Perfekte magische Würfel

Für die Verallgemeinerung der magischen Quadrate gibt es aufregende Neuigkeiten. In deutsch-französischer Zusammenarbeit entdeckten ein Lehrer und ein Software-Entwickler einen perfekten magischen Würfel der Ordnung 5 – und mehr.

Von Christoph Pöppe

Wir leben in bewegten Zeiten. Mathematische Entdeckungen purzeln in derart rascher Folge aus dem Computer, dass die Entdecker kaum Zeit finden, sie aufzuschreiben. Noch in der Septembernummer 2003 unserer Schwesterzeitschrift »Pour la Science« erscheint ein Artikel, in dem die Existenz perfekter magischer Würfel der Ordnungen 5 und 6 als ungeklärt dargestellt wird. Aber sein Autor Christian Boyer, Software-Entwickler aus Enghien-les-Bains bei Paris, hat sich bereits im Frühjahr desselben Jahres mit dem Nürnberger Gymnasiallehrer Walter Trump zusammengetan, um nach ebensolchen Würfeln zu forschen. Just am 1. September programmiert Trump, der am Gymnasium Stein Mathematik und Physik unterrichtet, seinen Computer, sich auf die aufwändige Suche nach perfekten magischen Würfeln der Ordnung 6 zu begeben – und ist völlig verblüfft, dass der noch selbigen Tages einen findet!

Damit nicht genug. Bereits am 13. November trägt die gemeinsame Anstrengung von Trump und Boyer eine weitere Frucht, die so prachtvoll ist, dass sie alsbald ihren Weg in die Tagespresse findet: den ersten perfekten magischen Würfel der Ordnung 5 (Bild rechts oben). Und mitten in die Vorbereitungen zu diesem Artikel platzt am 4. Januar dieses Jahres die Nachricht, dass Trump einen fast perfekten magischen Würfel der Ordnung 4 gefunden hat (Bild S. 110). Ganz perfekt ist er nicht – man weiß, dass das unmöglich ist –, aber sein Grad an Perfektion ist bisher unübertroffen.

Magische Würfel sind die voluminösen und kapriziösen Verwandten der magischen Quadrate, jener quadratischen Anordnungen von Zahlen, deren Summe über jede Zeile, Spalte und Diagonale den gleichen Wert – die »magische Konstante« des Quadrats – hat. In der Regel wird von einem magischen Quadrat der Seitenlänge N verlangt, dass es genau die natürlichen Zahlen von 1 bis N^2 enthält. Manchmal lässt man die Zahlen auch von 0 bis N^2-1 laufen, was manche Argumentationen vereinfacht und keinen wesentlichen Unterschied macht: Wenn man zu jeder Zahl eines magischen Quadrats eine Konstante, zum Beispiel 1 oder –1, addiert, ist es so magisch wie zuvor.

