Das Frauenversteher-Spiel

Wer die geheimsten Gedanken einer Frau erraten kann, gewinnt ihre Gunst? Aussichtslos. Schnöde Taktik mit etwas Wahrscheinlichkeitsrechnung führt zum Ziel.

Von Christoph Pöppe

Fünfzig Männer wetteifern um die Gunst einer schönen Frau. Ein großes Turnier wird ausgefochten, bei dem nacheinander alle Kandidaten bis auf drei aus dem Rennen geworfen werden. Erst an dieser Stelle des Spiels geht es um die Frage, wie gut eigentlich jeder der drei Männer zu der begehrten Frau passt. Nicht dass sie einen von ihnen auswählen dürfte; aber immerhin soll der Sieger der Endausscheidung derjenige sein, der die Gedanken der Dame am besten erfühlen kann.

Die Rede ist nicht von einem Märchen oder einem mittelalterlichen Ritterspiel. Es geht auch nicht um ein Königreich. Der Gewinner darf sich nur glücklich schätzen, einen Abend mit der Schönen zu verbringen. Das ist das »Singled Out Game«, das der Musik-Fernsehsender MTV von 1995 bis 1997 in seinem amerikanischen Programm spielte. Die Moderatorin Jenny McCarthy und ihre Nachfolgerin Carmen Electra gaben der Dating-Show ein Gesicht, bevor sie als Serienheldinnen in »Baywatch« zu weit größerer Berühmtheit kamen. Um die politische Korrektheit zu wahren, gab es dasselbe Spiel auch mit umgekehrter Rollenverteilung: Fünfzig Frauen durften sich um einen attraktiven Mann reißen. Eine deutsche Kopie der Sendung lief 1996/97 bei Sat. 1 unter dem Namen »Sommer sucht Sprosse« (Bild rechts).

Die Vorrunden dienen vornehmlich zur Belustigung des Fernsehpublikums; da man sich ohnehin lächerlich macht, sind besondere taktische Fähigkeiten nicht gefragt. Aber die Schlussrunde! Der Moderator stellt der Frau eine Ja-Nein-Frage. Die Frau notiert ihre Antwort an verborgener Stelle und schweigt. Die drei Finalisten – nennen wir sie Arthur, Benjamin und Carsten – äußern nacheinander ihre Vermutung darüber, ob die Frau mit »Ja« oder »Nein« geantwortet hat; sie können also nur richtig oder falsch raten. Dann wird die Antwort aufgedeckt und das Frage-Antwort-Spiel wiederholt. Sieger der Show ist, wer als Erster fünf richtige Antworten gegeben hat. Wenn mehr als ein Kandidat auf einmal dieses Ziel erreicht, wird ausgelost.

Teilnehmer an dem Spiel sollten eine elementare Weisheit beherzigen: Frauen verstehen ist aussichtslos – jedenfalls in dieser Situation. Der Mathematiker Kennan Shelton vom Rhodes College in Memphis (Tennessee) vermutet, dass die Frau ihre Antwort durch einen schlichten Münzwurf oder etwas ähnlich Zufälliges bestimmte. Jedenfalls hatten weder er noch die Herren auf der Bühne irgendeine Vorstellung von ihren geheimen Gedanken. Was kann Mann tun, um unter diesen Umständen noch gut abzuschneiden?

Keinen Sinn suchen!

Darauf hat Shelton einige interessante Antworten zu bieten. Die erste: Arthur kann eigentlich nichts anderes tun, als seinerseits eine Münze zu werfen. Aber Benjamin hat ihm gegenüber einen kleinen Vorteil: Er weiß, was Arthur gesagt hat. Davon weiß er zwar nicht besser, was die Frau denkt – erstens ist das sowieso aussichtslos, und zweitens ist Arthur auch nur ein Mann –, aber er kann diese Kenntnis zu taktischem Verhalten nutzen. Das gilt in noch höherem Maße für Carsten. Im Endeffekt sieht es schlecht aus für Arthur, vor allem wenn Benjamin und Carsten kooperieren.

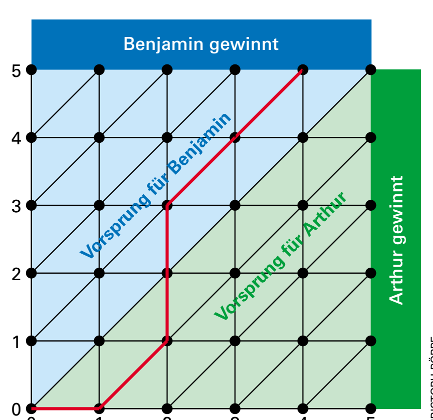
Betrachten wir zur Einstimmung die vereinfachte Situation mit nur zwei Helden – Carsten ist für diese Überlegung aus dem Spiel. Arthur rät irgendwie. Benjamin hat nun mehrere Möglichkeiten: Er sagt dasselbe wie Arthur, er sagt das Gegenteil, oder er macht seine Antwort ebenfalls vom Zufall abhängig.

