Mandelbrot-Menge“. Zu-

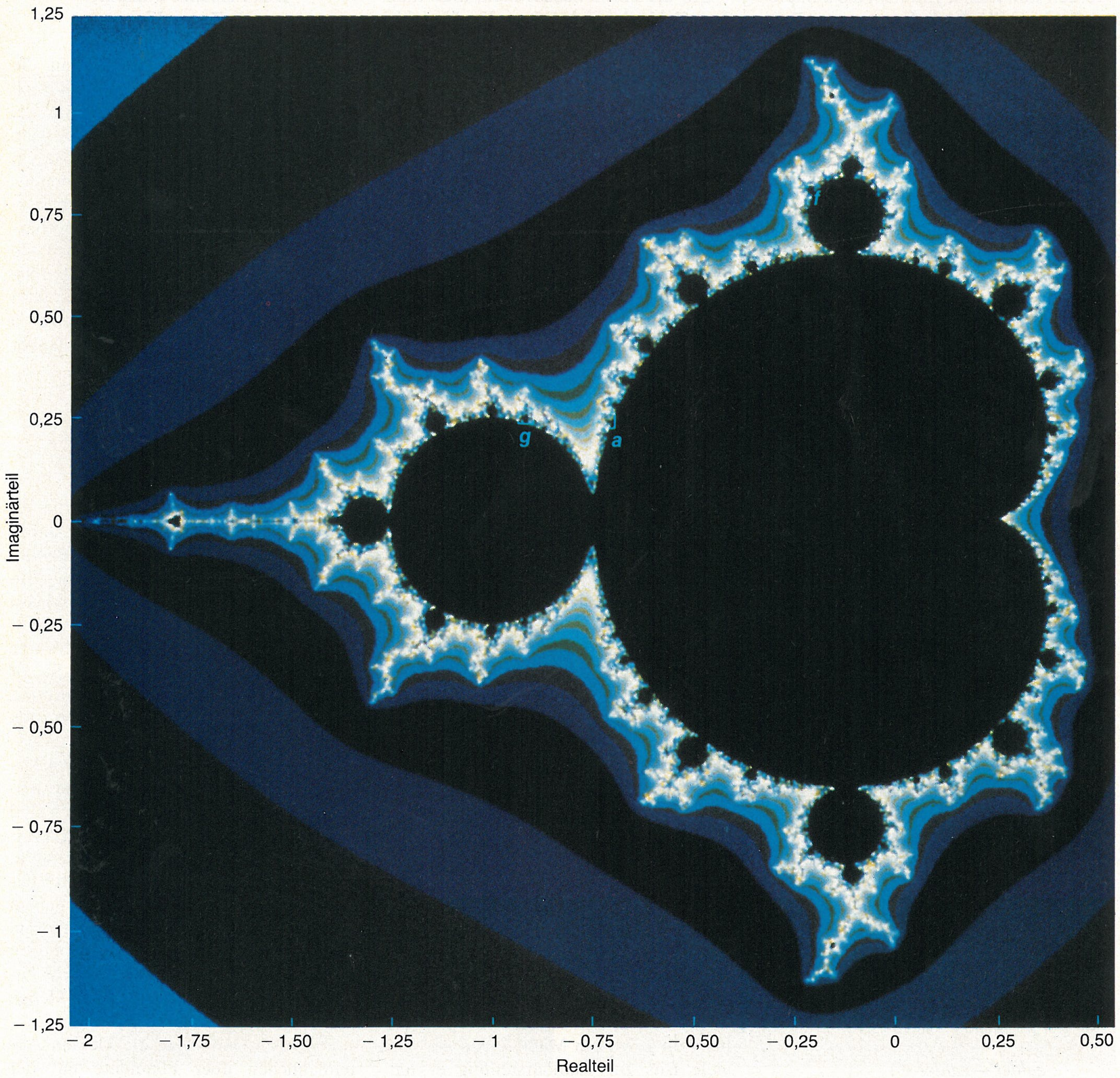

Bild 1: Die Mandelbrot-Menge und ihre Koordinaten in der komplexen Ebene. Auf dem Titelbild und in Bild 2 bis 4 gezeigte Details sind markiert.

nächst wird ein zweidimensionales Speicherfeld namens *bild* definiert, in dem man später das Bild abspeichert. Die Zellen von *bild* entsprechen den einzelnen Bildpunkten, den Pixels. Hubbards Gitter hat 400 Zeilen und 400 Spalten; Peitgen und seine Kollegen von der Universität Bremen arbeiten mit einem noch größeren Feld.

Leser, die dieses Programm auf ihrem Personal Computer laufen lassen wollen, müssen die Größe des Feldes ihrer Ausrüstung und ihrem Temperament anpassen. Bei einem Feld mit doppelter Kantenlänge läuft das Programm viermal so lange, aber das Bild hat dann auch eine höhere Auflösung.

