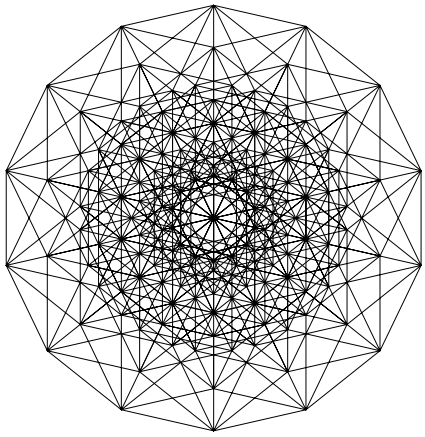


Strick-Muster und der Einheitswürfel im $\mathbb{R}^5$

Geschickt gedreht und beleuchtet, erhellt ein Gebilde aus dem fünfdimensionalen Raum die Geometrie ebener Pflasterungen.

Von Christoph Pöppe

Es fängt ganz hausbacken an: Man entdeckt vielleicht durch Zeichnen, dass man ein regelmäßiges Zehneck auf dekorative Weise mit Rauten (Rhomben) auslegen kann. Eine Raute hat vier gleich lange Seiten, und diese Seitenlänge ist für alle beteiligten Rauten die gleiche, nämlich die Seitenlänge des Zehnecks. Fünf schmale Rauten mit dem Öffnungswinkel 36 Grad säumen den Rand des Zehnecks und lassen einen etwas dicklichen Seestern in der Mitte frei, der genau von fünf dicken Rauten mit dem Öffnungswinkel 72 Grad gefüllt wird (Bild unten).

Ist das eine Spezialität des Zehnecks? Keineswegs. Man kann jedes regelmäßige Vieleck, das eine gerade Anzahl von Ecken hat, mit einem geeigneten Sortiment von Rauten füllen – wenn auch nicht immer in zentralsymmetrischer Weise. Beim Zwölfeck kommen drei verschiedene Sorten Rauten mit den Öffnungswinkeln 30, 60 und 90 Grad zum Einsatz; die 90-Grad-Raute ist besser unter dem Namen Quadrat bekannt.

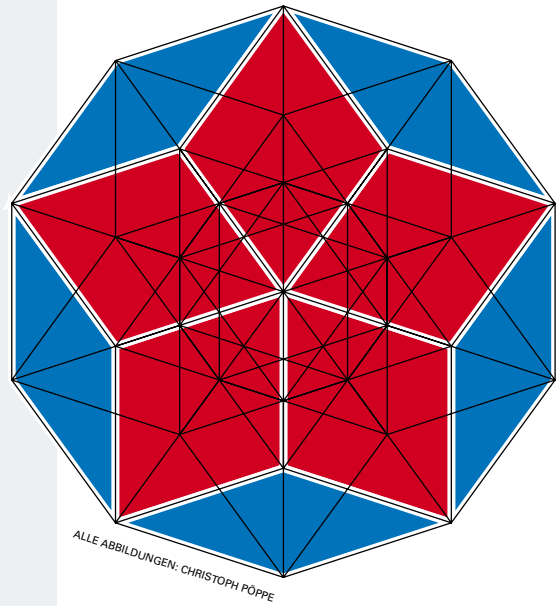
Die schmalste Raute hat stets den Öffnungswinkel 360 Grad geteilt durch die Eckenzahl; alle weiteren Öffnungswinkel sind ganzzahlige Vielfache dieses Basiswinkels. Für das Vierzehneck beträgt demnach der kleinste Öffnungswinkel 360/14 = 180/7 Grad, was eine krumme Zahl ist; weitere Rauten haben den doppelten, dreifachen, vierfachen … Winkel. Aber die Raute mit dem vierfachen Winkel ist dieselbe wie die mit dem dreifachen; denn der spitze und der stumpfe Winkel einer Raute ergänzen sich zu 180 Grad, und wenn der spitze Winkel gleich $(3/7)\cdot 180$ Grad ist, muss der stumpfe gleich $(4/7)\cdot 180$ Grad sein.