Alle drei Strategien scheinen nicht besonders attraktiv. Wenn Benjamin Arthur kopiert, erreichen sie irgendwann im Gleichschritt die fünf Richtigen und damit den Losentscheid. Wenn er regelmäßig Arthur widerspricht, hängt sein Vorankommen nur vom Zufall ab, ebenso wenn er selbst unabhängig von Arthur eine Münze wirft. In allen drei Fällen beträgt seine Gewinnchance genau 50 Prozent.

Benjamin kann sich jedoch durch einen einfachen Trick einen beträchtlichen Vorteil verschaffen. Solange er in seiner Punktzahl hinter Arthur liegt oder allenfalls gleichauf, widerspricht er ihm. Sowie er aber in irgendeinem Stadium des Spiels mehr Punkte hat als Arthur, wiederholt er ab da brav dessen Antworten. Damit rettet Benjamin einen einmal zufällig erreichten Vorsprung über den Rest des Spiels hinweg bis zum unvermeidlichen Ende.

Bezeichnen wir mit x die Differenz »Arthurs Punktzahl minus Benjamins Punktzahl«. Am Anfang ist $x = 0$, und wenn beide Spieler naive Strategien verfolgen, dann wird in jedem Spielzug x um eins größer (Arthur richtig, Benjamin falsch), um eins kleiner (Arthur falsch, Benjamin richtig) oder bleibt unverändert (beide antworten gleich richtig oder gleich falsch). x steigt oder fällt jeweils mit Wahrscheinlichkeit 1/4.

Damit ist die Bewegung von x das, was die Statistiker einen *random walk* (»Irrfahrt«) nennen. Wie beim Torkeln eines Betrunkenen wird zwar die Verteilung der Zufallsvariablen mit der Zeit immer breiter, das heißt, der Wert von x wird immer unsicherer, aber sie bleibt »gerecht«, nämlich symmetrisch um die



Das ungleiche Ratespiel von Arthur und Benjamin als *random walk* in einem Gitter: Nach der vierten Frage hat Benjamin zufällig einen Vorsprung, den er bis zum Schluss hält, indem er Arthurs Antworten wiederholt.

Null verteilt. Ein Vorsprung für den einen ist genauso wahrscheinlich wie einer für den anderen.

Durch Benjamins hinterhältigen Trick bleibt allerdings x auf –1 fixiert, wenn es irgendwann im Laufe der Zeit diesen Wert erreicht. Das ist in der Sprache der Statistiker ein »*random walk* mit absorbierender Grenze«. Ein Teilchen wandert zufällig die x-Achse entlang, bleibt aber kleben, sowie es an die Wand gerät, die bei –1 aufgestellt ist.

Für diese Fälle hat die Statistik eine traurige Nachricht. Auf die Dauer bleibt mit Wahrscheinlichkeit 1 jedes Teilchen kleben. Das ist der Fluch des Glücksspielers, der auch dann zuschlägt, wenn das Glücksspiel an sich fair ist, also in jeder Runde mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Euro Gewinn wie einen Euro Verlust beschert: x ist in diesem Fall der Geldvorrat des Spielers, und der nimmt irgendwann rein per Zufall den Wert null an, wenn der Spieler nicht rechtzeitig aufhören kann.

Für unser Frauenversteher-Spiel bedeutet das: Benjamin hat einen Vorteil, der Arthur keine Chance ließe, wenn das Spiel beliebig lange dauern würde. Es dauert aber nur so lange, bis der erste Kandidat fünf Punkte erreicht. Deswegen ist Benjamins Vorteil auch nicht erdrückend, aber immer noch erheblich.

Um ihn wirklich auszurechnen, trägt man alle möglichen Spielstände in ein Koordinatensystem ein. Arthurs Punktzahl wird nach rechts abgetragen, Benjamins nach oben (Bild links). Wenn Arthur richtig rät und Benjamin nicht, ist es ein Schritt nach rechts, im umgekehrten Fall einer nach oben, wenn beide richtig raten, geht es nach schräg oben, und wenn sie beide falsch liegen, passiert gar nichts: Es ist so, als ob diese Frage nie gestellt worden wäre. Diesmal verläuft also der *random walk* über die Gitterpunkte nicht einer Linie (der x-Achse), sondern einer Ebene. Wenn der Weg des Punkts, der den Spielverlauf beschreibt, nach oben über die Winkelhalbierende hinausgeht, kann Benjamin ihn durch fleißiges Nachplappern in »seiner« Hälfte halten, bis er die Gewinnlinie in seinem Sinne durchstößt.

