MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN

Arithmetische Primzahlfolgen beliebiger Länge

In dem Unregelmäßigsten, das die Zahlentheorie kennt, der Verteilung der Primzahlen, steckt ein Hauch von Regelmäßigkeit.

Von Christoph Pöppe

Eigentlich sind Primzahlen etwas sehr Regelmäßiges. Es sind nämlich genau die Zahlen, die nicht zusammengesetzt, das heißt Produkt von zwei oder mehr Faktoren sind. Die zusammengesetzten Zahlen aber sind so regelmäßig, wie man es sich nur wünschen kann: Alle Vielfachen von 13, sprich alle zusammengesetzten Zahlen, die 13 als einen ihrer Faktoren haben, stehen in gleichen Abständen auf der Zahlengeraden: 26, 39, 52, 65, 78, … Der stets gleiche Abstand beträgt 13 – was sonst? Nimmt man einen Kamm, dessen Zinken den Abstand 13 voneinander haben, und setzt ihn auf die richtige Stelle der Zahlengeraden, so treffen die Zinken lauter Vielfache von 13 und damit bestimmt keine Primzahl – allenfalls die Dreizehn selbst, wenn man den Kamm mit der linkesten Zinke ein Stück zu weit nach links setzt. Und dasselbe gilt natürlich auch mit jedem anderen Zinkenabstand als 13.

Der vornehme Ausdruck für einen Kamm mit konstantem Zinkenabstand ist »arithmetische Folge«. Ein beliebtes Schulbuchbeispiel ist die Füllung eines Sparstrumpfs, in den die Großmutter jeden Monat denselben Betrag hineintut. (Auf einem Sparkonto kämen Zinsen dazu, aber die kriegen wir erst in der nächsten Stunde.) Theoretisch könnte das unendlich lange so weitergehen; es wäre auch nichts dagegen einzuwenden, wenn unser Dreizehnerkamm nach rechts unendlich lang wäre.

Wir basteln uns nun zu jeder Primzahl p einen unendlich langen Kamm mit dem Zinkenabstand p und gehen damit genau einmal über die Zahlengerade, sodass wir genau die Vielfachen von p wegnehmen, nicht aber p selbst. Die Auskämmprozedur hat einen ehrwürdigen Namen: »Sieb des Eratosthenes«, denn der antike griechische Mathematiker Eratosthenes (276–194 v. Chr.), nach dem sie benannt ist, dachte mehr an verschiedene Siebe, durch deren Maschen die zusammengesetzten Zahlen fallen, als an Kämme. Aber darauf kommt es nicht an.

Wenn die Nichtprimzahlen so regelmäßig sind, dann müsste doch das, was übrig bleibt, wenn man sie alle weggekämmt hat, auch sehr regelmäßig sein, oder? Nicht wirklich.

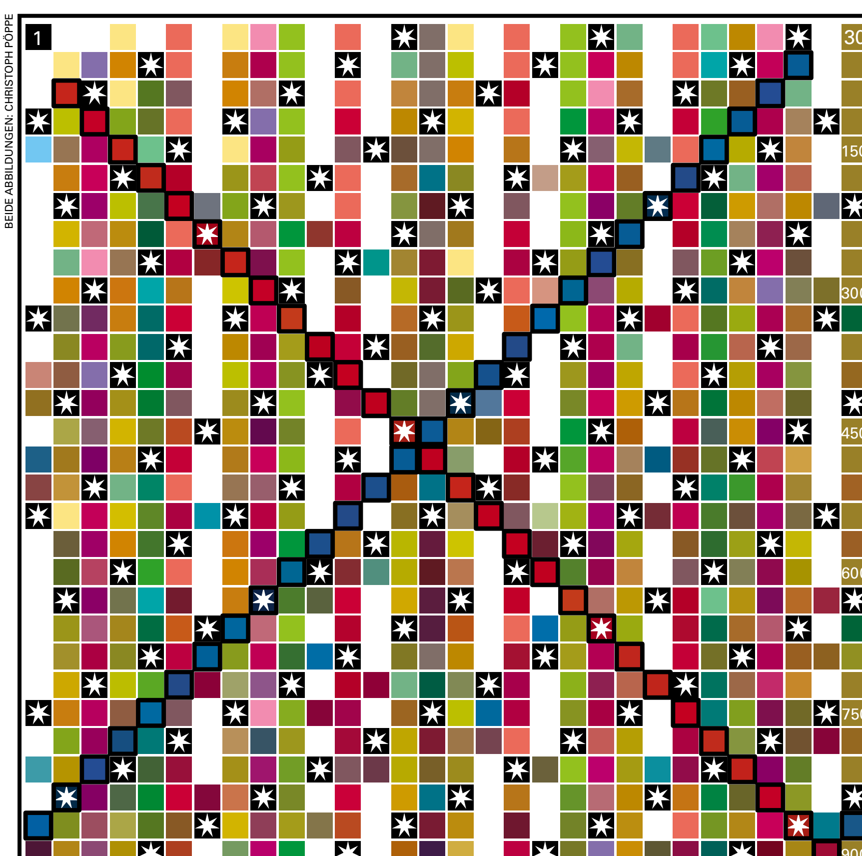
Nachdem alle Kämme über die Zahlengerade hinweggegangen sind, sieht die sehr unregelmäßig gerupft aus, als hätte der Zufall bestimmt, welche Zahlen die Prozedur überstehen. Primzahlen sind so etwas wie die Singles, die keinen Partner (Teiler) abgekriegt haben. Dafür gibt es immer viele verschiedene Gründe, die in ihrer Vielfalt vom Zufall kaum zu unterscheiden sind.