Heinz Klaus Strick, Leiter des Landrat-Lucas-Gymnasiums in Leverkusen-Opladen und Mathematiker, hat im vorletzten Jahr bei einer großen Mathematikausstellung in seiner Schule zahlreiche Rauten in Größen, die auf Zehn-, Zwölf- oder Vierzehnecke angepasst waren, für das Publikum zum Spielen bereitgelegt. (Natürlich hilft es, wenn unter den ortsansässigen Unternehmen ein zum Sponsoring bereiter Kunststoffhersteller ist.) Und siehe da: In die Vielecke mit der Eckenzahl $2n$ passen die Rauten auf sehr viele verschiedene Weisen. So können sich zum Beispiel $n-1$ Rauten der schmalsten Größe wie die äußeren Blätter einer Artischocke um den tiefsten Punkt des Vielecks scharen; aus diesem Kelch wächst dann eine prachtvolle Blüte – farbenfroh, wenn die Rauten verschiedener Sorten von verschiedener Farbe sind (Bild oben, rechts).

Kleiner Ausflug in die *n*-te Dimension

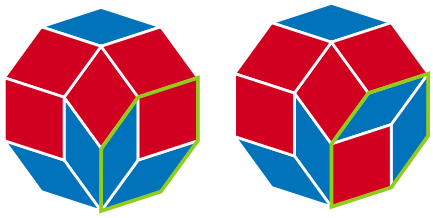
Weniger regelmäßige Muster gibt es in unüberschaubarer Anzahl; immerhin haben Stricks Schüler sie für das Zehneck im Rahmen einer Projektarbeit vollständig klassifiziert und die Beziehungen zwischen ihnen dokumentiert. Dabei finden sich immer wieder Sechsecke aus – zum Beispiel – zwei dünnen und einer dicken Raute, die man nur um 180 Grad drehen und wieder einsetzen muss, um aus einem Muster ein anderes zu machen (grün umrandetes Sechseck im Bild links).

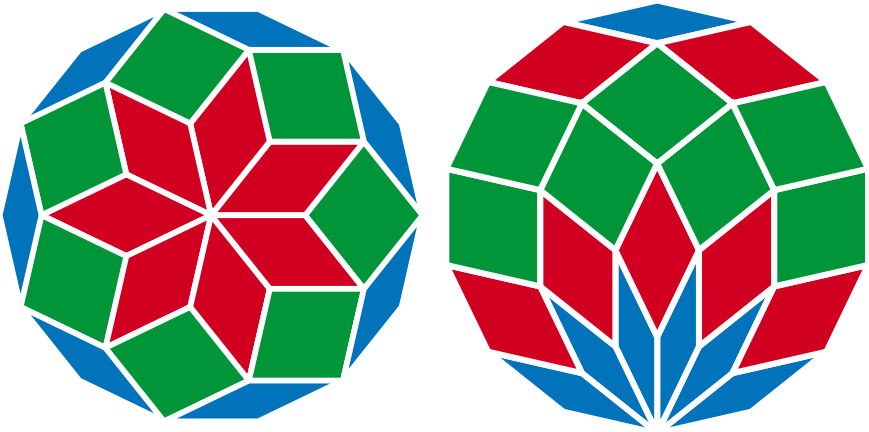
Einen adlergleichen Überblick über diese Muster gewinnt man, indem man von den zwei Dimensionen der Tischplatte, auf der sich bisher alles abspielte, zu einer höheren Warte übergeht. Dabei muss man keine besonders große Entfernung zurücklegen, aber sich doch in Räume begeben, in denen man sich nicht unbedingt zu Hause fühlt: den fünfdimensionalen Raum ($\mathbb{R}^5$) für das Zehneck, den $\mathbb{R}^7$ für das Vierzehneck und allgemein den $\mathbb{R}^n$, den n-dimensionalen Raum, für das $(2n)$-Eck.



ALLE ABBILDUNGEN: CHRISTOPH PÖPPE

Füllung des regelmäßigen Zehnecks mit dicken und dünnen Rauten in zentralsymmetrischer (links) und Artischockenanordnung. Das linke Bild zeigt zusätzlich die Kanten des fünfdimensionalen Würfels in einer Projektion auf die Ebene. Alle Rauten-Füllungen des Zehnecks müssen diesen schwarzen Linien folgen. Aus einer Füllung macht man eine neue, indem man ein Sechseck aus drei Rauten (grün umrandet) umdreht.





