Ein Stoß gibt den anderen

Kann man einen Ball so heftig auf den Boden schleudern, dass er zum Mond fliegt? Nicht ganz; aber mit 252 Bällen, deren größter reichlich 30 Tonnen wiegt, könnte das Kunststück gelingen – zumindest theoretisch.

Von Norbert Treitz

Ein kleiner Ball, der dicht über einem großen und gemeinsam mit diesem zu Boden fällt, ist gut für eine kleine Überraschung: Auf dem Rückweg vom Boden stößt der große Ball den kleinen und gibt ihm dabei im günstigsten Fall fast seine ganze Bewegungsenergie mit, wodurch der kleine einen bemerkenswerten Luftsprung macht. Das haben wir in einer früheren Folge beschrieben (SdW 8/2004, S. 101).

Was geschieht, wenn man einen Turm aus drei, vier … Bällen mit geeignet gewählten Massenverhältnissen fallen lässt? Springt der oberste, kleinste Ball dann noch viel höher? Und wie rechnet man das aus?

Nach dem Motto »Mathematik ist das Vermeiden von Rechnen« wählt man sich zunächst ein Bezugssystem, das möglichst wenig Rechnen erfordert. Das ist in aller Regel das Schwerpunktsystem, das heißt dasjenige, in dem der Schwerpunkt der beiden elastisch miteinander wechselwirkenden Punktmassen ruht. Denn ein zentraler Satz der Stoßtheorie besagt, dass in diesem System jeder der beiden Partner nach dem Kontakt (das heißt nach der Impulsübergabe) die gleiche Bewegungsenergie hat wie vorher.

In anderen Inertialsystemen (unbeschleunigten Bezugssystemen) ist lediglich die Summe der Bewegungsenergien vorher und nachher gleich, was das Kriterium des elastischen Stoßes ist. Ob es dabei zu einer Übergabe von Bewegungsenergie zwischen den Stoßpartnern kommt und welcher dabei der gebende und welcher der nehmende ist, hängt vom betrachteten Bezugssystem ab.

Insbesondere wird im Schwerpunktsystem (wohlgemerkt in dem der jeweils unmittelbar beteiligten zwei Stoßpartner) keine Bewegungsenergie übertragen, und daher bekommt jede der beiden Punktmassen auch wieder ihren alten Geschwindigkeitsbetrag (Kasten links). Die Richtungen können dabei von geometrischen Details (bei Kugeln vom »Stoßparameter« und allgemein auch von den Formen der Objekte) abhängen: Diese Feinheiten machen den Unterschied zwischen schlechten und guten Billardspielern aus.

Dass die Summe der Bewegungsenergien vorher und nachher die gleiche ist, folgt übrigens nicht aus dem Energieerhaltungssatz; denn der besagt nur, dass die Summe aller Energien unverändert bleibt. Es gibt kein Naturgesetz, nach dem (äußere) Bewegungsenergie erhalten bleiben müsste. Die Erfahrungswelt zeigt pausenlos Gegenbeispiele. So verhalten sich andere Objekte als Kugeln – Stangen zum Beispiel – beim Stoß völlig anders als elastisch.

Während eines Stoßes wird Bewegungsenergie in Deformation der beteiligten Körper umgesetzt und kann dadurch im Extremfall vorübergehend auf null absinken. Beim Swing-by-Manöver,

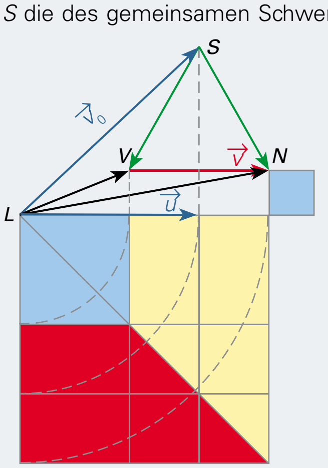
Impuls- und Energietransfer – grafisch dargestellt

Die Energieübergabe bei einer elastischen Wechselwirkung zwischen zwei Punktmassen ist gleich dem Skalarprodukt aus der Impulsübergabe und der Geschwindigkeit des gemeinsamen Schwerpunkts im verwendeten (»Labor«-)System. Insbesondere ist sie gleich null, wenn im Laborsystem der Schwerpunkt ruht.