Im ersten Teil des Programms wählt man ein quadratisches Gebiet in der komplexen Ebene aus, das untersucht werden soll. Zuerst gibt man die komplexe Zahl an, die der linken unteren Ecke dieses Quadrates entspricht. Real- und Imaginärteil dieser Zahl speichert man in den beiden Variablen a*ecke* und b*ecke* ab. Als nächstes gibt man die Seitenlänge des Quadrats ein; sie wird in der Variablen *seite* gespeichert.

Im zweiten Teil des Programms wird das Speicherfeld *bild* dem interessierenden Quadrat angepaßt. Dazu wird einer Variablen namens *spalt* die Entfernung zwischen zwei Pixels zugewiesen. *spalt* erhält man also, indem man *seite* durch die Anzahl der Spalten (oder Zeilen) in *bild* dividiert.

Der dritte Teil ist das Herzstück des Programms. Hier wird nach komplexen Zahlen c gesucht, die in der Mandelbrot-Menge liegen; und Zahlen, die in gewissem Sinne dicht an dieser Menge liegen, werden Farben zugewiesen. Die folgende Prozedur muß für jedes Pixel durchgeführt werden; Hubbards 400-mal-400-Feld erfordert also 160 000 Einzelrechnungen. Nehmen wir an, das Programm arbeite gerade an dem Pixel in Zeile m und Spalte n. Dann läßt sich der dritte Teil in vier Schritte zerlegen: Berechne zunächst die komplexe Zahl c, die diesem Pixel entspricht. Um den Realteil ac von c zu erhalten, addiere man $n \times spalt$ zu a*ecke*. Für den Imaginärteil bc von c addiere man $m \times spalt$ zu b*ecke*. Die imaginäre Zahl i kommt in dem Programm nicht vor.

Setze nun eine komplexe Variable z (mit Realteil az und Imaginärteil bz) auf $0+0i$. Setze eine Integer-Variable *zähler* auf 0.

Wiederhole dann die folgenden drei Schritte, bis entweder der Betrag von z größer als 2 ist, oder *zähler* größer als 1000:

$$\begin{aligned} z &\leftarrow z^2 + c, \\ \textit{zähler} &\leftarrow \textit{zähler} + 1, \\ \textit{betrag} &\leftarrow \text{Betrag von } z. \end{aligned}$$

Wie kommt hier die Zahl 2 ins Spiel? Ein einfaches Resultat aus der komplexen Iterationstheorie garantiert, daß die Iteration z nach unendlich treibt, wenn der Betrag von z irgendwann größer wird als 2. Es stellt sich heraus, daß recht viele Punkte, die schließlich ins Unendliche wandern, schon nach wenigen Iterationen einen größeren Betrag als 2 haben. Ihre langsameren Vettern werden bei größeren Werten von *zähler* immer seltener.

Ordne schließlich *bild* (m, n) je nach dem Wert von *zähler* am Ende des dritten Schrittes eine Farbe zu. Stelle die Farbe in dem entsprechenden Pixel auf dem Bildschirm dar. Man beachte dabei, daß die Farbe eines Pixels nur von der komplexen Zahl in der rechten oberen Ecke des n-Pixels abhängt.

Um die Farbe zuzuordnen, muß man den Zahlenbereich, den die Variable *zähler* überstreicht, in Bereiche aufteilen, die jeweils einer bestimmten Farbe entsprechen. Pixel, für die z schon nach wenigen Iterationen einen Betrag größer als 2 annimmt, werden rot gefärbt. Pixel, bei denen der Betrag von z erst nach relativ vielen Iterationen 2 erreicht, erhalten die Farbe violett, vom anderen Ende des Spektrums. Pixel, für die der Betrag von z auch nach 1000 Iterationen noch kleiner als 2 ist, werden schwarz gefärbt: Wir nehmen einfach an, daß sie zur Mandelbrot-Menge gehören.

Es ist sinnvoll, die Farben nicht festzulegen, bis der Bereich der Werte, den *zähler* in einem bestimmten Quadrat annimmt, feststeht. Danach kann man die Zuordnung so wählen, daß das ganze verfügbare Farbspektrum ausgenutzt wird. Hubbard schlägt vor, im vierten Schritt nur die Werte von *zähler* in *bild* einzutragen. Ein zweites Programm kann dann die Matrix durchsuchen und die Farbgebung festlegen. Leser, die bis hierher kommen, werden sicherlich selber eine günstige Zuordnung finden.