Der siebendimensionale Hyperwürfel (links die Projektion seiner Kanten) liefert das Schema für Füllungen des Vierzehnecks.

Ich gebe zu, es ist mühsam, sich in Räumen mit mehr als drei Dimensionen zurechtzufinden. In den letzten beiden Folgen habe ich Sie mit den Besonderheiten des Lebens im $\mathbb{R}^4$ vertraut zu machen versucht und einen scheuen Ausblick in den $\mathbb{R}^5$ gegeben. Aber wenn man sich erst einmal daran gewöhnt hat, dass die uns geläufige Anschauung sich auf die Krücken des abstrakten Formalismus stützen muss, fällt das Laufen nicht mehr so schwer.

Ab der fünften Dimension ist es auch vorbei mit der Vielfalt der platonischen Körper, auf die meine Freundinnen aus der vierten Dimension so stolz waren. In jeder Dimension gibt es deren nur noch drei, und in unserem Zusammenhang interessiert uns von ihnen nur einer: der so genannte Hyperwürfel. Es handelt sich um die Verallgemeinerung unseres vertrauten Würfels, und die Krücken, auf denen man sich ihm nähert, heißen Koordinaten.

Unser gewöhnlicher $\mathbb{R}^3$ ist mit einem Koordinatensystem ausgestattet. Das heißt, von einem Nullpunkt aus gehen die drei Koordinatenachsen (x-, y- und z-Achse) in zueinander senkrechten Richtungen ab. Um uns unnötige Schwierigkeiten zu ersparen, setzen wir den gewöhnlichen Würfel so bequem wie möglich in den $\mathbb{R}^3$, und zwar mit einer Ecke in den Nullpunkt; die drei von dieser Ecke ausgehenden Kanten verlaufen entlang der Koordinatenachsen und haben die Länge 1. Dann nämlich sind die Koordinaten sämtlicher Würfelecken sehr einfach: (0, 0, 0), (0, 0, 1), … und so weiter, sodass jede beliebige Kombination von Nullen und Einsen vorkommt.

Mit dem Hyperwürfel verfahren wir genauso. Eine Ecke sitzt im Nullpunkt des n-dimensionalen Koordinatensystems. Von ihr gehen n Kanten der Länge 1 aus, die entlang den n Koordinatenachsen verlaufen und sämtlich aufeinander senkrecht stehen.

Ja – das ist die Stelle, an der die Anschauung aussetzt. Aber vertrauen Sie den algebraischen Krücken! Wir können uns die Ecken zwar nicht mehr vorstellen, aber ihre Koordinaten mühelos hinschreiben: Es sind wie zuvor sämtliche Kombinationen von Nullen und Einsen. Nur braucht ein Punkt – zum Beispiel – im $\mathbb{R}^5$ zu seiner Beschreibung fünf Koordinaten. Da darf man sich nicht wundern, wenn der fünfdimensionale Hyperwürfel stolze 32 ($= 2^5$) Ecken hat.

Nicht nur das: Er wird seinerseits von zehn Viererwürfeln begrenzt. Dabei muss man sich klar machen, dass für einen Fünfdimensionalen etwas Vierdimensionales schon sehr dünn ist, so wie wir die ebenen Begrenzungsflächen eines (Dreier-)Würfels für dünn halten. Die gemeinsame Grenze zweier Viererwürfel ist ein – noch dünnerer – Dreierwürfel, und so weiter. Dick oder dünn ist da eine Frage der eigenen Dimensionalität.

Der Schatten des $\mathbb{R}^5$-Würfels …

Damit nun dieses umfängliche Gebilde zu Stricks Rautenmustern etwas beitragen kann, beleuchten wir es mit diffusem, parallelem Licht so, dass es einen Schatten auf die Tischebene wirft. Dabei fällt das Licht parallel zur Verbindungsgeraden der beiden gegenüberliegenden Ecken (0, 0, …, 0) und (1, 1, …, 1) ein, und die Tischebene liegt senkrecht zum Lichteinfall.