Dieser Widerspruch zwischen streng regelmäßigem Bildungsgesetz und der scheinbaren Regellosigkeit der Primzahlen hat viele Mathematiker nicht ruhen lassen und quält zahlreiche Amateure noch heute. Irgendeinen Trick müsste es doch geben, eine Formel, die zum Beispiel alle Primzahlen der Reihe nach ausspuckt, wenn man eine natürliche Zahl nach der anderen hineinsteckt. Oder die wenigstens für jede natürliche Zahl, die man hineinsteckt, eine Primzahl liefert.

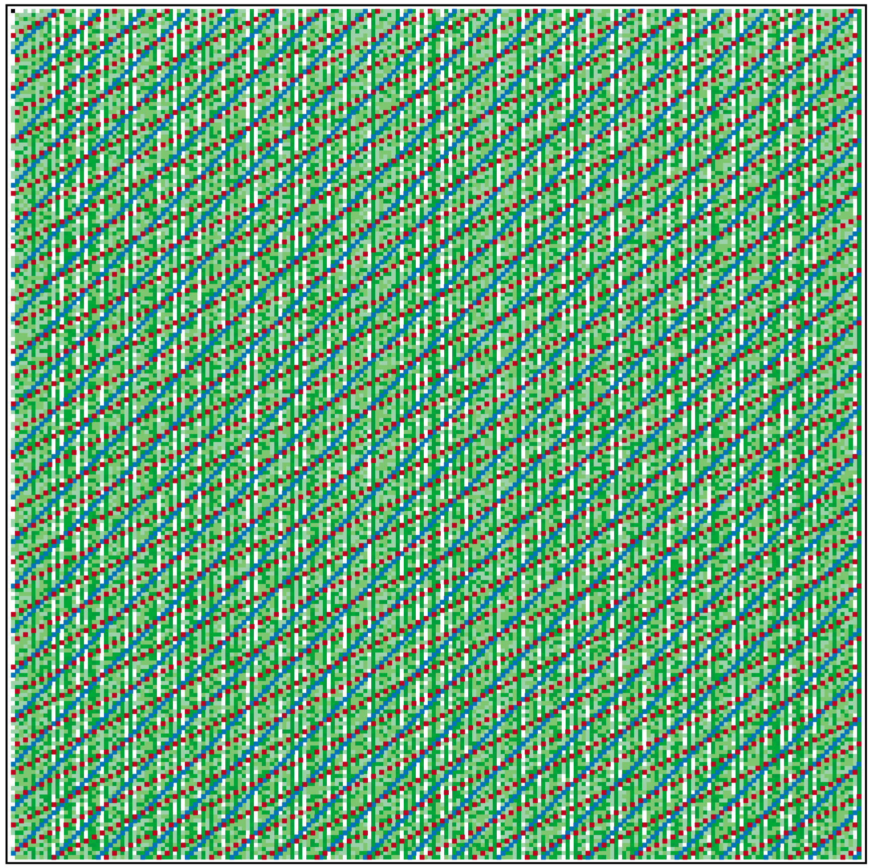
Oder es müsste Kämme geben, deren Zinken sämtlich auf Primzahlen zeigen. Beliebig lange Kämme, wohlgemerkt, denn dreizinkige wie {7, 13, 19} oder vierzinkige wie {11, 17, 23, 29} zu finden ist nicht schwer. Diese Vermutung hatte – in allgemeinerer Form – der legendäre Paul Erdős (1913–1996) gemeinsam mit seinem ungarischen Landsmann und langjährigen Mitarbeiter Paul Turán (1910–1976) bereits 1936 aufgestellt. Seitdem haben sich viele Zahlentheoretiker an der Frage die Zähne ausgebissen.