Besitzen Sie keinen Farbbildschirm, können Sie schwarz-weiße Bilder erzeugen. Komplexe Zahlen, für die der Betrag von z nach r Iterationen größer ist als 2, werden weiß gefärbt, die anderen schwarz. Justieren Sie r nach Ihrem Geschmack. Um nicht die ganze Nacht rechnen zu müssen, können Sie das Speicherfeld auch nur 100 mal 100 Felder groß machen. Hubbard schlägt außerdem vor, die Maximalzahl von Iterationen auf 100 statt 1000 zu begrenzen. Die so erzeugten Bilder sind suggestive, pointillistische Gegenstücke ihrer farbigen Kollegen (Bild 5).

Wie leistungsfähig ist die „Zoom-Linse" eines Personal Computers? Das hängt in gewissem Maße davon ab, wieviele Bits zur Zahldarstellung er hat. Laut Magi, meinem Mikrocomputer-Amanuensis an der Universität von West Ontario, sind das beim IBM PC – mit dem Mikroprozessor 8088 von Intel – 16 Bits. Deklariert man die Variablen mit doppelter Genauigkeit, so erhöht sich diese Zahl auf 32 Bits.

Magi und ich haben ausgerechnet, daß man mit solch doppelter Genauigkeit bis zu 30 000fache Vergrößerung erreichen kann. Noch höhere Genauigkeit, die man mit spezieller Software erreichen kann, vergrößert die Anzahl der signifikanten Stellen auf mehrere hundert. Die Vergrößerung der Mandelbrot-Menge, die sich mit solcher Genauigkeit im Prinzip erzielen läßt, ist viel größer als die zum Erkennen eines Atomkerns theoretisch erforderliche Vergrößerung.

Der Personal Computer als Zoom-Linse

An welchen Stellen sollte man die komplexe Ebene untersuchen? Natürlich in der Nähe der Mandelbrot-Menge, aber wo genau? Hubbard sagte, es gäbe „Zillionen herrlicher Flecken". Wie ein Reisender in einem Land von unendlicher Schönheit sprudelt er vor Vorschlägen, wo die Leser suchen könnten. Allerdings haben die Plätze keine Namen wie Hongkong oder Hawaii: „Versuchen Sie das Gebiet mit Realteil zwischen 0,26 und 0,27 und Imaginärteil zwischen 0 und 0,01." Zwei weitere Plätze schlägt er vor:

Realteil	Imaginärteil
−0,76 bis −0,74	0,01 bis 0,03
−1,26 bis −1,24	0,01 bis 0,03

Wenn Sie die Farbbilder zu diesem Artikel betrachten, sollten Sie daran denken, daß nur die schwarzen Punkte zur Mandelbrot-Menge gehören. Ein Großteil der Schönheit liegt in dem Halo der Farben, die man den divergenten Punkten zuordnet. Die isolierte schwarze Menge sieht nicht so schön aus: Sie ist überall von Filamenten überwuchert und von verkleinerten Versionen von sich selbst umgeben.

Genaugenommen ist keines dieser Miniatur-Apfelmännchen eine genaue Kopie der Mutter; keine zwei Mengen sind genau gleich. Nahe an der großen Mandelbrot-Menge gibt es sehr viel kleinere, die scheinbar frei in der komplexen Ebene herumschweben. Aber der Schein trügt: Ein bemerkenswertes Theorem von Hubbard und seinem Kollegen Adrian Douady von der Universität Paris besagt, daß die Mandelbrot-Menge zusammenhängend ist.

Demnach sind sogar die kleinen Apfelmännchen über Filamente mit der großen Menge verbunden. Die Miniaturen findet man überall in der Nähe der Mutter; sie kommen in allen Größen vor. Jedes quadratische Gebiet, das einen Teil des Randes umfaßt, enthält unendlich viele davon, auch wenn bei einer bestimmten Vergrößerung nur einige zu sehen sind. Hubbard findet, daß die Mandelbrot-Menge „das komplizierteste Objekt in der Mathematik" sei.

Leser, die noch mehr Farbbilder von der Mandelbrot-Menge und anderen mathematischen Objekten kennenlernen wollen, können sich an Hubbard wenden (Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, New York 14853, USA) und eine Broschüre anfordern. Sie erhalten dann ein Bestellformular, mit dem Sie quadratische Farbposter anfordern können; ihre Qualität ist ähnlich wie bei den hier gezeigten Bildern von Peitgen. Sie können sich auch direkt an Prof. Heinz-Otto Peitgen wenden, Fachbereich Mathematik, Universität Bremen, Postfach 330440, 2800 Bremen 33. Dort erhalten Sie einen 100seitigen Farbkatalog „Schönheit im Chaos" (DM 25.– plus Versandkosten), der eine weltweite Ausstellungsserie, veranstaltet zusammen mit dem Goethe-Institut, begleitet; Farbposter können ebenfalls bestellt werden. Eine erweiterte Fassung erscheint in Kürze unter dem Titel „The Beauty of Fractals" von Heinz-Otto Peitgen und Peter H. Richter beim Springer-Verlag.