Beim gewöhnlichen (Dreier-)Würfel wäre damit bereits festgelegt, was geschieht. Der Würfel steht auf einer Ecke, seine gegenüberliegende Ecke schwebt genau darüber, und das Ganze wird von oben beleuchtet. Dabei ergibt sich als Schatten ein Sechseck, in dem sowohl die drei oberen Flächen als auch die drei unteren als Rauten erscheinen (siehe die »Mathematischen Unterhaltungen« im Dezemberheft 2004, S. 106).

Was eine Beleuchtung mit parallelem Licht im $\mathbb{R}^5$ sein soll, ist weitaus weniger klar. Ganz abgesehen von den praktischen Schwierigkeiten, eine Glühbirne in einen höherdimensionalen Raum zu bringen und dort mit Strom zu versorgen: Es gibt sehr viel mehr Richtungen, die alle für sich beanspruchen können, parallel zu einer bestimmten Geraden zu sein. Glücklicherweise müssen wir uns um solche Probleme überhaupt nicht kümmern. Die algebraischen Krücken tun hier gute Dienste.

Zweckmäßig nennt man den Punkt, auf den der Schatten des Nullpunkts fällt, auch den Nullpunkt der Tischebene. Es genügt dann anzusagen, auf welche Punkte der Ebene die Schatten der Eckpunkte fallen, die mit dem Nullpunkt durch genau eine Kante verbunden sind; diese Punkte sind genau das, was man die Koordinaten-Einheitsvektoren nennt.

Wenn man weiß, auf welche Punkte diese Einheitsvektoren abgebildet werden – das heißt auf welche Punkte ihr Schatten fällt –, kann man nämlich das Bild jedes beliebigen Punkts ausrechnen. Denn unsere Schatten-Abbildung ist eine so genannte lineare Abbildung. Formal wird das durch die Gleichungen $f(x+y) = f(x) + f(y)$ und $f(ax) = af(x)$ ausgedrückt. Anschaulich heißt das: Wenn vier Vektoren »oben« im $\mathbb{R}^5$ ein Parallelogramm bilden, dann tun ihre Schatten »unten« im $\mathbb{R}^2$ das auch.

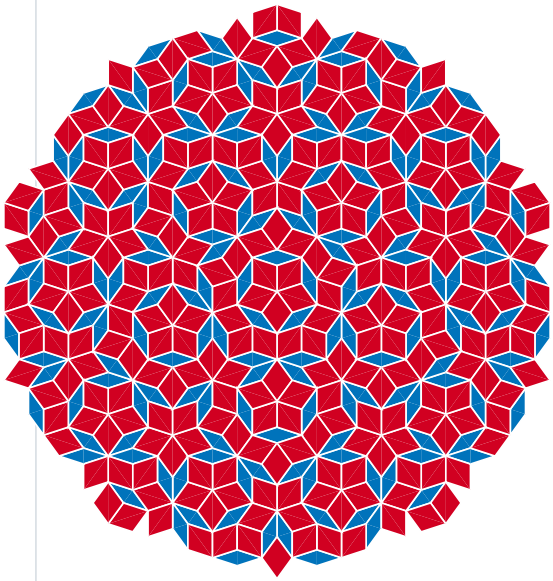
Will man nun das Bild eines beliebigen Punkts bestimmen, dann zerlegt man den Vektor, der vom Nullpunkt zu diesem Punkt geht, in eine Summe von Vektoren, die in Richtung der Einheitsvektoren verlaufen, und nutzt die Gleichungen für die Linearität. Anschaulich gesprochen: Wir legen vom Nullpunkt zu unserem abzubildenden Punkt eine Kette von Parallelogrammen, von der jedes Glied in Richtung eines Einheitsvektors weist. Die entsprechende Parallelogrammkette auf der Tischfläche führt uns zu unserem gesuchten Bildpunkt. ▷

▷ Und wohin sollen nun die fünf Einheitsvektoren abgebildet werden? Wenn es hinterher gut aussehen soll, ist »so symmetrisch wie möglich« immer ein gutes Rezept. Das heißt in diesem Fall: Man bilde die Einheitsvektoren auf die Ecken eines regelmäßigen Fünfecks ab, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Aus den Würfelkanten, die vom Nullpunkt des $\mathbb{R}^5$ ausgehen, werden also die Vektoren, die vom Nullpunkt der Tischebene aus auf die Ecken des Fünfecks weisen. Wie die Einheitsvektoren selbst sind deren Bilder unter unserer Projektion untereinander alle gleich lang.

