

GEOMETRIE

Do-it-yourself-Ornamente

Ein Programm zaubert nach Anweisung des Benutzers
Muster mit vorgegebener Symmetrie auf den Bildschirm.

VON CHRISTOPH PÖPPE

Die wenigen Handwerksbetriebe, die noch Textilien im traditionellen Blaudruck verzieren, hüten als besondere Schätze ihre so genannten Model. Das sind Holzklötze mit einem Griff und einer rechteckigen Fläche, aus der ein spezialisierter Handwerker, der Formschneider, das zu druckende Muster herausgeschnitzt hat. Der Färber bestreicht den Model mit einer klebrigen, farbabweisenden Masse, dem Papp, und bestempelt damit den zu färbenden Stoff, sorgfältig ein Rechteck neben das andere setzend, so dass das Tuch am Ende mit lauter Exemplaren des Musters in regelmäßiger Anordnung zugappt ist. Nachdem der Papp getrocknet ist, taucht der Färber das Tuch in den Farbbottich, lässt die Farbe trocknen und wäscht den Papp mit Säure aus. Nur die nicht von der schützenden Masse bedeckten Stellen sind eingefärbt worden.

Die Herstellungstechnik gibt den Mustern eine Eigenschaft mit, die der Mathematiker »Translationsinvarianz« nennt: Verschiebt man das ganze Muster um eine Modelllänge, so geht es wieder in sich selbst über. Und wenn der Stoff breit genug ist, um mehreren Modelreihen nebeneinander Platz zu bieten, dann ist das Muster sogar doppelt translationsinvariant. Dabei darf man die zweite Reihe statt genau in Reih und Glied auch ein Stück versetzt neben die erste stempeln. Man beschreibt das durch zwei Verschiebungsvektoren, die in verschiedene Richtungen weisen und nicht unbedingt senkrecht aufeinander stehen (Bild rechts oben).

Andersherum ausgedrückt: Verschiebung um einen der beiden Vektoren ist eine Symmetrioperation, das heißt eine Bewegung, die das ganze Muster invariant (unverändert) lässt.

Da man solche Operationen beliebig wiederholen kann, ist auch eine Verschiebung um das Doppelte eines Vektors, sein Negatives, die Summe und allgemein jede beliebige Kombination beider Vektoren eine Symmetrioperation. Und schon sind wir bei einer Struktur, die einer ganzen Theorie ihren Namen gegeben hat: Die Menge aller Symmetrioperationen eines Ornaments bildet eine so genannte Gruppe.

Statt von einem Model spricht man in der Gruppentheorie von einem »Fundamentalebene«. Das ist eine Teilmenge der Ebene, deren Ebenbilder unter allen Operationen der Symmetriegruppe die ganze Ebene lückenlos und überlappungsfrei bedecken. Wer also das Muster kennt, das einen Fundamentalebene bedeckt, kennt das ganze Ornament (das man sich als unendlich ausgedehnt vorzustellen pflegt). Übrigens gibt es zu einem Muster nicht »den« Fundamentalebene. Ganz verschieden geformte Mengen können diese Rolle übernehmen; man kann auch einen rechteckigen Model durch einen parallelogrammförmigen ersetzen.

17 Ornamentsorten

Zwei Translationen in verschiedene Richtungen sind nur die Mindestanforderung an ein Ornament. Viele regelmäßige Muster verfügen noch über weit mehr Symmetrien. So ist das bekannte Bienenwabemuster auch invariant gegenüber Drehungen: mit 60 Grad um jeden Sechseckmittelpunkt und mit 120 Grad um jede Ecke. Und da ganz allgemein zwei Symmetrioperationen, hintereinander ausgeführt, wieder eine Symmetrioperation ergeben, gehören auch Drehungen mit Vielfachen von 60 beziehungsweise 120 Grad zum Sortiment.



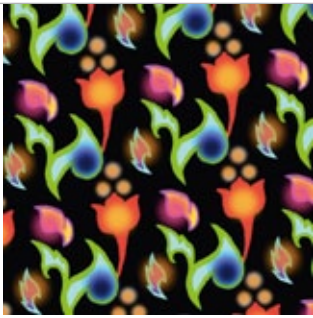
JÜNGER/TEC/GETTY

Ein Ornament geht in sich selbst über, wenn man es mit einem der beiden rot eingezeichneten Translationsvektoren verschiebt. Das gilt auch, wenn man jede der beiden Verschiebungsoperationen mehrfach und/oder mit umgekehrtem Vorzeichen anwendet (blau).

Andere Ornamente beziehen ihren Reiz daraus, dass man sie um gewisse Achsen spiegeln kann. Das sind dann wegen der Translationsinvarianz gleich unendlich viele Spiegelachsen. Weniger bekannt ist die Gleitspiegelung. Man spiegelt das Objekt an einer Achse und verschiebt es anschließend ein Stück entlang derselben Achse.