Sofern Sie von der großen Komplexität verwirrt sind, können Sie sich auch auf das Endliche zurückziehen. Iteriert man einen Quadrierungsprozeß auf einer endlichen Menge von natürlichen Zahlen, zeigen sich ebenfalls interessante Strukturen; allerdings sind sie kombinatorischer und nicht geometrischer Art.

Iterationen auf einer endlichen Menge

Wählen Sie für einen solchen Iterationsprozeß irgendeine Zahl zwischen 0 und 99. Quadrieren Sie diese Zahl und nehmen Sie die letzten beiden Ziffern. Zum Beispiel ist 59^2 gleich 3481, und die letzten beiden Ziffern sind 81. Diesen Prozeß wiederholen Sie immer wieder. Früher oder später werden Sie auf eine Zahl stoßen, die Sie schon einmal hatten. So ergibt 81 die sich wiederholende Folge 61, 21, 41 und 81.

Iteriert man auf endlichen Mengen, ergeben sich stets derartige Schleifen. In

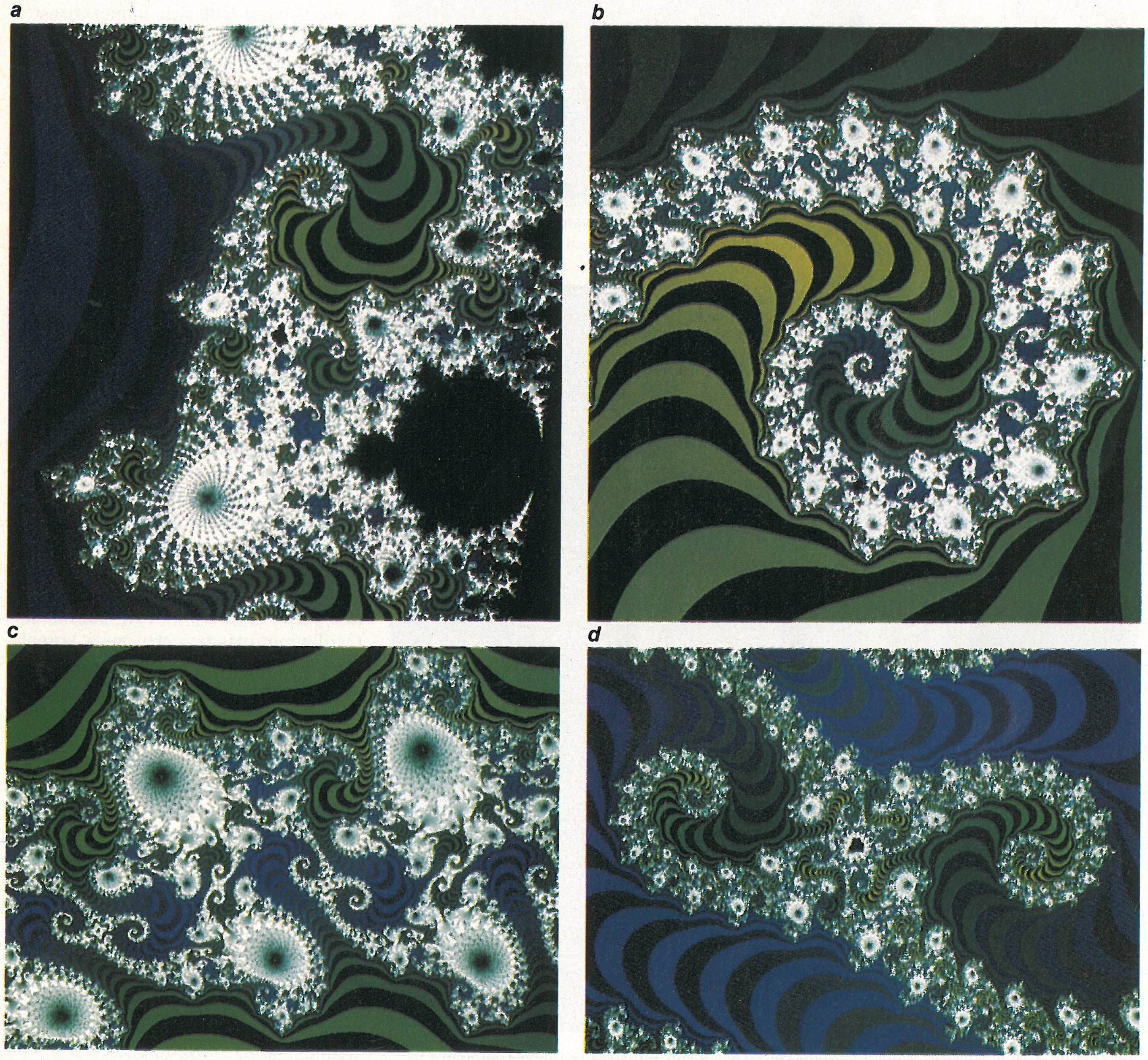

Bild 2: Sukzessive Vergrößerungen des „Schäferstabes" im Gebiet *a* von Bild 1.