Das wird geometrisch bewiesen durch die Zeichnung, welche die Situation im Geschwindigkeitsraum zeigt: L bezeichnet die Geschwindigkeit des Laborsystems, S die des gemeinsamen Schwerpunkts beider Massen. Der Vektor $\overrightarrow{LS}$ ist also die Geschwindigkeit des Schwerpunkts, gemessen im Laborsystem. Entsprechendes gilt für die Geschwindigkeit einer der beiden Punktmassen vor (V) und nach (N) dem Kontakt. Der Vektor $\overrightarrow{VN} = \vec{v}$ ist die Differenz der Geschwindigkeiten, $m\,\overrightarrow{VN}$ die Impulsübergabe $\vec{p}$. Deren Skalarprodukt mit der Geschwindigkeit $\vec{v}_0 = \overrightarrow{LS}$ ist gleich dem Produkt aus $\vec{p}$ und der Komponente $\vec{u}$ von $\overrightarrow{LS}$ in Richtung von $\vec{p}$. Das ist wiederum bis auf den Faktor m gleich dem Flächeninhalt des gelben oder des roten Trapezes.

Andererseits ist die Bewegungsenergie »nachher« bis auf den Faktor $m/2$ gleich $\overrightarrow{LN}^2$, das ist die Summe aller farbigen Flächen, und »vorher« gleich $\overrightarrow{LV}^2$, das ist die Summe aller blauen Flächen (Pythagoras).

Für den anderen Partner sieht die Zeichnung im Prinzip genauso aus; nur die Pfeile $\overrightarrow{SV}$ und $\overrightarrow{SN}$ zeigen in die entgegengesetzte Richtung und sind im Verhältnis der Massen länger (kürzer), wenn der zweite Partner die kleinere (größere) Masse hat. Die Formel gilt also auch für ungleiche Massen.



$$\vec{p}\cdot\vec{v}_0 = m\,\overrightarrow{VN}\cdot\overrightarrow{LS} = (m/2)\,(\overrightarrow{LN}^2 - \overrightarrow{LV}^2)$$

ELKE REINECKE

▲ **Newtons Wiege – oder Stoßfolgen für Einsteiger**

bei dem sich eine Raumsonde durch dichten Vorbeiflug Schwung bei einem Planeten holt, wird die Summe der Bewegungsenergien zwischendurch sogar größer, weil die bewegten Körper sich Energie aus dem Gravitationsfeld leihen.

Newtons Wiege: Auf vielen Schreibtischen – nicht nur von Physikern – findet sich ein Gerät, das je nach Fakultät als »Newton's Cradle« oder als Managerspiel (zur Beruhigung?) bezeichnet wird: n gleiche Kugeln sind einzeln an jeweils zwei Fäden (bifilar) in einer waagerechten Reihe aufgehängt, sodass sie sich paarweise knapp berühren. Lenkt man m von ihnen gemeinsam nach außen aus – am einfachsten durch Anfassen der m-ten Kugel – und lässt sie los, so schlagen am anderen Ende stets m Kugeln gleich weit aus, auch wenn man vielleicht erwarten würde, dass an dem Ende eine Kugel alles alleine bekommt.

Die landläufige Erklärung besteht in den Schlagwörtern »Energie- und Impulssatz«, was zumindest missverständlich ist (siehe oben). Man muss voraussetzen, dass alle Stöße ziemlich genau elastisch sind und man alle Begegnungen zumindest theoretisch in Stöße mit nur zwei Beteiligten zerlegen kann. Diese Stöße finden immer dann statt, wenn zwei benachbarte Kugeln Kontakt und aufeinander zu gerichtete Relativgeschwindigkeiten haben.