Solche zusätzlichen Symmetrien müssen sich untereinander und vor allem mit den beiden Translationssymmetrien vertragen. Das schränkt die Zahl der möglichen Kombinationen erheblich ein. So können in einem Ornament keine anderen Drehungen vorkommen als um Vielfache von 60 oder 90 Grad. Insbesondere ist eine fünfzählige Drehsymmetrie mit zwei Translationssymmetrien unvereinbar. Zwei Spiegelungen um nichtparallele Achsen ergeben zusammen eine Drehung um deren Schnittpunkt mit dem Doppelten des Winkels zwischen ihnen. Da dieser Drehwinkel nur bestimmte Werte annehmen darf, unterliegen die Winkel zwischen zwei Spiegelachsen entsprechenden Einschränkungen.

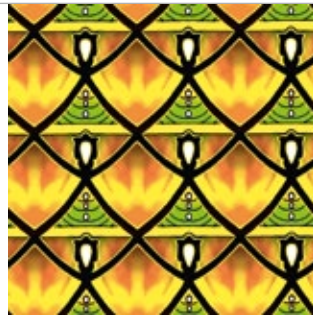
All diesen Einschränkungen zum Trotz gibt es immerhin 17 verschiedene Ornamentarten (Bilder rechts). In der Fachsprache nennt man sie »ebene kristallografische Gruppen«, im Englischen etwas volkstümlicher »wallpaper groups« (»Tapetengruppen«). Eigentlich ist die Theorie nämlich die Domä-



p1: keine weitere Symmetrie



p2: zweizählige Drehung



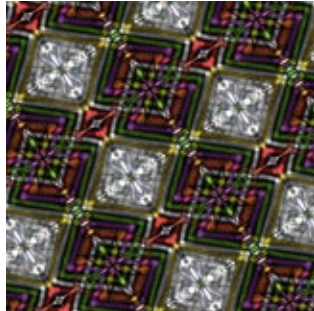
pm: zwei Spiegelachsen ||



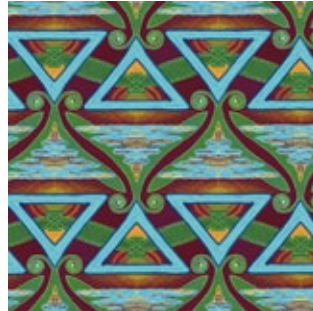
pg: zwei Gleitspiegelachsen ||



cm: Spiegel- und Gleitspiegelachse ||



pmm: zwei Spiegelachsen ⊥



pmg: Spiegel- und Gleitspiegelachse ⊥



pgg: zwei Gleitspiegelachsen ⊥



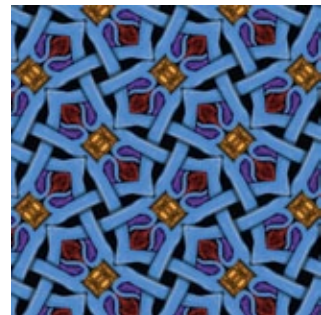
cmm: je zwei Spiegel- und Gleitspiegelachsen ⊥



p4: vierzählige Drehung



p4m: vierzählige Drehung und Spiegelung



p4g: vierzählige Drehung und Gleitspiegelung



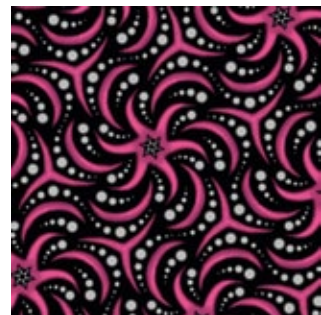
p3: dreizählige Drehung



p31m: drei dreizählige Drehungen, Spiegelung und Gleitspiegelung



p3m1: zwei dreizählige Drehungen, Spiegelung und Gleitspiegelung

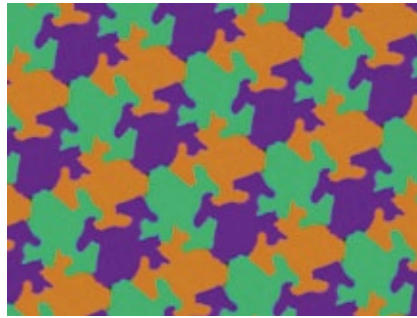


p6: sechszählige Drehung



p6m: sechszählige Drehung und Spiegelung

Die 17 kristallografischen Gruppen, illustriert an Beispielen, die mit dem Programm iOrnament gezeichnet sind. Die Namen der Gruppen folgen der Konvention der International Union of Crystallography. Sie enthalten die Kennung »p« für »primitive« oder »c« für »centered«, eine Zahl für die höchste vorkommende Drehsymmetrie sowie »m« für eine Spiegelung (»mirror symmetry«) und »g« für eine Gleitspiegelung (»glide reflection«). Angegeben sind zu jeder Gruppe nicht immer alle, sondern nur die charakteristischen Symmetrien (über die Translationen hinaus). »Zwei Spiegelachsen« ist verkürzt für »zwei Klassen von (unendlich vielen) Spiegelachsen«, Entsprechendes gilt für die Gleitspiegelachsen. || bedeutet »parallel«, ⊥ »senkrecht aufeinander«.