e

Bild 3: Bei starker Vergrößerung eines Teils von Bild 2d findet man dieses „Auge".

f

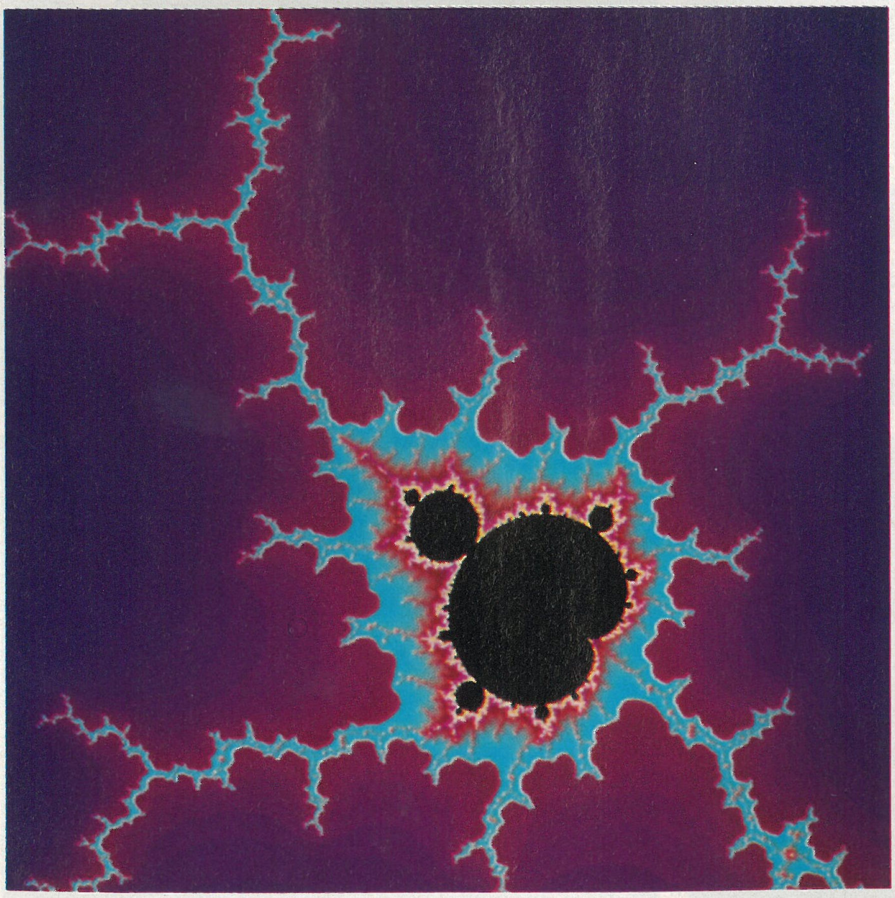

Bild 4: Ein Miniatur-Apfelmännchen im Gebiet f von Bild 1 ist mit dem Hauptteil der Menge durch ein Filament verbunden.

unserem Beispiel sieht man leicht, daß nach spätestens 100 Iterationen eine der 100 Zahlen zweimal vorgekommen sein muß; die erste doppelt vorkommende Zahl ergibt dann eine Schleife. Es gibt ein herrliches Programm, das solche Schleifen findet und dabei fast keinen Speicherplatz benötigt. Mehr darüber später.

Man braucht nur etwa eine Stunde, um das Ergebnis des Quadrierungsprozesses graphisch darzustellen: Ordnen Sie jeder Zahl zwischen 0 und 99 einen Punkt auf einem Blatt Papier zu. Folgen zwei Zahlen im Iterationsprozeß aufeinander, so verbinden Sie die beiden zugehörigen Punkte durch einen Pfeil; in unserem Beispiel sollte also ein Pfeil vom Punkt 59 zum Punkt 81 führen. Die Pfeile werden sich bald überschneiden; Sie sollten deshalb das Diagramm ab und zu neu zeichnen, so daß es keine Überschneidungen gibt. Ein Diagramm ohne Überschneidungen läßt sich immer konstruieren.