Nummerieren wir die Kugeln von links nach rechts mit 1 bis n. Haben wir die ersten m Kugeln nach links ausgelenkt und kommen sie gerade zurück, so trifft zunächst Kugel m auf Kugel m+1 und gibt ihr sofort ihren ganzen Impuls und ihre ganze Bewegungsenergie (jeweils im Laborsystem gemessen), bleibt daraufhin also stehen. Während Kugel m+2 noch ruht, wandern Impuls und Energie mit Schallgeschwindigkeit durch Kugel m+1, bevor die Kugeln sich mehr bewegt haben als um ihre gegenseitigen Eindringtiefen. Das Bild unten zeigt den weiteren Verlauf.

Jakobsleiter: Kann man durch fortgesetzte Stoßprozesse, mit einem Turm aus lauter Bällen, eine Masse (den obersten Ball) bis zum Mond schießen? Um diese Frage zu beantworten, denken wir zunächst über den erforderlichen Energieaufwand nach.

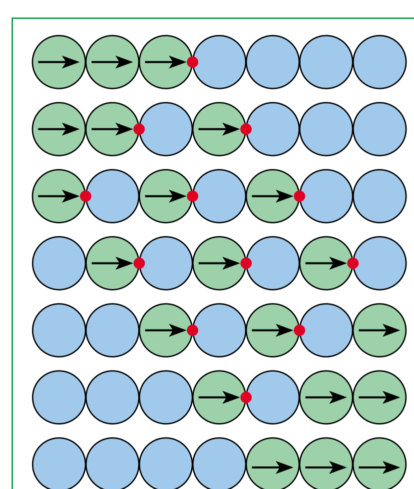
Kann ein Bergsteiger mit einer geeigneten Himmelsleiter (vergleiche Jakobs Traum im 23. Kapitel der Genesis) aus dem Schwerefeld der Erde aussteigen? Im Prinzip ja. Denn die Anziehungskraft der Erde lässt mit zunehmender Entfernung nach. Wenn die Himmelsleiter so gebaut ist, dass der Weg von einer Sprosse zur nächsten immer gleich viel Arbeit erfordert, dann liegen ihre Sprossen umso weiter auseinander, je höher man kommt – und es sind nur endlich viele Sprossen! Von der letzten stößt man sich ab und fliegt davon.

Ersatzweise stelle man sich vor, die Anziehungskraft der Erde lasse nicht nach. Dann hätte unser Himmelsstürmer – auf einer Leiter mit konstantem Sprossenabstand – dieselbe Arbeit bereits dann geleistet, wenn er vom Erdboden bis zum doppelten Erdradius gestiegen wäre, also ungefähr 6370 Kilometer (Kasten S. 116).

Damit ist das Schwerefeld der Sonne zwar noch nicht überwunden, aber für eine Reise zum Mond würde das reichen: Wer 6370-mal einen 1000 Meter hohen Berg besteigen kann, kann auch mit geeigneter Leiter bei laufender Versorgung mit Nahrung und Sauerstoff zum Mond klettern. Wer tausend Meter Höhenunterschied pro Tag schafft, kommt bei freiem Wochenende und 30 Tagen Jahresurlaub in knapp 28 Jahren zum Ziel.