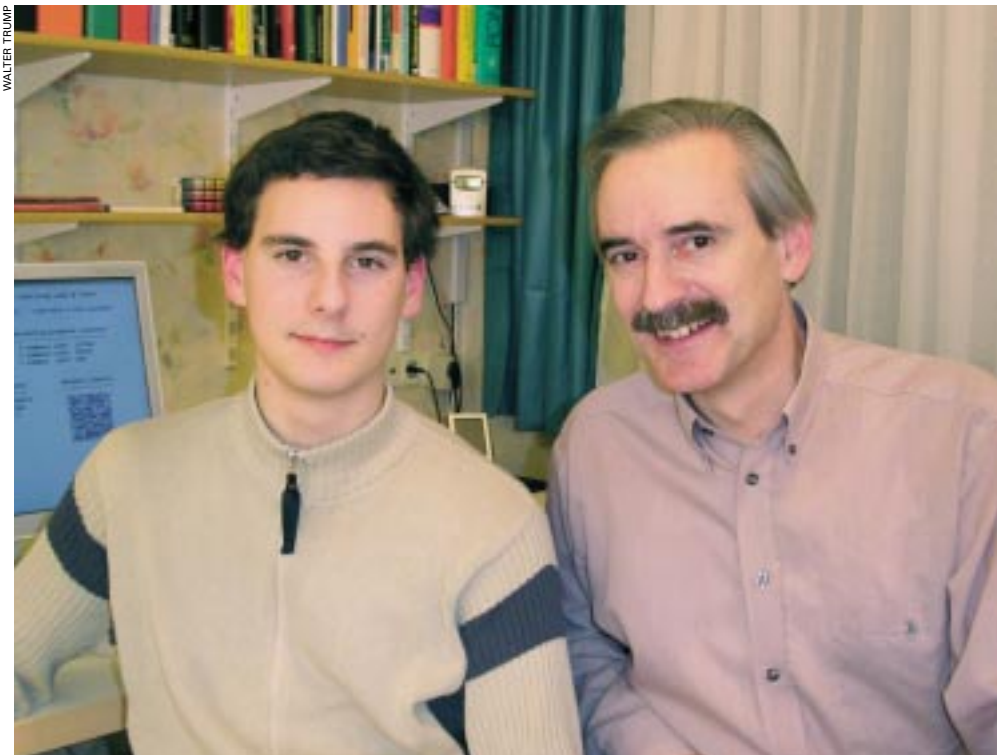
Ein magischer Würfel ist die Verallgemeinerung eines magischen Quadrats auf drei Dimensionen: Man baut einen Würfel aus $N \times N \times N$ kleinen würfelförmigen Klötzchen zusammen. Jedes der Klötzchen trägt eine der Zahlen von 1 bis N^3 (oder von 0 bis N^3-1), und im Prinzip sollte immer dann, wenn N Klötzchen im Würfel auf einer geraden Linie liegen, deren Summe gleich der magischen Konstante sein. Solche geraden Linien verlaufen von links nach rechts (»Zeilen«), von vorn nach hinten (»Spalten«) oder von unten nach oben (»Säulen«); dazu kommen die »kleinen« Diagonalen, die parallel zu einer Flächendiagonale verlaufen, sowie die vier »großen« oder Raumdiagonalen, die jeweils einander gegenüberliegende Eckpunkte verbinden.

Es stellt sich heraus, dass alle diese Forderungen zusammen sehr schwierig zu erfüllen sind. Wenn wirklich alle Summen die magische Konstante ergeben, nennt man den Würfel »perfekt magisch«, während man die Qualitätsbezeichnung »magisch« bereits denjenigen Würfeln zugesteht, bei denen nicht alle kleinen Diagonalen den richtigen Wert haben. Manche Autoren verwenden andere Bezeichnungen.

Die magische Konstante eines Würfels, der aus den Zahlen 1 bis N^3 besteht, muss gleich $N(N^3+1)/2$ sein, denn es gibt N^2 Säulen, deren Summe jeweils gleich der magischen Konstante ist, und zusammen müssen diese Summen gleich der Summe aller Klötzchenzahlen sein; das aber ist die Summe aller Zahlen von 1 bis N^3, und die hat den Wert $N^3\,(N^3+1)/2$. Für einen magischen Würfel der Ordnung 5 ergibt sich die magische Konstante $5 \times 63 = 315$.

Die Gleichungen der Perfektion

Wie viele Bedingungen muss ein Würfel erfüllen, damit er perfekt magisch ist? Es gibt N^2 Säulen und ebenso viele Zeilen und Spalten; das ergibt zusammen $3N^2$ Bedingungen. Man kann den großen Würfel auf drei verschiedene Weisen in Scheiben der Dicke 1 zerlegen. Für einen perfekten Würfel muss jede dieser N Scheiben ein magisches Quadrat sein,



WALTER TRUMP

Walter Trump, Gymnasiallehrer in Nürnberg, und sein Sohn Daniel, auf dessen Computer der erste perfekte magische Würfel der Ordnung 5 gefunden wurde

insbesondere müssen ihre beiden Diagonalen den richtigen Wert ergeben. Das macht zusammen $3 \times 2 \times N = 6N$ kleine Diagonalen; am Ende kommen noch die vier großen Diagonalen dazu. Also haben die N^3 Zahlen im Würfel insgesamt $3N^2 + 6N + 4$ Bedingungen zu erfüllen. Im Falle $N = 5$ sind das 109 Bedingungen für 125 Zahlen, oder eben 109 (lineare) Gleichungen für 125 Unbekannte.