Oft tauchen unverbundene Unterdiagramme auf, die sich so zeichnen lassen, daß die zugrundeliegenden Symmetrien schön herauskommen. Zum Beispiel enthält das ohne Überschneidungen gezeichnete Iterationsdiagramm für den Quadrierungsprozeß auf den Zahlen 0 bis 99 sechs unverbundene Unterdiagramme. Die Teile tauchen jeweils paarweise auf, und jedes Stück ist hochsymmetrisch (Bild 6).

Können Sie eine Erklärung für die Symmetrie geben? Was würde passieren, wenn man statt dessen die Zahlen von 0 bis 119 betrachtete? Besteht ein Zusammenhang zwischen der Anzahl der zusammenhängenden Komponenten und der größten Zahl in der Folge?

Ähnliche Iterationsmuster gibt es für einige komplexe Zahlen aus der Mandelbrot-Menge. Für gewisse Werte von c erzeugt die Iteration z^2+c endliche Zyklen komplexer Zahlen. So ergibt sich für die komplexe Zahl $0+1i$ eine permanente Oszillation zwischen den zwei komplexen Zahlen $-1+1i$ und $0-1i$.

Es gibt auch Zyklen mit nur einem Element. Sofern sie stabil sind, nennt man sie Attraktoren – unabhängig davon, ob sie in einer endlichen oder der unendlichen Mandelbrot-Menge vorkommen.

Jede der sechs Komponenten des Iterationsdiagramms für die ganzen Zahlen zwischen 0 und 99 enthält einen Attraktor. Geometrisch läßt sich ein Attraktor als Polygon darstellen; die Zahlen, die in ihn hineinführen, entsprechen aufgepflanzten Bäumen.

Eine Möglichkeit, einen Attraktor mit Hilfe eines Computers zu finden, besteht darin, jede neu erzeugte Zahl in einem speziell reservierten linearen Speicherfeld aufzuheben. Sobald eine Zahl zum zweiten Mal auftaucht, druckt man alle dazwischenliegenden Zahlen aus. Diese Methode ist einfach und läßt sich leicht programmieren. Wenn das Speicherfeld lang ist, kann sie allerdings viel Zeit kosten: Um einen Attraktor-Zyklus in einem Speicherfeld mit n Zahlen zu finden, muß man ungefähr n^2 Vergleiche durchführen, denn jede neue Zahl muß mit allen bereits erzeugten verglichen werden.

Es gibt jedoch ein trickreiches kleines Programm, das Attraktoren viel schneller findet. Es benötigt nur zwei anstelle von n Speicherplätzen und läßt sich auch auf dem einfachsten programmierbaren Taschenrechner kodieren. Das Programm findet sich neben anderen in dem bemerkenswerten Buch „Mathematical Recreations for the Programmable Calculator" von Dean Hoffman (Universität Auburn) und Lee Mohler (Universität von Alabama).

Das Programm heißt RHOP, denn die Folge der Zahlen, die zum Schluß in einem Zyklus mündet, ähnelt einem Seil (englisch *rope*) mit einer Schlinge (englisch *loop*) am Ende. Außerdem ähnelt die Zahlenfolge dem griechischen Buchstaben Rho (ϱ).

Das Programm enthält zwei Variablen, *flink* und *lahm*. Anfänglich erhalten beide den Wert der Startzahl. Die Iterationsschleife des Programms enthält nur drei Anweisungen:

$$\begin{aligned} \mathit{flink} &\leftarrow \mathit{flink} \times \mathit{flink} \pmod{100}, \\ \mathit{flink} &\leftarrow \mathit{flink} \times \mathit{flink} \pmod{100}, \\ \mathit{lahm} &\leftarrow \mathit{lahm} \times \mathit{lahm} \pmod{100}. \end{aligned}$$

Die Anweisung mod 100 holt die beiden letzten Stellen aus dem Produkt. Die Variable *flink* wird zweimal quadriert, *lahm* dagegen nur einmal. *flink* läuft doppelt so schnell vom Schwanz zum Kopf des Rho wie *lahm*. Im Kopf wird *lahm* von *flink* eingeholt, sobald *lahm* die Kopfschleife teilweise durchlaufen hat. Das Programm verläßt die Iterationsschleife, sobald *lahm* gleich *flink* ist.

Der Attraktor wird schließlich identifiziert, indem man den Quadrierungsprozeß noch einmal für den momentanen Wert von *lahm* iteriert. Die so erzeugte Folge wird beim Iterieren gleich ausgedruckt, und der Prozeß stoppt, sobald die Anfangszahl im Laufe des Iterationsprozesses zum zweitenmal vorkommt.