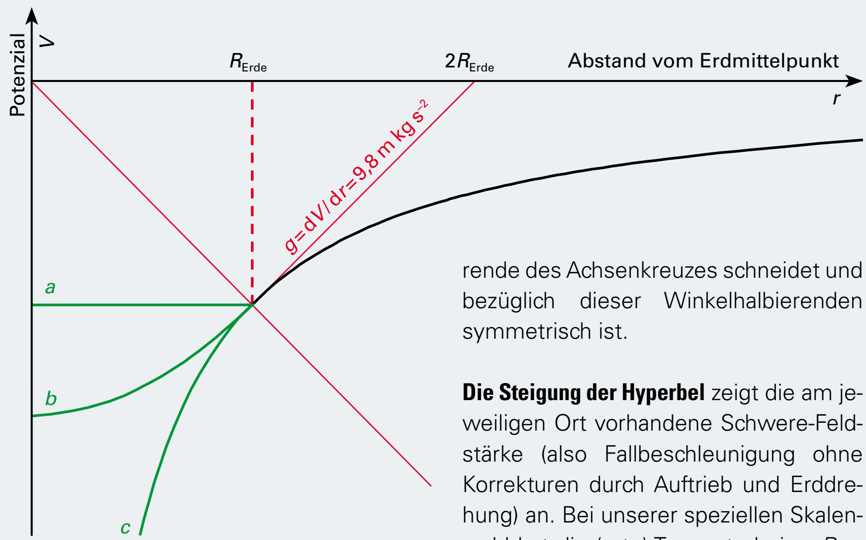
Leider kann unser Wanderer die erforderliche Nahrung weder vorher essen noch im Rucksack mitnehmen, weil sie viel schwerer ist als er selbst, und um sie mitzuschleppen, benötigte er entsprechend noch viel mehr. Selbst wenn er zu 50 Prozent aus Nahrung bestünde, wäre diese schon bei geringerer Höhe aufgebraucht. Dass Raketen mit chemischen Treibstoffen überhaupt zum Mond kommen, liegt an dem krassen (Miss-)Verhältnis aus Startmasse und Nutzlast, was technisch durch das Abwerfen der größeren Stufen realisiert wird. Das betrachten wir etwas genauer:

Das Verlassen der Erde vom Boden ins Unendliche für eine Masse m erfordert $m\,g\,R_{\text{Erde}} = m \cdot 6{,}3 \cdot 10^7$ Joule pro Ki- ▷



▶ **Wenn in Newtons Wiege drei von sieben Kugeln auf die übrigen losgelassen werden, haben zu verschiedenen Zeitpunkten verschiedene Paare von Kugeln Kontakt (rote Markierungen). Blau gezeichnete Kugeln ruhen, grüne haben einen Impuls nach rechts (Pfeile). Zur Vereinfachung ist angenommen, dass mehrere Kontakte an verschiedenen Stellen gleichzeitig stattfinden.**

Himmelsleiter – die kurze Version



In der schwarzen Kurve ist das Potenzial (Gravitationsenergie dividiert durch die zu transportierende Masse) gegen den Abstand vom Mittelpunkt der Erde aufgetragen. Das ist im Außenraum ein Stück einer rechtwinkligen Hyperbel, denn das Integral über eine Kraft, die proportional zu $1/r^2$ ist, muss proportional zu $1/r$ sein.

Wir sind frei, die Maßstäbe für die Koordinatenachsen zu wählen, und nutzen diese Freiheit so, dass die Hyperbel für $r = R_{\text{Erde}}$ (Erdoberfläche) die Winkelhalbierende des Achsenkreuzes schneidet und bezüglich dieser Winkelhalbierenden symmetrisch ist.

Die Steigung der Hyperbel zeigt die am jeweiligen Ort vorhandene Schwere-Feldstärke (also Fallbeschleunigung ohne Korrekturen durch Auftrieb und Erddrehung) an. Bei unserer speziellen Skalenwahl hat die (rote) Tangente bei $r = R_{\text{Erde}}$ die Steigung 1 und schneidet daher die r-Achse beim doppelten Erdradius. Wer also gegen das Schwerefeld der Erde am Boden 6370 Kilometer (einen Erdradius) Höhenunterschied überwindet, wendet genug Energie auf, um dem Schwerefeld der Erde zu entkommen.

Im Inneren der Erde ist die Potenzialkurve eine der drei grünen Kurven, je nachdem, ob die Masse der Erde auf der Oberfläche der (Hohl-)Kugel verteilt ist *(a)*, homogen die ganze Kugel füllt (*b*, fast realistisch) oder im Mittelpunkt der Erde konzentriert ist *(c)*.