Durch Herumprobieren bessert der Benutzer eine Form, die der dreizähligen Drehsymmetrie angepasst ist, so lange nach, bis sie als (leicht missgebildeter) Fisch erkennbar ist. In diesem Muster ist jede Drehung mit einem Farbwechsel gekoppelt, mit dem Effekt, dass drei verschiedene Sorten Fische in ihrer jeweils eigenen Richtung das Bild durchschwimmen.



Rosette mit elfzähliger Drehsymmetrie und ebenso vielen Spiegelachsen

ne der Kristallografen. In einem Kristall gibt es Translationsinvarianz, sogar in drei statt nur zwei verschiedenen Raumrichtungen, weil sich gewisse Anordnungen von Atomen in regelmäßigen Abständen wiederholen. Was der Kristall darüber hinaus noch an Symmetrien aufzuweisen hat, das beschreibt seine kristallografische Gruppe, und deren gibt es im Raum nicht nur 17, sondern 230 Stück.

In der Theorie gelten zwei Gruppen schon dann als im Wesentlichen gleich (»isomorph«), wenn sie dieselbe Struktur aufweisen. Die einfachste ebene kristallografische Gruppe namens $p1$ enthält außer den beiden Translationen gar keine Symmetrien. Für ihre Struktur kommt es nicht darauf an, wie die beiden Translationsvektoren in der Ebene liegen und wie lang sie sind. Kommt allerdings eine Drehung um 90 Grad hinzu, müssen sie gleich lang sein und aufeinander senkrecht stehen.

Je nach Symmetriegruppe muss man die Ebene nicht mit ausschließlich parallelverschobenen Kopien eines parallelogrammförmigen Fundamentalbereichs bepflastern; diese kommen vielmehr auch in gedrehter oder gespiegelter Form vor, und der Fundamentalbereich kann dreieckig sein. Wie aber die Kopiervorlage ihrerseits mit Farbe gefüllt wird, darüber sagt die kristallografische Gruppe nichts aus. Vielleicht enthält der Fundamentalbereich nur ein paar gerade Striche, die erst in der Zusammensetzung die Grenzen gewisser Vielecke ergeben. Damit beschreibt die Theorie auch alle Pflasterungen der Ebene mit unendlich vielen Kopien gewisser »Ursteine« aus einem kleinen Sortiment (Spektrum der Wissenschaft 2/2013, S. 64, 4/2008, S. 65, und 7/2007, S. 98) – periodische Pflasterungen, wohlgemerkt, die nichtperiodischen sind ein Thema für sich (Spektrum der Wissenschaft 2/2002, S. 64).

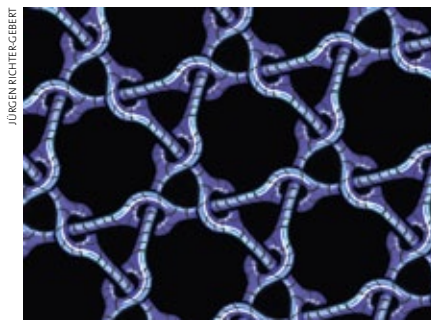
Eine Linie, die genau senkrecht auf eine Spiegelachse auftrifft, findet in ihrem Spiegelbild eine ungeknickte Fortsetzung. Geschickt von Rand zu Rand eines Fundamentalbereichs gezogene Linien werden unter der Aktion der Symmetriegruppe unendlich lang; aus

einem geraden Strich wird ein Fenster, aus einem unscheinbaren Zacken ein Sechserstern, aus einer einfachen gekrümmten Linie eine Blüte. Wer einen Fundamentalbereich bemalt – oder, was fast auf dasselbe hinausläuft, ein Muster in einen Model schnitzt –, dem fällt es nicht leicht, sich vorzustellen, wie sein Werk zum fertigen Ornament vervielfältigt aussieht.