Sofern Leser die verschiedenen Effekte wiederholten Quadrierens auf diversen Zahlbereichen untersuchen, würde ich mich freuen, die entsprechenden Diagramme zu sehen (meine Anschrift: University of Western Ontario, Department of Computer Science, London, Ontario N6 A3 K7, Kanada); man kann sie per Computer oder mit der Hand erstellen. Diskrete Iteration ist ein neu aufkommendes Gebiet der Mathematik mit Anwendungen in der Informatik, Biomathematik, Physik und Soziologie. Theoretiker sollten auf ein Buch zu diesem Thema von François Robert von der Universität Grenoble achten.

Bild 5: Miniatur-Apfelmännchen auf einem Schwarz-Weiß-Bildschirm.

Danksagung vom Planeten Arde

Die zweidimensionalen Bewohner des Planeten Arde möchten den vielen Lesern ihren tiefen Dank aussprechen, die versucht haben, die im Juli-Artikel beschriebene Kreuzungsschaltung zu verbessern. Die Schaltung bestand aus zwölf NAND-Gattern mit jeweis zwei Eingängen. Ich hatte die Leser gebeten, die minimal erforderliche Anzahl von NAND-Gattern – und nur NAND-Gattern – zu finden, mit der sich eine Kreuzungsschaltung aufbauen läßt. Die meisten eingeschickten Schaltungen bestanden aus zehn Gattern; das ist eine geringfügige Verbesserung. Drei Leser aber fanden eine Schaltung mit nur acht Gattern (Bild 7).

Die Schaltung mit acht Gattern enthält ein NAND-Gatter mit drei Eingängen und zwei mit nur einem Eingang, die als Inverter arbeiten: Sie verwandeln 0 in 1 und umgekehrt. Dieselbe Kreuzungsschaltung mit acht NAND-Gattern ist übrigens bereits als U.S. Patent Nr. 3248573 (26. April 1966) eingetragen. Robert L. Frank, ein Systemberater aus Birmingham in Michigan, schreibt, daß dieses Patent Lester M. Spandorfer aus Cheltenham in Pennsylvania, Albert B. Tonik aus Dresher (Pennsylvania) und Shimon Even aus Cambridge (Massachusetts) erteilt wurde.

Man fragt sich, ob es diese Schaltung tatsächlich in irgendeinem modernen Gerät gibt. Ebenso erhebt sich die Frage, ob man nicht mit noch weniger NAND-Gattern auskommt – vermutlich ist das jedoch nicht möglich.

C. Walter Johnson aus Long Beach in Kalifornien beschrieb eine Vielzahl zweidimensionaler Schaltungen, die mehrere Gattertypen verwenden. Anscheinend kann man nicht nur Kreuzungsschaltungen in zwei Dimensionen bauen, sondern auch ebene Flip-Flops. Die Flip-Flops könnten einem zweidimensionalen Rechner als Speicher dienen.

Stephen Wolfram vom Institute for Advanced Study in Princeton hat eindimensionale Computer in Form von zellulären Automaten untersucht. Es ist noch zu früh, um zu sagen, welche Beiträge Leser seiner Broschüre über Gleiterkanonen auf diesem Gebiet möglicherweise gemacht haben, aber ich kann schon einige Reaktionen weitergeben.

Zunächst eine Korrektur: Statt des Automaten mit der Code-Nummer 792 war der mit Nummer 357 gemeint. Ferner war meine Entscheidung, die bereits bekannten universellen linearen Automaten nicht zu erwähnen, eine Unterlassungssünde. Erst wollte ich einen solchen Automaten beschreiben, den Alvy Ray Smith 1970 als Student in den Anfangssemestern erfunden hat. Dann bekam ich jedoch Bedenken, daß die Beschreibung dieses Automaten die Darstellung ungebührlich aufblähen würde; immerhin hat er 18 Zustände ($k = 18$) und eine Drei-Zellen-Nachbarschaft ($r = 1$).

Arthur L. Rubin aus Los Angeles in Kalifornien hat einen vernünftigen Vorschlag zur Definition der Lichtgeschwindigkeit in einem beliebigen linearen Automaten unterbreitet. Rubins Vorschlag korrigiert einen Nachteil einer früheren Definition, in der die Lichtgeschwindigkeit auf eine Zelle pro Zeiteinheit gesetzt wird.

Die alte Definition geht an der Tatsache vorbei, daß diese Geschwindigkeit nicht in allen linearen Automaten erreicht werden kann. Bei der neuen Definition ist die Lichtgeschwindigkeit gleich „der maximalen Ausbreitungsgeschwindigkeit eines Impulses (sagen wir nach rechts)". Die Wellenfront des Impulses wird dadurch definiert, daß rechts von ihr nur Nullen stehen dürfen. Rubin beweist dann, daß die Lichtgeschwindigkeit in dem linearen Automaten mit der Codenummer 792 gleich 1/3 ist.