Umso größer ist die Begeisterung der Fachwelt über die Lösung des Problems: *Es gibt beliebig lange arithmetische Folgen, die nur Primzahlen enthalten.* Das haben vor Kurzem Ben Green von der Universität von British Columbia in Vancouver (Kanada) und Terence Tao von der Universität von Kalifornien in Los Angeles bewiesen.

Ein genauerer Blick zeigt: Es ist nur ein Hauch von Regelmäßigkeit im Ozean des Regellosen. Während es für zusammengesetzte Zahlen unzählige Kämme gibt, ist ein einigermaßen langer Primzahlkamm nur mit äußerster Mühe



BEIDE ABBILDUNGEN: CHRISTOPH PÖPPE



Die natürlichen Zahlen von 1 bis $210^2 = 44\,100$ von oben nach unten in Zeilen der Länge 210 aufgetragen: Primzahlen sind weiß; die Farbe der anderen Felder entspricht der Anzahl an Primteilern der entsprechenden Zahl. Hervorgehoben sind die Vielfachen von 11 (rot) und 13 (blau), welche die weißen Strecken in ihrer Länge begrenzen. In der rechten oberen Ecke erkennt man die zehnteilige arithmetische Primzahlfolge {199, 409, 619, ..., 2089}, die für die Schrittweite 210 bereits die maximal mögliche Länge hat.

ausfindig zu machen. Der Beweis von Green und Tao erklärt einem auch nicht, wie man einen solchen Kamm findet; er sagt allenfalls, an welchen Stellen es nicht zu suchen lohnt.

Der Anschein der Regellosigkeit

Es ist sehr unübersichtlich unter den großen natürlichen Zahlen. Fühlen Sie sich weit nach draußen auf der Zahlengerade versetzt, irgendwo in die Zwanzigstelligen, wo Sie keine einzige Zahl mehr persönlich kennen – selbst Ihre 16-stellige Kreditkartennummer haben Sie schon weit hinter sich gelassen. Welche unter den Zahlen in Ihrer Umgebung sind Primzahlen? Man könnte es herausfinden, mit dem Sieb des Eratosthenes oder auch mit Primzahltests, die auf solche Fragen weit schneller eine Antwort geben. Aber ein Muster ist nicht erkennbar.

Weit draußen werden die Primzahlen auch immer seltener. In der Nähe der großen Zahl N ist die Chance auf einen Treffer ungefähr $1/\log N$, wobei log den natürlichen Logarithmus bezeichnet.

Stellen Sie sich vor, ein Kobold macht bei jeder Zahl ein Zufallsexperiment (einen »Münzwurf«), das mit einer Wahrscheinlichkeit von $1 / \log N$ die Antwort »ja« liefert, und malt alle Zahlen, bei denen »ja« herauskommt, weiß an. (Die anderen sind irgendwie farbig.) Alle Münzwürfe sind unabhängig voneinander. Dann sieht es hinterher so aus, wie wenn jemand genau die Primzahlen weiß angemalt hätte.

Das ist das Vertrackte an den Primzahlen: Wenn man sie sich einfach so anschaut, ohne von dem Wissen, dass es Primzahlen sind, Gebrauch zu machen, dann gibt es kein statistisches Mittel, ihre Verteilung von einer schlicht ausgewürfelten zu unterscheiden. Aber sie ist eben nicht ausgewürfelt. Man kann sich auf nichts verlassen, nicht einmal auf die Regellosigkeit. Und das macht paradoxerweise die Sache erst richtig schwierig.