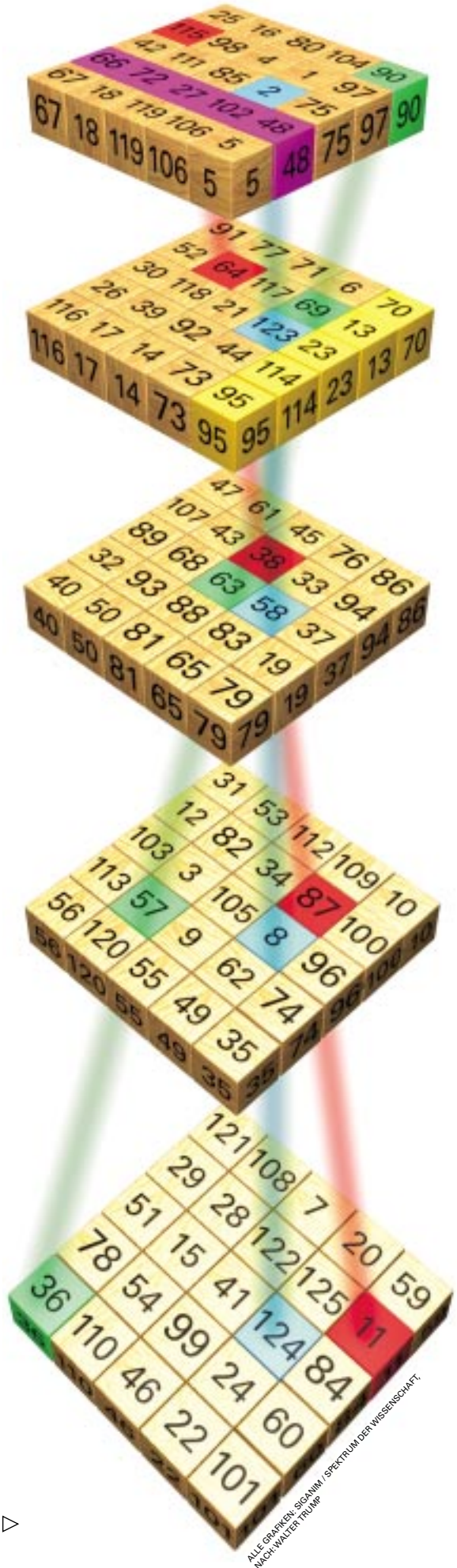
Die Schulweisheit lehrt uns: Je mehr Unbekannte, desto mühsamer ist es, das dichte Geflecht ihrer Beziehungen, sprich der Gleichungen zu entwirren. Aber wenn es mehr Gleichungen sind als Unbekannte, dann ist das System im Allgemeinen überbestimmt und damit gänzlich unlösbar. Demnach sieht es für $N = 5$ ganz gut aus, denn es sind deutlich weniger Gleichungen als Unbekannte. Dagegen hätten für $N = 4$ nur 64 Unbekannte 76 Gleichungen zu erfüllen – zu viele, selbst wenn man berücksichtigt, dass einige dieser 76 Gleichungen entbehrlich sind, da sie schon durch andere ausgedrückt werden.

Diese Überlegungen sind irreführend, denn sie ignorieren den härtesten Teil des Problems: Die Unbekannten müssen nicht nur die Gleichungen erfüllen, sondern voneinander verschieden und sämtlich ganze Zahlen zwischen 1 und N^3 sein. Aber der allgemeine Schluss aus der Schulweisheit bleibt gültig: Je größer der Würfel, desto eher sind magische Eigenschaften erfüllbar. Allerdings wächst auch die Zahl der zu erwägenden Möglichkeiten ins Unermessliche.

Perfekte magische Würfel der Ordnungen 4 und kleiner gibt es nicht. Für die Ordnung 3 gibt es im Wesentlichen vier einfach-magische Würfel (ohne Bedingungen an die kleinen Diagonalen), für die Ordnung 4 bereits schätzungsweise mehrere Billionen. Für die Ordnung 7 gibt es sogar ein konstruktives Verfahren, einen perfekt magischen Würfel zu finden. Der englische Missionar Andrew H. Frost hat es 1866 veröffentlicht.