Im Juli hatte ich auch gefragt, ob es in dem linearen Automaten namens *Welle* eine einseitige Gleiterkanone gebe. Eine solche Kanone würde unendlich viele Gleiter nach rechts schicken, aber keinen nach links. William B. Lipp aus Milford, Connecticut, hat ein bestechend einfaches Argument gegen die Existenz einer solchen Kanone vorgebracht. Er schreibt: „Betrachten Sie ein Muster, bei dem im Verlaufe der Entwicklung links von einer gegebenen Zelle, die wir Zelle 0 nennen, niemals etwas anderes als 0 auftritt. Der am weitesten links stehende Wert, der ungleich 0 ist, muß stets gleich 1 sein. Wäre er gleich 2, so würde sich diese 2 auf ewig nach links bewegen – im Widerspruch zu unserer Annahme, daß links von Zelle 0 immer nur Nullen stehen. Aus dieser am weitesten links stehenden 1 wird jedoch in der nächsten Iteration eine 0, und damit verschiebt sich die linke Grenze des Musters um wenigstens eine Zelle nach rechts."

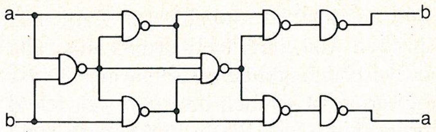

Bild 7: Kreuzungsschaltung mit acht NAND-Gattern.

Demnach wird entweder auch ein Gleiter nach links geschickt, oder die Kanone wird letztlich durch ein Bombardement aus Nullen von links zerstört.

Andere Leser versuchten zu zeigen, daß der Automat *Welle* nicht universell ist. Für manche Automaten kann man beweisen, daß das Halteproblem entscheidbar ist – das ist eine hinreichende Bedingung. *Welle* hält an, wenn in all seinen Zellen nur Nullen stehen; die Stop-Bedingung für irgendeine – darin vielleicht enthaltene – universelle Maschine könnte jedoch ganz anders aussehen.

Mehrere Leser versuchten, universelle lineare Automaten zu konstruieren. Alle Konstruktionen waren recht plausibel, aber Carl Kadie aus East Peoria in Illinois war mit seinem eindimensionalen Automaten nicht zufrieden: Er schlug einen nulldimensionalen Automaten vor. Ein solcher Automat hätte nur eine Zelle; man könnte ihn als Punktautomaten bezeichnen. Lesern mit einer theoretischen Ader macht es vielleicht Spaß, einmal die Universalität eines solchen Punktautomaten zu untersuchen. Kann es einen solchen Automaten geben?

Alvy Ray Smith publizierte seinen Beweis für die Existenz eines universellen linearen Automaten 1971 im „Journal of the Association for Computing Machinery". Man möchte glauben, eine Karriere mit solch einem vielversprechenden Anfang müßte ihn heute in eine berühmte akademische Institution geführt haben. Statt dessen blühte Smith ganz woanders auf: Er ist heute Direktor der Computergraphik-Forschung in der Lucasfilm-Gesellschaft in San Rafael (Kalifornien). In einem künftigen Artikel hoffe ich, über einige der erstaunlichen kinematischen Effekte berichten zu können, die man dort produziert.

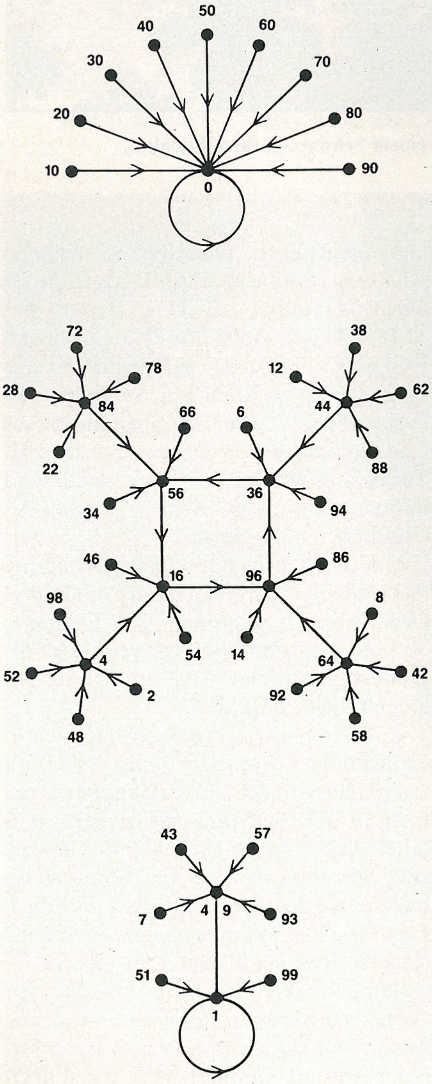

Bild 6: Die sechs Komponenten des Iterationsdiagramms für die Quadratur der natürlichen Zahlen von 0 bis 99.