Damit sind nun alle Zutaten für die »Strick-Muster« beisammen. Denn der Fünferwürfel enthält zahlreiche Quadrate; die begrenzen nämlich die Dreierwürfel, welche die Viererwürfel begrenzen, welche den Fünferwürfel begrenzen. Quadrate sind insbesondere Parallelogramme. Also findet man als Schatten der Quadrate lauter Parallelogramme wieder. Es sind sogar Rauten, denn die Bilder aller Einheitsvektoren sind gleich lang. Der Öffnungswinkel der Rauten beträgt 72 Grad oder ein Vielfaches davon, denn das sind die Winkel der Fünfecksvektoren untereinander. Da 144 Grad der stumpfe Winkel der Raute mit dem spitzen Winkel 36 Grad ist und alle weiteren Vielfachen von 72 Grad nichts Neues bringen, kommen in dem Schatten des Fünferwürfels genau die dicke und die dünne Raute vor, die ich eingangs beschrieben habe.

Mehr noch: Stellen wir uns jetzt vor, der Fünferwürfel wäre nicht ein Kantenmodell aus Draht, sondern massiv, und es wären deswegen in der Projektion nur die Teile sichtbar, die unserer Bildebene am nächsten liegen und nicht durch andere Teile verdeckt werden. Dafür ist die Idee vom Schatten nicht mehr erhellend; vielmehr müssen wir uns vorstellen, nicht die Richtung des Lichts, sondern unsere Blickrichtung verlaufe in der beschriebenen, speziellen Weise in den $\mathbb{R}^5$, und wir könnten dort den Fünferwürfel selbst betrachten – natürlich in perspektivischer Verzerrung, denn von den zahlreichen Quadraten, die in ihm enthalten sind, ist keines genau uns zugewandt.

Offensichtlich sehen wir bei diesem Blick in den $\mathbb{R}^5$ lauter Quadrate, die aneinander grenzen, aber nie solche, die sich überlappen oder Lücken zwischen sich lassen. Dasselbe gilt für deren Bilder, die Rauten, in der Ebene.



Penrose-Parkettierung

… ist ein Zehneck

Der äußere Umriss des Bilds vom Fünferwürfel muss ein regelmäßiges Zehneck sein. Warum? Das Original ist konvex, das heißt: Auf der geraden Verbindungslinie zwischen zwei Punkten des Fünferwürfels liegt kein Punkt, der nicht auch zum Fünferwürfel gehörte. Da durch die Projektion die gerade Verbindungslinie zweier Punkte auf die gerade Verbindungslinie ihrer Bildpunkte abgebildet wird, muss auch das Bild insgesamt konvex sein. Aus demselben Grund muss der Rand des Gesamtbilds aus Bildern von Kanten bestehen.

Der Original-Fünferwürfel hat eine fünfzählige Symmetrie bezüglich zyklischer Vertauschung der Einheitsvektoren (ersetze den ersten durch den zweiten, den zweiten durch den dritten, … den letzten durch den ersten); also muss auch sein Bild wegen der speziellen Wahl der Bilder der Einheitsvektoren fünfzählig symmetrisch sein. Alle Kanten des Fünferwürfels sind zu einer der Einheitsvektor-Kanten parallel, also müssen die Kanten des Bilds sämtlich parallel zu einer der fünf Einheitsrichtungen sein. Schließlich lässt sich – mit etwas mehr Mühe – zeigen, dass Bild und Urbild auch um 180 Grad drehsymmetrisch sein müssen; und dann bleibt nur noch das Zehneck.

Man kann den Fünferwürfel auch partiell demontieren. Nimmt man ihm einen der zahlreichen ihn begrenzenden Dreierwürfel weg, so entsteht noch kein richtiges Loch; so ein Dreierwürfel ist ja sehr dünn vom fünfdimensionalen Standpunkt aus. Aber wir sehen statt seiner drei »außen gelegenen« Flächen jetzt die »innen gelegenen«. Dadurch wird das Sechseck, das die Außenkontur vom Bild des Würfels lieferte, nicht mehr auf die eine, sondern auf die andere Weise in Rauten zerlegt. Auch beim geringfügig demontierten Fünferwürfel ist das Bild also eine der Füllungen des Zehnecks mit Rauten, die Heinz Klaus Strick mit seinen Schülern erarbeitet hat. Das Wegnehmen eines Würfels entspricht genau dem Umdrehen eines Sechsecks.