Um nun die Gewinnwahrscheinlichkeit für Benjamin zu berechnen, bestimmt man zunächst, wie viele denkbare Wege durch jeden der Gitterpunkte verlaufen. Das geht im Prinzip ganz einfach, in der Praxis allerdings etwas mühsam: Ein Gitterpunkt ist von seinem linken, seinem unteren und seinem linken unteren Nachbarn in jeweils einem Schritt erreichbar. Also ist die Anzahl der Wege, die bis zu diesem Gitterpunkt führen, gleich der Summe der Anzahlen der Wege, die zu seinen unmittelbaren Vorgängern führen; und die hat man einen Rechenschritt vorher schon bestimmt. So arbeitet man sich, von links unten beginnend (alle Wege fangen bei (0, 0) an), durch das Gitter hindurch.

Am Ende einer langen Rechenarbeit steht eine überraschend einfache Formel. Arthurs Gewinnchance ist genau 1/2, wenn eine einzige richtige Antwort zum Gewinnen ausreicht. Mit jedem zusätzlich geforderten Punkt sinkt seine Chance um den Faktor $(1-1/(2k))$, wobei k die Nummer des Punkts ist. Ist also das Spiel nach zwei richtigen Antworten zu Ende, so bleibt Arthur noch eine Chance von $(1/2)\cdot(1-1/(2\cdot 2))=3/8$, mit drei Antworten sinkt sie auf 5/16, und mit fünf zu erreichenden Punkten bleibt ihm noch ein knappes Viertel: 63/256.

Ein flotter Dreikampf mit wechselnden Bündnissen

Was geschieht, wenn nun der dritte Kandidat wieder hinzutritt? Carsten verfügt von allen drei Männern über die meiste Information, also sollte er auch die günstigste Position haben. Das stimmt auch, allerdings ist sein Vorteil überraschend gering und auch nur dann realisierbar, wenn er nicht seinen unmittelbaren Vorteil sucht.

Allgemein gilt: Der mit der Minderheitsmeinung (wenn es einen gibt) ist stets im Vorteil. Denn wenn er gewinnt, hat er von seinem einen Punkt mehr als die beiden anderen, die dann immer noch gegeneinander konkurrieren müssen. Wenn also Arthur und Benjamin sich einig sind, wird Carsten die Gegenposition beziehen. Wenn sie einander widersprechen, bleibt Carsten nichts anderes übrig, als einem der beiden beizupflichten und diesen dadurch mit in die ungünstige Mehrheitsposition zu reißen.

Wenn Benjamin Arthur widerspricht, ist Carsten sauer, weil Benjamin ihm die schöne Minderheitenposition verdorben hat. Also wird er vielleicht Benjamin beipflichten und ihn so an seinem Schaden teilhaben lassen – aus Rache oder zumindest als Drohung, damit Benjamin fortan gefügiger spielt. Die Drohung geht jedoch ins Leere. Benjamin kann sich nämlich überlegen, dass es für ihn, einerlei wie Carsten spielt, ▷


SAT1 / LINTNER

»Sommer sucht Sprosse« vom 13. September 1997 bei Sat.1: Drei Kandidaten wetteifern im Frage-und-Antwort-Spiel um Petra, die ehemalige Vize-»Miss Österreich«.

▷ von Vorteil ist, Arthur zu widersprechen. Dagegen ist es für Carsten sinnvoll, seine Rachegelüste zu unterdrücken und Arthur beizupflichten, womit er Benjamin einen »unverdienten« Vorteil verschafft. Diese Strategienkombination »Benjamin egoistisch, Carsten nachsichtig« ist ein so genanntes Nash-Gleichgewicht. Das heißt, keiner der Spieler kann sich durch einseitiges Abweichen von seiner Haltung einen Vorteil verschaffen.

Wenn schließlich beide die Möglichkeit in Betracht ziehen, unabhängig von den anderen ihre Spielzüge nach dem Zufall zu wählen, gibt es zwei Nash-Gleichgewichte. All das kann man nicht mehr durch geschicktes algebraisches Rechnen belegen, sondern muss die verschiedenen Möglichkeiten vom Computer auszählen lassen.