Wenn nämlich die Primzahlen wirklich unabhängig voneinander ausgewürfelt wären, dann wären Kämme aus statistischen Gründen praktisch unvermeidlich. Die Chance von $1/\log N$, an der Stelle N eine Primzahl anzutreffen, ist für $N = 10^{20}$ knapp 1/46. Ungefähr zwei von hundert Zahlen in dieser Gegend sind Primzahlen – etwas mager verglichen mit den 23 Primzahlen unter den ersten hundert, aber nicht verschwindend wenig. Die Wahrscheinlichkeit, rein durch Zufall einen Kamm mit, sagen wir, zehn Zinken zu finden, ist die zehnte Potenz dieser Zwei-Prozent-Chance oder ungefähr $2 \cdot 10^{-17}$, was hoffnungslos wenig erscheint. Aber wir haben 10^{20} Plätze zur Verfügung, um in dieser Gegend unseren Kamm anzusetzen, und den Zinkenabstand können wir auch noch variieren. Da müssten doch rein per Zufall reichlich arithmetische Folgen zu Stande kommen.

Dieses Argument ist zwar falsch (siehe unten), aber die Idee ist gleichwohl fruchtbar. Man kann sie handfester machen, indem man sich die Zahlenreihe von einem physikalischen Standpunkt aus anschaut. Tun wir so, als wäre die Zahlengerade die Zeitachse, und die Zahlen rauschten im Megahertztempo an uns vorbei, eine Million pro Sekunde, ein Tempo, bei dem ein moderner PC noch ganz gut mithalten kann. Nach einer guten Viertelstunde ist die erste Milliarde vergangen, sodass es uns nicht allzu langweilig wird, bis wir zu den großen Zahlen kommen. Jedes Mal, wenn eine Primzahl kommt, gibt es einen kurzen elektrischen Stromstoß, der sich als Knacken in unserem Lautsprecher bemerkbar macht. Unser gedachter Primzahlzähler klingt dann wie ein Geiger- ▷

Die natürlichen Zahlen von 1 bis 900 in Zeilen der Länge 30 aufgetragen: Die Eins ist schwarz, alle Primzahlen sind weiß, die Vielfachen von 2 sind gelb, die von 3 pink, die von 5 grün gefärbt und so weiter; die Farben mischen sich. Primzahlen können, von der ersten Zeile abgesehen, nur in gewissen Spalten der Tabelle liegen. Mehrere weiße Felder untereinander entsprechen einer arithmetischen Primzahlfolge mit der Schrittweite (dem »Zinkenabstand«) 30. Die Vielfachen von 7 (Sternchen) verhindern, dass mehr als sechs weiße Felder aneinander grenzen. Durch schwarze Rähmchen hervorgehoben sind die Vielfachen von 29 (blau) und 31 (rot).

▷ zähler: Die Primzahlen kommen genauso regellos wie radioaktive Atomzerfälle. Einigermaßen vorhersagbar ist allenfalls die durchschnittliche Zerfallsrate oder eben Primzahldichte.

In dieser regellosen Folge von Knacksignalen suchen wir nach periodisch wiederkehrenden Ereignissen mit zunächst unbekannter Periode – nichts anderes sind arithmetische Folgen von Primzahlen. Und für die Suche nach Periodischem gibt es ein probates Mittel: die Fourier-Analyse.

Primzahlen mit Energie

Mit ihr zerlegt man zum Beispiel ein akustisches Signal, das eine gewisse Grundperiode hat, in Grund- und Oberschwingungen. Unsere natürlichen Zahlen haben keine Grundperiode? Das ist nicht schlimm. Oberhalb einer gewissen sehr großen Zahl N geben wir die Suche auf und zählen wieder von vorn, immer wieder, dann ist das Signal periodisch. Dadurch verpassen wir die Kämme, die über die Zahl N hinausragen, und finden vielleicht ein paar falsche, die den Übergang von N nach 1 überspannen. Aber das sind lösbare Nebenprobleme. Dass unsere gedachte Zeit nicht kontinuierlich ist, sondern aus lauter diskreten Zahlen besteht, macht auch nichts. Darauf lässt sich der Formalismus der Fourier-Analyse ohne Weiteres anpassen.