Projiziert man das Kantenmodell des Fünferwürfels in die Ebene (Bild S. 106, links), so findet man alle Linien, entlang denen eine Füllung des Zehnecks mit Rauten verlaufen kann. Auch das Artischockenmuster ist darunter; es geht nicht anders. Denn jeder Eckpunkt des Zehnecks ist das Bild eines Fünferwürfel-Eckpunkts. Von ihm gehen, wie von jedem anderen Eckpunkt des Fünferwürfels, fünf Kanten aus, deren Bilder wir im Zehneck wiederfinden müssen. Da sie aber alle im Inneren des Zehnecks liegen müssen, bleibt ihnen gar nichts anderes übrig, als im spitzestmöglichen Winkel zueinander zu liegen. Das ergibt die äußersten Blätter der Artischocke.

Was ich bisher am Beispiel des $\mathbb{R}^5$ und des Zehnecks erläutert habe, gilt in genau derselben Weise für andere Dimensionen. So beweist man durch einen Ausflug in den $\mathbb{R}^7$, dass es zentralsymmetrische, artischockenartige und zahlreiche andere Rautenfüllungen des regelmäßigen Vierzehnecks geben muss. Indem man für die konkrete Zahl 5 oder 7 die allgemeine Variable n einsetzt, erledigt man die ganze Denkarbeit für alle Dimensionen auf einen Streich.

Für geradzahlige n, das heißt, die Eckenzahl $2n$ des Vielecks ist durch 4 teilbar, gibt es eine weitere Klasse von Mustern, darunter auch zentralsymmetrische. Bei ihnen ist die Seitenlänge der Raute gleich der halben Seitenlänge des Vielecks.

Zugegeben: Man kann diese und weitere Eigenschaften der Strick-Muster auch finden – wenn auch weit weniger elegant –, indem man beim Argumentieren »auf dem Teppich«, sprich in der zweidimensionalen Ebene, bleibt. Lohnt es denn wirklich, dafür die Reise in höherdimensionale Welten zu unternehmen, die doch beim ersten Mal ziemlich beschwerlich ist?

Ich würde sagen: Schon aus touristischen Gründen sollte man sich einen Besuch in einem höheren $\mathbb{R}^n$ nicht entgehen lassen. Es gibt dort einfach unglaubliche Dinge, die einem zu Hause im $\mathbb{R}^3$ nicht im Traum in den Sinn gekommen wären. Für die professionellen Mathematiker gehört das Arbeiten mit abstrakten Vektoren, die mehr als drei Komponenten haben, ohnehin zum Alltagsgeschäft.

Von *n*-Eck-Puzzles zu Penrose-Parkettierungen

Manchmal verschafft einem der Ausflug in die höheren Dimensionen sogar Einsichten über Zweidimensionales, die man dortselbst beim besten Willen nicht gewinnen kann. Man nehme nicht nur einen Fünferwürfel, sondern deren beliebig viele. Wie ihre mickrigen Kollegen aus dem $\mathbb{R}^3$ lassen sie sich raumfüllend und lückenlos zu beliebig ausgedehnten Türmen stapeln. Im $\mathbb{R}^5$ ist, wie nicht anders zu erwarten, der Verbrauch an Bauklötzen höher, denn jeder Würfel hat wesentlich mehr als sechs Nachbarn, die mit ihm zumindest eine Fläche gemeinsam haben.