Der späte Sieg des Einfühlungsvermögens

Und wenn nun Arthur doch ein Frauenversteher ist? Nicht dass er der schönen Unbekannten jeden Gedanken von den Augen ablesen könnte. Aber nehmen wir an, seine Chance, ihre Antwort richtig zu erraten, ist größer als 1/2; nennen wir sie p. In unserem Diagramm sind dann Schritte nach rechts wahrscheinlicher als solche nach oben. Wieder gilt, dass Arthurs Chance umso schlechter steht, je länger das Frage-und-Antwort-Spiel dauert. Für den Grenzwert unendlich vieler Fragen lässt sie sich durch eine einfache Formel ausdrücken: Für $p > 1/2$ gewinnt Arthur mit Wahrscheinlichkeit $2 - 1/p$, oder eben etwas mehr, wenn es nur endlich viele Fragen sind.

Dieser Wert ist genau dann gleich 1/2, wenn $p = 2/3$ ist. Was lernen wir daraus? Man muss schon ein ziemlich guter Frauenversteher sein – zwei Drittel aller Gedanken richtig erraten –, um den Vorteil des dumpfsinnigen, aber taktisch geschickten Nachplapperers aufwiegen zu können. ◁

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

The singled out game. Von Kennan Shelton in: Mathematics Magazine, Bd. 78, Heft 1, S. 15, 2005

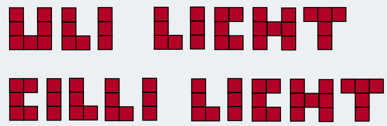
Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

AUTOR UND LITERATUR

PREISRÄTSEL

Patchworkfamilie

Von Roland Mildner



Uli Licht und seine Frau Cilli bemerken, dass ihre Namen eine besondere Eigenschaft haben. Zeichnet man die Buchstaben beider Vor- und Nachnamen im eckigen Stil auf ein kariertes Papier und schneidet sie aus (siehe Skizze rechts oben), dann lassen sich alle Buchstaben lückenlos und überdeckungsfrei zu einem einzigen Quadrat zusammenlegen.

Wie sieht eine Lösung aus?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D–69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir fünf schwebende Kugelschreiber »Pen Ultimate«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 14. Juni 2005, eingehen.

Lösung zu »Überholfreude« (April 2005)

Die Reihenfolge im Ziel ist BADC. Das heißt, Carl kommt als Erster ins Ziel, gefolgt von Dora, Alf und Bea.

Alle Permutationen von ABCD ergeben 24 mögliche Zieleinläufe. Da jeder Läufer genau sechsmal einen anderen überholt und jeder eine ungerade Anzahl von Malen überholt wird, muss sich die Position jedes Läufers um eine ungerade Anzahl an Plätzen verändern. Nur bei vier der 24 denkbaren Zieleinläufe ist dies auch tatsächlich der Fall: DCBA, BCDA, DABC und BADC.

Hartmut Fenner aus Hamburg schloss davon drei durch Widerspruch aus:

Bei DCBA rückt Alf drei Plätze vor. Da er selbst sechsmal überholt, kann er nur dreimal selbst überholt werden; diese drei Möglichkeiten werden bereits ausgeschöpft, indem jeder andere alle drei Mitläufer überholt. Dora hingegen verliert drei Plätze. Da auch sie sechsmal selbst überholt, wird sie selbst neunmal überholt, also von jedem der anderen genau dreimal. Dies kann nur sein, wenn sie ihrerseits jeden anderen zweimal überholt. Das widerspricht der Voraussetzung, dass Alf von jedem nur einmal überholt wird.

Auch bei BCDA gewinnt Alf drei Plätze, überholt also sechsmal und wird dreimal überholt. Er ist somit an neun Überholvorgängen beteiligt. Da jeder Läufer sechsmal überholt, gibt es insgesamt 24 Überholvorgänge und damit 15 ohne Alf. Bea, Carl und Dora haben am Ziel noch ihre ursprüngliche Reihenfolge. Jeder überholt also jeden der beiden anderen genauso oft, wie er selbst von ihnen überholt wird. Also ist die Anzahl der Überholvorgänge ohne Alf gerade: Widerspruch.

Für DABC verläuft die Argumentation analog. Dora verliert drei Plätze, überholt sechsmal und wird neunmal überholt. Sie ist also an 15 Überholvorgängen beteiligt und an neun nicht. Diesmal behalten Alf, Bea und Carl ihre Reihenfolge, und die Anzahl der Überholvorgänge ohne Beteiligung von Dora muss gerade sein. Neun ist aber ungerade.

Für BADC genügt es nun, ein Lösungsbeispiel zu finden (der jeweils Überholende ist rot markiert): ABCD; BCDA; CDAB; DABC; ABCD; ACDB; ADBC; DBAC; BADC; ABDC; BADC; BACD; BADC.

Mit Hilfe des Computers lassen sich insgesamt 47969 Varianten dieses Zieleinlaufs finden.

Die Gewinner der drei Taschenlampen »Everlight« sind Thomas Fehsenfeld, Kaufbeuren; Falk Lehmann, München; und Simon Beier, Rabenau.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.