▷ logramm. Das ist äquivalent zu $0{,}7 \cdot 10^{-9}$ mal der Masse nach einer Formel, die Albert Einstein vor 100 Jahren mitgeteilt hat. Für die Flucht von der Erde würde es also genügen, ein knappes Milliardstel der eigenen Masse in Bewegungsenergie umzusetzen – was mangels verfügbarer Antimaterie nicht ohne Weiteres möglich ist.

Die Energiegewinnung durch Oxidieren von optimalen Brennstoffen wie Fett (im Menschen) oder Kohlenwasserstoffen (in der Rakete) liefert pro Kilogramm Fett rund 35 Megajoule. Wenn man den erforderlichen Sauerstoff mitrechnet, sind es noch 8 Megajoule pro Kilogramm, entsprechend $0{,}7 \cdot 10^{-10}$ mal der Masse von Brenn- und Sauerstoff. So gesehen spielt sich die erdnahe Raumfahrt in der neunten Stelle hinter dem Komma ab, Chemie aber in der zehnten. Raumfahrt mit chemischen Energieträgern ist also nur möglich, wenn man den größten Teil von ihnen und ihren Produkten in Bodennähe behält.

Ein Kilogramm 6370 Kilometer hoch zu heben ist zwar sehr mühsam; aber der schiere Energiebedarf ist keineswegs astronomisch. Es ist derselbe, den eine mittelschwere Lokomotive (63 700 Kilogramm) benötigt, um einen Höhenunterschied von 100 Metern zu überwinden. Stellen wir uns einen Flaschenzug – natürlich mit gewichtslosen Seilen und Rollen – vor: Auf der einen Seite fallen 63 700 Kilogramm 100 Meter tief, und auf der anderen steigt ein Kilogramm in dem gedachten Ersatzfeld bis zum doppelten Erdradius. Für das richtige Feld müsste man die Übersetzung variabel gestalten (etwa mit schnecken- oder kegelförmigen Rollen, aber immer noch gewichtslos) und käme mit dem einen Kilogramm bis zum Mond, während sich die Lokomotive von der Talbrücke abseilt.

Mit der Ballpyramide zum Mond? Wenden wir nun unsere Ball-Experimente in Gedanken auf die Astronautik an.

Wenn man zwei Bälle mit dem Massenverhältnis 3:1 zugleich »huckepack« (der leichte genau auf dem schweren) fallen lässt, kommt dabei die ganze Bewegungsenergie dem leichten zu, sodass dieser die vierfache Starthöhe erreicht und der schwere ohne weitere Abklingprozesse am Boden liegen bleibt. Das haben wir im Augustheft gesehen.

Ein größeres Massenverhältnis als 3 : 1 hilft nicht wirklich. Selbst bei einem unendlichen Verhältnis der Ballmassen kommt nur die neunfache Höhe heraus, und das auch nur in dem Idealfall, der schon wegen der Unvollkommenheit der Elastizität nicht erreicht wird – die Endlichkeit der Massenverhältnisse stört da viel weniger. Dass dabei der schwere Ball fast genauso gut die Starthöhe wieder erreicht wie ohne den leichten, tröstet den wenig, der dem leichten Ball die Daumen drückt und eine weite Reise wünscht.

Wir wünschen uns daher eine Situation, in der wir eine große Masse aus einer maßvollen Höhe fallen lassen derart, dass der weitaus größte Teil davon sogleich liegen bleibt und ein ziemlich kleiner Teil dafür sehr hoch springt. Im homogenen Schwerefeld ist die Energiebilanz dazu sehr einfach: Die Höhen verhalten sich so wie die gesamte zuerst fallende zu der hinterher hochspringenden Masse. Aber wie bekommen wir die Masse dazu, ihre Energie gerade passend aufzuteilen? Wir werden sehen, dass wir die Masse trickreich in hinreichend viele Bälle aufteilen und diese exakt vertikal übereinander starten müssen. Nur der oberste springt hoch, während alle anderen sogleich und ohne Einfluss der Reibung am Boden bleiben. Kommt man damit höher als bis zur neunfachen Starthöhe oder gar unbegrenzt hoch?