Das Schöne an der Fourier-Analyse ist: Sie findet immer irgendetwas. Es kommt nicht darauf an, ob der Datenreihe wirklich ein physikalischer Schwingungsprozess zu Grunde liegt. Ob wir den Schall aus einer Orgelpfeife oder die Folge der Primzahlen analysieren, am Ende der Rechnung kommt immer heraus, aus welchen periodischen Ereignissen man sich das Eingangssignal zusammengesetzt denken könnte. Mehr noch: Die Analyse schreibt jeder der Schwingungen, die sie ausrechnet, eine Energie zu, und die Summe dieser Energien ist gleich der Energie des Eingangssignals. (Mathematiker bevorzugen die Bezeichnung »L^2-Norm« statt Energie.)

Da die Primzahlen nicht von Natur aus irgendwelche physikalischen Eigenschaften haben, sind wir frei, sie ihnen geeignet zuzuschreiben. Green und Tao geben jeder Primzahl p die Energie $\log p$. Auf diese Weise herrscht überall auf der Zahlengerade die gleiche Energiedichte. Weit draußen sind die Primzahlen zwar seltener, aber dafür entsprechend fetter.

Die gesamte Energie des Intervalls von 1 bis N muss sich jetzt in den Fourier-Schwingungen wiederfinden. Die energiereichste Schwingung muss mehr als die – berechenbare – Durchschnittsenergie aller Schwingungen haben. Also hat sie eine gewisse Mindestenergie, und das heißt auch: eine gewisse Mindestanzahl an beteiligten Primzahlen. Und das ist schon fast eine arithmetische Folge von Primzahlen – auch wenn es keinen Hinweis darauf gibt, wo wir sie zu suchen haben.

Leider reicht dieses Argument allein noch nicht aus. Die im Prinzip denkbaren Schwingungen sind so viele, dass die Durchschnittsenergie pro Schwingung zu niedrig ist, um weiter gehende Schlüsse zu erlauben. Wäre das Eingangssignal wirklich vollkommen regellos, dann wüsste man, dass es »ergodisch« ist, das heißt, seine Energie auf alle möglichen Schwingungen ziemlich gleichmäßig verteilt. Aber ausgerechnet der Mangel an Regellosigkeit ist, wie oben angedeutet, dazu angetan, arithmetische Folgen von Primzahlen zu verderben. Warum?

Nehmen wir einen zweizinkigen Kamm – das ist eine aufgeblasene Ausdrucksweise für zwei Primzahlen in beliebigem Abstand – und versuchen, eine dritte Zinke im gleichen Abstand zu finden. Wenn der Zinkenabstand nicht durch 3 teilbar ist, dann haben wir nicht eine geringe, sondern gar keine Chance.

Den Grund dafür sieht man am besten mit dem beliebten Moduloskop. Wenn man dieses fiktive Gerät (Spektrum der Wissenschaft 12/1990, S. 12) auf eine natürliche Zahl richtet, zeigt es einem statt der Zahl selbst den Rest, der bei der Division durch – zum Beispiel – 3 übrig bleibt. Die Zahl, durch die dividiert wird, ist mit einem kleinen Stellrädchen einstellbar. Schauen wir unsere Primzahlen mit dem auf 3 eingestellten Moduloskop an. Wenn wir bei der ersten Primzahl p_1 eine Eins sehen und bei der zweiten p_2 eine Zwei, dann sehen wir bei der Zahl k, die den Zinkenabstand angibt, eine Eins. Denn eine Gleichung wie $p_1+k=p_2$ bleibt bei Betrachtung unter dem Moduloskop eine Gleichung, und die muss in diesem Fall 1+1=2 sein.

Die dritte Zinke wäre in unserem Beispiel p_2+k. Das ist unter dem Moduloskop gleich 2+1=3 oder, was dasselbe ist, gleich 0, das heißt, p_2+k ist durch 3 teilbar und daher mit Sicherheit keine Primzahl. Von den drei Zinken eines solchen Kamms könnte allenfalls die erste gleich 3 sein, denn die einzige durch 3 teilbare Primzahl ist die Drei selbst. Das ergibt die Kämme {3, 5, 7}, {3, 7, 11}, {3, 11, 19} und so weiter.