Es handelt sich um eine Verallgemeinerung des Verfahrens, mit dem der berühmte Leonhard Euler (1707–1783) seine griechisch-lateinischen Quadrate und daraus magische Quadrate konstruierte (Spektrum der Wissenschaft 1/1996, S. 14). Ein lateinisches Quadrat enthält nur die Zahlen von 1 bis N; jede von ihnen kommt N-fach vor, aber nur einmal in jeder Zeile, Spalte und Diagonale. Ein griechisches Quadrat ist im Wesentlichen dasselbe, nur mit den Zahlen $0, N, 2N, \ldots, (N-1)N$. Jedes dieser Quadrate ist bereits magisch, also ergibt sich wieder ein magisches Quadrat, wenn man sie Feld für Feld addiert. Und wenn die beiden Komponenten sehr verschieden gebaut sind, kommt in der Summe jede Zahl zwischen 0 und N^2-1 genau einmal vor. Andrew Frost addierte drei hinreichend verschiedene Würfel der Ordnung 7: einen lateinischen, einen griechischen und einen mit den Vielfachen von $N^2 = 49$.

Leider gibt es für kleinere Ordnungen als 7 keine drei hinreichend verschiedenen lateinischen, griechischen, … Würfel. Deswegen war die Fachwelt allgemein davon überzeugt, dass so kleine perfekte magische Würfel überhaupt nicht existieren – bis Trump und Boyer jüngst das Gegenteil bewiesen.



Dieser Würfel aus 5×5×5 Zahlenklötzchen ist der erste perfekte magische Würfel der Ordnung 5: Die Summe der Zahlen entlang jeder Zeile (eine Beispielzeile ist violett eingefärbt), Spalte (gelb), Säule (hellblau), kleinen Diagonale (rot) und großen Diagonale (grün) ist gleich der magischen Konstante 315.

ALLE GRAFIKEN: SIGANM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH WALTER TRUMP

Der Computer sucht – mit viel Nachhilfe

Das gelang ihnen nicht, indem sie ein neues konstruktives Verfahren fanden, sondern durch Probieren. Nicht die stumpfsinnige Form natürlich; denn die Zahlen von 1 bis 125 irgendwie auf die Plätze des 5×5×5-Würfels zu verteilen und nachzusehen, ob Zeilen-, Spalten-, Säulen- und Diagonalensummen den richtigen Wert haben, ist aussichtslos.

Das Zauberwort heißt »Backtracking«: Man – genauer: der Computer – fülle versuchsweise einen Platz nach dem anderen mit einer Zahl aus dem Vorrat. Sowie aus einer Fünferreihe vier Plätze besetzt sind, ist der Wert des fünften erzwungen. Wenn diese Zahl nicht kleiner als 1, nicht größer als 125 und noch verfügbar ist, setze man sie ein. Das füllt möglicherweise den vierten Platz einer anderen Fünferreihe, wodurch eine weitere Belegung erzwungen wird, und so weiter. Wenn eine erzwungene Zahl zu groß, zu klein oder schon vergeben ist, fange man nicht wieder ganz von vorne mit Probieren an. Vielmehr vollführe ▷

Dieser von Trump entdeckte magische Würfel der Ordnung 4 kommt der Perfektion so nahe wie kein anderer zuvor. Die Summe über jede Zeile, Spalte, Säule und kleine Diagonale beträgt 130; nur die großen Diagonalen weichen von dieser magischen Konstante ab, auf symmetrische Weise: 100, 120, 140 und 160.

▷ man einen geordneten Rückzug (daher der Name *backtracking*): Man widerrufe nur den letzten Schritt mit all seinen unmittelbaren Konsequenzen und probiere an dessen Stelle einen anderen. Erst wenn auf dieser Stufe alle Möglichkeiten erschöpft sind, widerrufe man auch den vorletzten Schritt und so weiter. Durch diese »Wiedereinsetzung in den vorigen Stand« muss man den Aufwand, den man bis zu diesem Stadium getrieben hat, nicht verloren geben.

Backtracking allein senkt allerdings den Aufwand noch nicht auf eine erträgliche Größe. Man muss obendrein die Würfelchen in der richtigen Reihenfolge mit Probierzahlen besetzen. Das Prinzip lautet: »Die schwierigsten Plätze zuerst.« Dabei ist ein Platz umso schwieriger, je mehr Linien sich in ihm treffen. In einem Eckplatz treffen sich sieben Linien (drei gerade, drei schräge und eine ganz schräge, die Raumdiagonale). Eine Besetzung dieses Platzes vermindert die Möglichkeiten für die weiteren Probierschritte – und damit den Suchaufwand – weit wirksamer als eine Festlegung an einer Stelle, die nur von den üblichen drei geraden Linien getroffen wird.