Wir denken uns nun eine vertikale Folge von Bällen mit – von unten nach oben – in trickreicher Weise abnehmenden Massen in paarweisem losem Kontakt. Sie fallen alle gleichzeitig um eine Höhendifferenz, welche ihnen die gemeinsame Geschwindigkeit $-v$ gibt, unmittelbar bevor es zur Kaskade der Stöße kommt. Zuerst wird die unterste elastisch am Boden reflektiert und kommt mit $+v$ nach oben zurück. Nun sollen die Massen so abgestimmt sein, dass jeder aufsteigende Ball von seinem unmittelbaren oberen Nachbarn auf einen Schlag zur Ruhe im Laborsystem gebracht wird. Alle von oben kommenden haben $-v$, die aufsteigenden aber sind schneller und haben $+nv$, mit einem noch unbekannten reellen Faktor n, der zudem von Ball zu Ball verschieden ist.

Wir betrachten nun einen Ball mit der Nummer i und seinen oberen Nachbarn mit i+1. Die Massen seien m_i und m_{i+1}, die Geschwindigkeiten im Laborsystem $+nv$ und $-v$. Ihr gemeinsamer Schwerpunkt hat dann die Geschwindigkeit $v_S = (m_i nv - m_{i+1}v)/(m_i + m_{i+1})$. Ball i hat in diesem Schwerpunktsystem die Geschwindigkeit $nv - v_S$ vor dem Stoß und das Negative davon nach diesem. Im Laborsystem hat er dann $2v_S - nv$. Wir wählen das Massenverhältnis nun so, dass diese Geschwindigkeit null wird, und finden $m_{i+1}/m_i = n/(n+2)$ als rekursive Bestimmung für alle Massenverhältnisse jeweils benachbarter Bälle.

Der obere der beiden Bälle kommt mit $-v$ im Laborsystem, also $-v - v_S$ im Schwerpunktsystem und steigt nach dem Stoß mit $v+v_S$ im Schwerpunktsystem und daher $v+2v_S$ im Laborsystem auf. Einsetzen liefert uns das schöne Ergebnis, dass jeder Ball mit v mehr aufsteigt, als es sein unterer Nachbar einen Stoß zuvor getan hat. Wenn wir dem untersten Ball, der den Planeten direkt berührt, die Nummer 1 geben, so hat der i-te Ball die i-fache Geschwindigkeit des ersten: $nv = iv$, bevor er mit seinem oberen Nachbarn enger kollidiert (sofern er noch einen hat).

Auf Grund der Energiebilanz muss man für die 63 700-fache Höhe (von unseren 100 Metern) die 252-fache Geschwindigkeit erreichen, also ist die Zahl der Bälle $n_{max} = 252$, und der oberste und kleinste muss 1/63 700 der Gesamtmasse haben.

Wie schwer aber mag der unterste sein? Dazu sehen wir uns die rekursive Massenbestimmung an. Normieren wir die Masse des untersten Balls auf 1, so finden wir für die Massen der Bälle die Folge

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{10}, \frac{1}{15}, \frac{1}{21}, \frac{1}{28}, \frac{1}{36}, \ldots$$

Um sie aufzuaddieren, schreiben wir sie etwas anders:

$$\frac{2}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \ldots$$

Wegen

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

gilt

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)$$
$$+ \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$
$$= 1 - \frac{1}{n+1}\,.$$

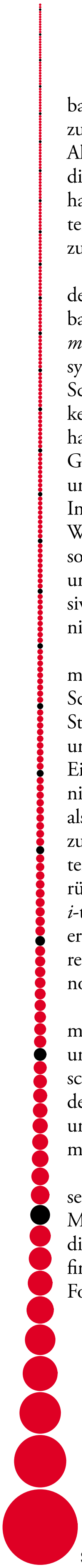
Die überraschend einfache Bestimmung von Grenzwert und Restglied dieser gar nicht so trivial aussehenden Reihe hat der junge Diplomat Freiherr von Leibniz gefunden, nachdem ihm sein Gastgeber Christiaan Huygens diese Nuss zu knacken gegeben hatte.