Allgemein gilt: Wenn wir einen Kamm mit m Zinken suchen, dann muss der Zinkenabstand k durch alle Primzahlen teilbar sein, die kleiner sind als m. Denn wenn das nicht der Fall ist, wenn also k nicht durch eine Primzahl q teilbar ist, dann zeigt das Moduloskop mit Einstellung q von Zinke zu Zinke jeweils eine andere Zahl, und spätestens nach q Zinken kommt die Null, sodass die entsprechende Zahl durch q teilbar ist.

Wenn man also einen zehnzinkigen Kamm sucht, muss der Zinkenabstand ein Vielfaches von $2\cdot3\cdot5\cdot7=210$ sein, und für zwanzig Zinken muss man sich auf einen Abstand von $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17\cdot19=9\,699\,690$ oder ein Vielfaches davon einstellen. Bei diesen großen Abständen ist Kopfrechnen aussichtslos.

Einen gewissen Eindruck gewinnt man, wenn man die Zahlen in Zeilen der Länge – zum Beispiel – 30 oder 210 untereinander anordnet (Grafiken S. 114/115). Nur in gewissen Spalten der Tabelle kommen Primzahlen überhaupt vor. Außerdem kann man sich bei der Suche nach arithmetischen Primzahlfolgen auf jeweils eine solche Spalte beschränken.

Ein bisschen regelhaft, ein bisschen regellos

So kamen Green und Tao, unter Verwendung zahlreicher Resultate anderer Forscher, schließlich zum Ziel: Primzahlen sind irgendwie einerseits ein bisschen regelhaft und andererseits ein bisschen regellos. Aber es gelingt, zwischen ihrer regelhaften und ihrer regellosen Seite eine gewisse Trennung zu ziehen, und zwar mit Hilfe einer geeignet erweiterten Fourier-Analyse. Die Regelhaftigkeit spielt sich nämlich im Wesentlichen bei den kleinen Primteilern ab, das heißt für die Fourier-Analyse: bei den hohen Frequenzen. Bei den tiefen Frequenzen – entsprechend großen Abständen – dagegen geht es wild zu, und entsprechend steigt die Chance auf einen Zufallstreffer. Also konstruierten Green und Tao das, was ein Akustikingenieur einen Tiefpass- und einen Hochpassfilter nennen würde. Deren Trennschärfe lässt zwar zu wünschen übrig, ist aber ausreichend, um zu zeigen, dass genügend Energie bei den tiefen Frequenzen angesiedelt ist.

Um genau zu sein: Es gelingt nicht, die verfügbare Energie quantitativ hinreichend genau abzuschätzen. Man kann nur zeigen, dass sie beliebig anwächst, wenn man den zu Grunde liegenden Zahlenbereich von 1 bis N beliebig groß wählt. Das Anwachsen ist zwar quälend langsam, proportional zu $\log N$ oder noch schleichender, aber das ist kein Grund zur Besorgnis: Es gibt ja unendlich viele natürliche Zahlen.

Daraus folgt: Zu jeder vorgegebenen Länge m gibt es irgendwo ganz weit draußen eine arithmetische Primzahlfolge der Länge m. Mehr als eine? Vielleicht sogar unendlich viele? Das ist plausibel, aber nicht bewiesen. Eine solche Folge zu finden ist, wie gesagt, ein ganz anderes Problem. Green und Tao geben immerhin zwei – von anderen gefundene – Kämme der Länge 21 an: Man fange bei 11 410 337 850 553 an und gehe in Schritten von 4 609 098 694 200 oder ab 376 859 931 192 959 in Schritten von 18 549 279 769 020.

Der gegenwärtige Rekord ist eine arithmetische Primzahlfolge der Länge 23 mit Startzahl 56 211 383 760 397 und Schrittweite 44 546 738 095 860. Wie es sich gehört, haben alle drei Schrittweiten als Teiler ein vollständiges Sortiment kleiner Primzahlen:

$4\,609\,098\,694\,200 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 1033$,

$18\,549\,279\,769\,020 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 5939$,

$44\,546\,738\,095\,860 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 \cdot 99\,839$.