Der in diesem Sinne schwierigste Platz ist der genau in der Mitte, denn dort treffen sich volle dreizehn Linien: drei gerade, sechs schräge und vier ganz schräge. Den muss man unter allen Umständen zuerst besetzen, und das ist in diesem Fall sogar ganz einfach. Mit ein wenig Theorie kann man beweisen, dass in einem perfekten magischen Fünferwürfel auf den zentralen Platz die zentrale Zahl kommen muss, das heißt die Zahl in der Mitte der Folge von 1 bis 125: die 63.

Ein weiteres nützliches Prinzip trägt den Namen Assoziativität (auch wenn es mit dem Assoziativgesetz nichts zu tun hat). Zu jedem Platz in einem Würfel gibt es den eindeutig bestimmten Platz, der genauso weit entfernt vom Mittelpunkt des Würfels liegt wie er selbst, aber genau gegenüber. Ein magischer Würfel ist besonders symmetrisch, wenn die Zahlen auf diesen beiden Plätzen in jedem Fall komplementär sind, das heißt sich zu N^3+1 ergänzen. Ein magischer Würfel mit dieser Eigenschaft heißt assoziativ. Viele Konstruktionsverfahren für magische Quadrate und Würfel sind so gebaut, dass das Ergebnis automatisch assoziativ ist.

Für den Würfel der Ordnung 5 ist $N^3+1=126$, und der Platz im Zentrum des Würfels liegt sich selbst gegenüber; es passt also zur Assoziativität, dass dieser Platz die 63 tragen muss.

Der Weg, auf dem Trump und Boyer schließlich zum Erfolg gelangten, ist erfrischend antiautoritär: Er bestand darin, alle diese guten Ratschläge aufzugreifen – und dann einige von ihnen gezielt zu missachten. Ja, sie setzten in die Mitte die 63; es geht ja nicht anders. Sie suchten auch im Prinzip nach assoziativen Würfeln; aber sie bestanden nicht darauf, dass am Ende jedes Paar gegenüberliegender Plätze mit komplementären Zahlen gefüllt wird. Und sie besetzten nicht als Nächstes die Eckplätze oder auch nur die ebenso schwierigen restlichen Plätze auf den Raumdiagonalen.

Vielmehr umgaben sie den »harten Kern« – die 63 in der Mitte – zunächst mit einem »weichen Kern«, sprich mit einem Hilfswürfel der Größe $3\times3\times3$, der zwar nicht magisch, aber assoziativ sein musste. Insbesondere war innerhalb des weichen Kerns die Summe entlang aller dreizehn Linien durch den Mittelpunkt gleich 189. Durch zahlreiche weitere notwendige Bedingungen konnte die Anzahl der Hilfswürfel auf einige Millionen begrenzt werden – nichts, was heute noch einen PC ernsthaft schrecken könnte.

Um den weichen Kern legten sie dann, wieder mit Probieren und Backtracking, die »Schale« aus allen Würfelchen, die von außen sichtbar sind. Das sind immerhin 98 Stück im Vergleich zu den 26 des weichen Kerns. Zum Probieren ließen sie insgesamt fünf PCs teilweise rund um die Uhr laufen.

Allmählich tröpfelten Lösungen aus den Computern, bei denen 28 der 30 kleinen Diagonalen die richtige Summe hatten. Ungefähr eine von tausend so gefundenen Lösungen sollte nicht nur 28, sondern 30 richtige Diagonalen haben und damit perfekt sein; diese Abschätzung hatten Trump und Boyer aus theoretischen Überlegungen gewonnen. Nach einigen Wochen und mehr als 1500 fast perfekten Würfeln drohte sie allmählich der Mut zu verlassen. Da erzählte beiläufig Trumps zwanzigjähriger Sohn Daniel, der sich sehr für Computer, aber nicht für magische Würfel interessiert, sein PC habe eine perfekte Lösung gefunden! ◁

Christoph Pöppe ist Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

Les cubes magiques. Von Christian Boyer in: Pour la Science, September 2003, S. 90

Les premiers carrés tétra et pentamagiques. Von Christian Boyer in: Pour la Science, August 2001, S. 98

Magic cubes: new recreations. Von William H. Benson und Oswald Jacoby. Dover, New York 1981

A breakthrough in magic squares, and the first perfect magic cube. Von Martin Gardner in: Mathematical Games, Scientific American, Januar 1976, S. 118

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.