Ornamentprogramm für jedermann

Hier schafft ein Computerprogramm Abhilfe. Jürgen Richter-Gebert, Professor für Mathematik an der Technischen Universität München in Garching, hat eine App namens iOrnament geschrieben, die jede Eingabe des Benutzers als bald nach den jeweils gültigen Ornamentregeln vervielfältigt. Unversehens und für den Anwender zunächst überraschend wird aus dem krummen Strich die Blüte, und jeder Farbfleck taucht kaleidoskopartig in vielen Exemplaren auf dem Bildschirm auf.

Das hilft auch beim Entwerfen regelmäßiger Flächenfüllungen. Man erweitert allmählich einen Fleck zu einer Gestalt eigener Wahl und bekommt auto-



In diesem Ornament (Symmetriegruppe $p3$ ohne Spiegelungen) hat Jürgen Richter-Gebert an Stelle einer Überkreuzung eine Kombination aus Stange und ringförmigem Loch gewählt. Zur Entstehung dieses Musters: <http://youtu.be/Q4QykoETgAo>

matisch angezeigt, wie diese zu ihren Ebenbildern passt (Bild S. 70 oben).

Schon bald nach der Veröffentlichung des Programms haben Benutzer aus aller Welt es nicht nur abgerufen, sondern auch ihre Werke massenhaft an eine vom Autor eingerichtete virtuelle Weltausstellung gesandt. Oftmals scheinen kulturelle Einflüsse bei der Gestaltung der Ornamente durch. Mexikaner malen tendenziell Konturli-

nien, Japaner einfarbig konturiert (oft rot), Koreaner und Thailänder in weichen Farben.

Einige unter den verfügbaren Symmetriegruppen gehören gar nicht zu den kristallografischen: »Rosettengruppen« bestehen nur aus endlich vielen Drehungen um einen Zentralpunkt und möglicherweise dazu passenden Spiegelungen. Die klassischen Realisierungen sind die bekannten großen kreisförmigen Kirchenfenster (Bild S. 70 unten).

Manche Ornamente beziehen ihren Reiz daraus, dass ihnen gewisse Symmetrien, nämlich die Spiegelungen, fehlen. Man zeichne zwei sich kreuzende Striche, von denen einer im Kreuzungspunkt unterbrochen ist und daher als unter dem anderen liegend wahrgenommen wird. Wenn man es geschickt anstellt, macht eine Symmetriegruppe ohne Spiegelungen daraus ein richtiges Flechtwerk aus langen Fäden, deren jeder die anderen streng abwechselnd von oben und von unten kreuzt. Varianten können dem Muster sogar eine räumliche Anmutung verschaffen (Bild oben). ∞

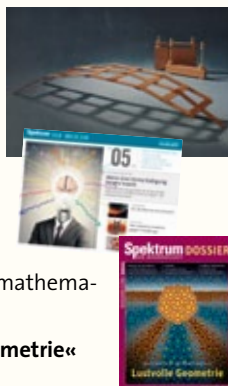
Einladung zum Wettbewerb

Produzieren Sie Ihre eigenen Ornamente und reichen Sie sie zum Wettbewerb ein!



Die App iOrnament wird von Dienstag, 18. Februar, bis Sonntag, 23. Februar, zum kostenlosen Download freigeschaltet (und ist im Übrigen für 0,89 Euro im App-Store verfügbar, Direktlink siehe QR-Code oben rechts). Im Zeitraum 18. Februar bis 31. März können Sie Ihre Ornamente nicht nur an die virtuelle Weltausstellung schicken, sondern zugleich auch zum Wettbewerb einreichen. Ihr Werk erscheint auf der Website www.spektrum.de/ornament, wo auch die Teilnahmebedingungen und weitere Hinweise zu finden sind.

1. Preis: **Leonardo-Brücke**. Aus diesem Bausatz konstruieren Sie ohne Verbindungselemente (Nägel, Schrauben, Leim ...) eine Brücke mit 2,40 Meter Spannweite.
 2. bis 5. Preis: ein Jahresabonnement des digitalen Wochenmagazins »Spektrum – die Woche«
 6. bis 10. Preis: ein Jahresabonnement »Spektrum der Wissenschaft Spezial PMT« (Physik, Mathematik, Technik)
 11. bis 15. Preis: ein Set **Espressotassen** und Untertassen mit mathematischen Motiven
 16. bis 30. Preis: ein »Spektrum«-Sonderheft »Lustvolle Geometrie«
- Die Gewinner werden im Juniheft bekannt gegeben.



DER AUTOR



Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

QUELLE

Grünbaum, B., Shephard, G. C.: Tilings and Patterns. Freeman, New York 1986

WEBLINKS

www.science-to-touch.com/en/iOrnament.html

Die Website zur App iOrnament

www.science-to-touch.com/owe
»Weltausstellung« handverlesener Ornamente, die Benutzer aus aller Welt eingesandt haben

Dieser Artikel im Internet:
www.spektrum.de/artikel/1221331