Markus Frind, Paul Jobling und Paul Underwood fanden die Rekordfolge, indem sie ein geschicktes Suchprogramm auf mehreren Computern zugleich ablaufen ließen. Bei den Rechnern handelte es sich größtenteils um Server der (kostenfreien) Partnersuch-Website www.plentyoffish.com. Das macht Sinn. Es geht darum, durch kombinatorische Bemühungen Singles mit zueinander passenden Eigenschaften zusammenzubringen. Das Problem ist dem Computer einer Datingagentur geläufig. ◁

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

AUTOR

PREISRÄTSEL

Überholfreude

Von Paul von der Heyde

Für Alf, Bea, Carl und Dora besteht der Spaß beim Joggen im Überholen. Eine einfache Regel sorgt für eine gerechte Verteilung des Vergnügens: Bei einem Lauf überholt jeder der vier genau einmal einen, einmal zwei und einmal alle drei Vorauslaufenden. Im Übrigen laufen sie in einer Reihe, und es schert stets nur einer zum Überholen aus.

Heute starten sie in der Reihenfolge A B C D: Dora voraus, gefolgt von Carl, Bea und Alf, und stellen im Ziel fest, dass jeder eine ungerade Anzahl von Malen überholt wurde. In welcher Reihenfolge kamen sie ins Ziel?

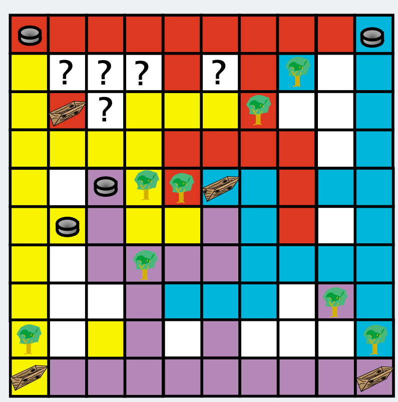
Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg.

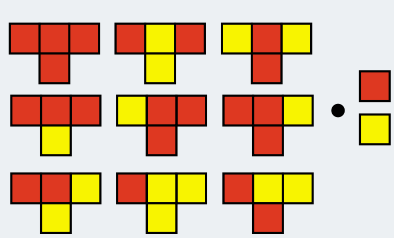
Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir drei batterielose Taschenlampen »Everlight XXL«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 12. April 2005, eingehen.

Lösung zu »Jans zerstrittene Herde« (Februar 2005)

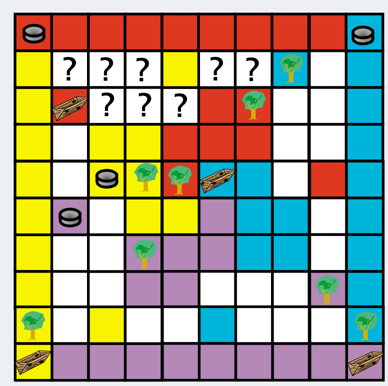
Die Weideflächen der vier Kühe gehen durch Drehung um 90 Grad auseinander hervor. Gerhard Guthöhrlein aus Marburg fand zwei Grundformen (unten und rechts) mit Varianten: Die Felder mit Fragezeichen sind durch jeweils einen der Bausteine darunter zu ersetzen und die weißen Felder symmetrisch zu füllen. Das ergibt $2 \cdot 9 + 3 \cdot 16 = 66$ Lösungen.

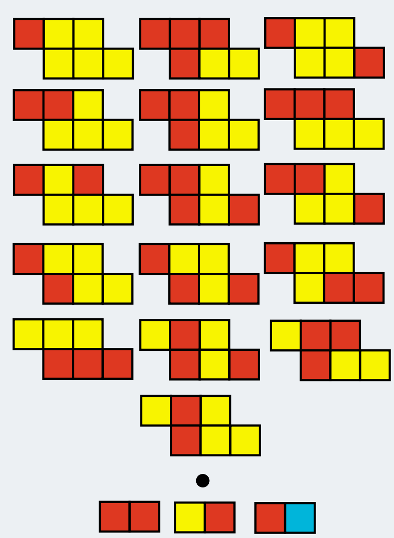
Der Gewinner des »Globus 4 Kids« ist Kent Kwee, Marburg.





Eine Online-Lösungshilfe finden Sie unter www.stephan-eisenbart.gmxhome.de/jans_herde/index0.html.





Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.