Für unseren Sprung zum Mond bedeutet das, dass bei 100 Meter Fallhöhe der unterste Ball etwas mehr als die Hälfte der gesamten Masse enthalten muss und damit das über 30 000-Fache der Nutzlast.

Sie können nun leicht abschätzen, dass wir bei gleicher Fallhöhe rund 1000 Bälle brauchen, um nicht nur das Schwerefeld der Erde, sondern auch das Sonnensystem von der Erdbahn aus zu verlassen.

Unendlich hoch *n*: Wir hatten auch gesehen, dass bei einem unendlichen Massenverhältnis der beiden Bälle – wie wörtlich das auch immer gemeint sein mag – schon der zweite Ball die dreifache Geschwindigkeit und damit die neunfache Starthöhe erreicht, wenn alle Stöße wirklich vollkommen elastisch sind. Wie hoch kommt man, wenn man dieses Verfahren iteriert und eine Ballpyramide aus n Bällen fallen lässt, deren Massen sozusagen paarweise um den Faktor »unendlich« verschieden sind? Wir wissen vom leichten Ball und schweren Schläger oder vom Swing-by, dass im Laborsystem der extrem leichte Stoßpartner seinen Geschwindigkeitsbetrag um das Doppelte von dem des schweren erhöhen kann. Nun fallen alle Bälle mit dem gleichen $-v$ auf ihre jeweiligen unteren Nachbarn, aber diese kommen ihnen nach oben – außer dem untersten Ball – durchaus schneller entgegen. Der zweite Ball hat schon $+3v$, wie wir gesehen haben. Der dritte bekommt daher $(1 + 2 \cdot 3)v = 7v$, der vierte entsprechend $15v$, die Folge geht dann weiter mit $(2^n - 1)v$. Um mit 100 Meter Starthöhe zum Mond zu kommen, genügen dann nach dieser wilden Abschätzung acht Bälle, denn 255 ist größer als 252, aber das Nutzlastverhältnis ist ausgesprochen bescheiden, nämlich die –9. Potenz des als unendlich angesetzten Massenverhältnisses. Das ist auch kein Wunder, denn die anderen sieben Bälle bleiben bei dieser Variante ja nicht (sofort) am Boden liegen, sondern hüpfen auf die einfache, neunfache, 49-fache, 224-fache … Starthöhe, was nun doch eine ziemliche Verschwendung ist.

Zur näherungsweisen Realisierung der Ballpyramiden werden die Bälle oft mit Bohrungen auf einen Spieß gesteckt, der am größten Ball festgemacht ist und die Justierung übernehmen soll. Leider übernimmt er auch beachtliche Reibung, und die Vorführung ist oft weniger eindrucksvoll als der ganz einfache Freihandversuch mit zwei Bällen und einem Planeten. ◁



◀ **Von der Pyramide aus 252 Bällen, die 100 Meter tief fallen, bleiben alle liegen bis auf den obersten, der bis zum Mond fliegt. Jeder zehnte Ball ist schwarz. Die Zeichnung ist maßstabsgetreu!**

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie anschauliche Erklärungen dazu nutzt er nicht nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hoch begabter Kinder und Jugendlicher.

Nüsse & Rosinen. Von Norbert Treitz. CD mit Buch. Harri Deutsch, Frankfurt (Main), in Vorbereitung

Brücke zur Physik. Von Norbert Treitz. 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 2003

Physik. Von Christian Gerthsen und Helmut Vogel. Springer, Berlin 1997

Spiele mit Physik! Von Norbert Treitz. 4. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1996

Unendliche Reihen. Von Herbert Meschkowski. BI, Mannheim 1982

Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energieinhalt abhängig? Von Albert Einstein in: Annalen der Physik, Bd. 18, S. 639, 1905