Das Projektionsbild eines solchen Würfelstapels besteht aus Zehnecken, die sich teilweise überlappen; denn in der von uns gewählten schrägen Perspektive sind die Würfel nicht säuberlich getrennt. Es kommen aber nach wie vor nur die gewohnten dicken und dünnen Rauten vor. Wir gewinnen also eine Pflasterung, das heißt eine lückenlose, überlappungsfreie Überdeckung der Ebene mit dicken und dünnen Rauten. Je nachdem, wie wir unseren Stapel im $\mathbb{R}^5$ bauen, hat diese Pflasterung sehr interessante Eigenschaften. So lassen sich insbesondere die berühmten Penrose-Parkettierungen mitsamt ihren Quasikristall-Eigenschaften aus einer geschickt gewählten Würfelstapelung im $\mathbb{R}^5$ herleiten (Bild links; siehe auch Spektrum der Wissenschaft 2/2002, S. 64). ◁

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Von Penrose-Parkettierungen zu *n*-Eck-Puzzles. Von Heinz Klaus Strick in: Praxis der Mathematik, Bd. 44, Nr. 3, S. 105, 2002

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

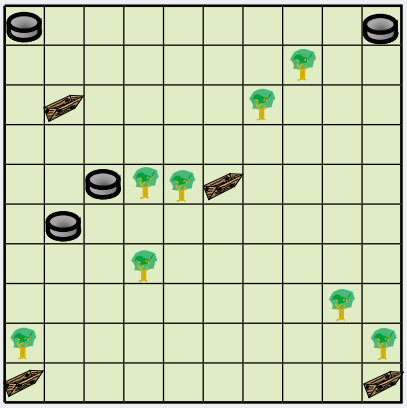
PREISRÄTSEL

Jans zerstrittene Herde

Von Roland Mildner

Bauer Jan möchte seinen vier zerstrittenen Milchkühen vier getrennte, aber in sich zusammenhängende und zueinander kongruente Weideflächen abstecken. Dabei möchte er die Zäune ausschließlich auf den vorgegebenen Linien ziehen. Auf jeder Weide sollen ein Brunnen, zwei Bäume zum Reiben und ein Trog mit Kraftfutter stehen.

Wie kann Jan die Weide für seine zerstrittene Herde einteilen?



Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir einen Globus »Globus 4 Kids«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 15. Februar 2005, eingehen.

Lösung zu »Kindergeburtstag« (Dezember 2004)

Die zehn möglichen Kombinationen der Kuchenstücke sind in der Tabelle unten eingetragen.

A	1	4	8	3	12	7	2	11	6	1
B	1	3	2	6	1	5	9	4	8	12
C	12	8	6	6	4	4	4	2	2	2

Heinrich Biener aus Weilheim zeigte, wie sich dieses Problem auch »zu Fuß«, das heißt ohne Einsatz eines Computerprogramms lösen lässt:

a, *b* und *c* sind die Stückzahlen der Kuchensorten A (zum Preis von 0,80 Euro), B (1,– Euro) und C (1,10 Euro). Aus der Bedingung, dass die Gesamtsumme genau 15 Euro betragen muss, ergibt sich die Gleichung

$$0{,}8\,a + 1\,b + 1{,}1\,c = 15,$$

die durch Multiplikation mit 10 in die folgende diophantische Gleichung (nicht nur die Konstanten, auch die Lösungen müssen ganze Zahlen sein) übergeht:

$$8\,a + 10\,b + 11\,c = 150$$

Man ziehe auf beiden Seiten der Gleichung 11 *c* ab und dividiere durch 2:

$$4\,a + 5\,b = (150 - 11\,c)/2$$

Aus dieser Gleichung lassen sich zwei Dinge schließen:

- Da *a* und *b* mindestens 1 sind, ist

$$9 \le (150 - 11\,c)/2 \text{ und damit } c \le 12.$$

- Da $4\,a + 5\,b$ eine natürliche Zahl ist, muss $150 - 11\,c$ gerade sein und folglich auch *c*.

Für *c* kommen deshalb nur 2, 4, 6, 8, 10 und 12 in Frage. Für jeden dieser Werte gewinnt man aus der obigen Gleichung die möglichen Werte für *a* und *b*.

Beispiel: Für $c = 2$ folgt $4\,a + 5\,b = 9$ und daraus sofort $a = 1$ sowie $b = 1$.

Die anderen Lösungen findet man analog hierzu rasch durch Ausprobieren.

Die Gewinner der drei CDs mit Soundtrack zum Film »Genesis« sind Renate Stürmer, Zweibrücken; Berthold Hajen, Boppard; und Roland Jung, Bischofsheim.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.