

Das Minderheitsspiel

Anders zu sein als die anderen ist lukrativ, aber nicht einfach – vor allem, wenn man nur über einen beschränkten Verstand verfügt.

Von Christoph Pöppe

Die Bar »El Farol« in Santa Fe (New Mexico) ist ein beliebtes Nachtschwärmerziel. Jeden Donnerstagabend gibt es irische Musik, zu anderen Zeiten auch Flamenco. An lauen Sommerabenden wird es häufig so voll, dass einem das Gedränge den Spaß verdirbt.

Nehmen wir an, es ist ein lauer Sommerabend, und das Musikprogramm entspricht unserem Geschmack. Sollen wir hingehen? Der Wirtschaftswissenschaftler W. Brian Arthur, der am Santa Fe Institute in der gleichnamigen Stadt arbeitet, stellte die Frage in wissenschaftlicher Form, und so ist sie als das »El Farol bar problem« bekannt geworden.

Es ist ein überraschend schwieriges Problem, jedenfalls wenn man es vom Standpunkt der klassischen Ökonomen betrachtet. Diese Leute glauben nämlich immer noch an den Homo oeconomicus, jenes fiktive Wesen, das die ihm zugänglichen Informationen fehlerlos verarbeitet und daraufhin unter mehreren Alternativen diejenige auswählt, die seinen Nutzen maximiert. Auf einem Gütermarkt agieren zahlreiche Exemplare dieser Spezies mit nichts als dem eigenen Profit im Sinn und erreichen trotzdem einen für alle optimalen Zustand (Spektrum der Wissenschaft 5/2004, S. 60). Aber wenn diese so ungeheuer rationalen Wesen zur Bar wollen – oh weh!

Nehmen wir zur Vereinfachung an, dass sie alle nur das Eine wollen: zur Bar, wenn es nicht zu voll ist, und ansonsten zu Hause bleiben. Wird es heute Abend voll werden? Dazu müssten die Leute aus den verfügbaren Informationen – die für alle gleich sind – Schlüsse ziehen und eine Prognose stellen – die für alle gleich ist, denn sie sind ja alle rational. Also gehen sie entweder alle hin, sodass es voll wird, oder bleiben alle zu Hause und lassen sich einen schönen Abend entgehen. Frustriert sind sie auf jeden Fall.

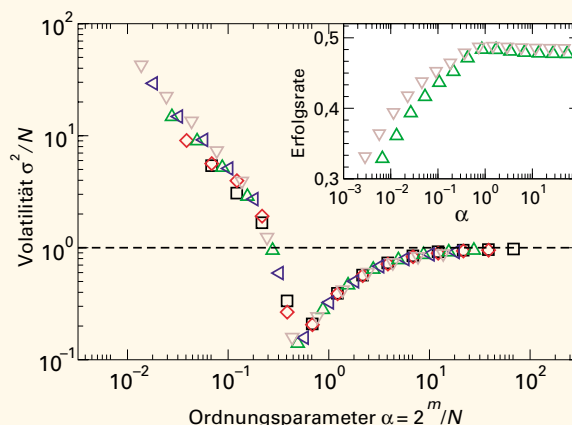
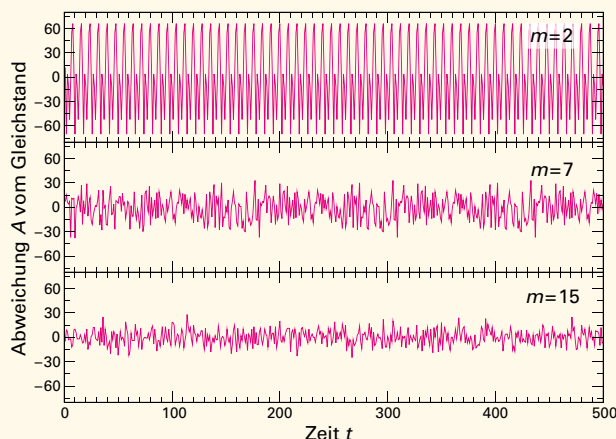
Gegen den Strom schwimmen

Am Ende gewinnen diejenigen, die in der Minderheit sind. Also kann es kein Rezept zum Gewinnen geben, denn wenn es eines gäbe, würden alle es anwenden, und dann wären sie keine Minderheit mehr. Für die Bar muss das mit der Minderheit nicht genau stimmen: Wenn es 500 Interessenten gibt und 100 Sitzplätze, dann sind 200 Barbesucher eine Minderheit gegenüber den 300 Daheimgebliebenen und trotzdem frustriert. Aber die wesentlichen Züge des Problems bleiben erhalten, wenn wir unterstellen, dass es genau doppelt so viele Interessenten wie Plätze gibt – plus einen, also zum Beispiel 301 Interessenten für 150 Plätze. (Wozu den einen Überzähligen? Damit man sich über den Spezialfall der Stimmengleichheit keine Gedanken zu machen braucht.)

Situationen von der Art des Minderheitsspiels gibt es zuhauf. Der Autofahrer, der zwei staugefährdete Wege zum selben Ziel zur Auswahl hat, möchte denjenigen wählen, für den sich die Minderheit entscheidet. Der Urlauber reist, um dem Massenandrang zu entgehen, an den Strand, den die Zeitung als Geheimtipp empfohlen hat. Das Rehlein äst am liebsten dort, wo die anderen ihm nichts wegessen. Nehmen wir an, der Börsenspekulant müsse sich fürs Kaufen oder fürs Verkaufen entscheiden, bevor er weiß, was die anderen tun. Dann möchte er unter seinesgleichen in der Minderheit sein, denn viele Käufer bei wenigen Verkäufern treiben den Preis hoch, was den Verkäufern gefällt, und umgekehrt.

Da das Problem in so vielen Verkleidungen vorkommt, lohnt eine mathematische Abstraktion. Damien Challet von der Universität Fribourg (Schweiz) hat das getan und mit seinem »Minority Game« eine Flut von Veröffentlichungen ausgelöst. Sein Minderheitsspiel hat viele Mitspieler (»Akteure«) und verläuft nach folgenden Regeln: In jedem Spielzug kann ein Akteur zwischen zwei Alternativen A (zur Bar gehen; kaufen) und B (zu Hause bleiben; verkaufen) wählen. Wer sich nach dem Zug als zur Minderheit gehörig herausstellt, bekommt einen Pluspunkt, die Mitglieder der Mehrheit bekommen je einen Minuspunkt. Ziel des Spiels ist, in vielen Runden eine möglichst hohe Gesamtpunktzahl zu erreichen.

Die Spieler können sich untereinander nicht verständigen. Die einzige verfügbare Information ist der Ausgang der vergangenen Spielzüge, wann also im bisherigen Spielverlauf A und wann B in der Minderheit war.



BEIDE GRAFIKEN: ESTEBAN MORO, UNIVERSITÄT CARLOS III, MADRID



BEIDE FOTOS: EL FAROL, SANTA FE

▲ In der Bar »El Farol« (»Die Laterne«) in Santa Fe (New Mexico) wird es an manchen Abenden richtig voll.



Was soll man tun? Jedenfalls nicht das, was die anderen tun. Die Ausweichempfehlung zur Staumeldung, der Urlaubs-Geheimtipp in der Zeitung, der Börsentipp: Sie alle können gut recherchiert und vernünftig sein – und widerlegen sich dennoch selbst, sowie sie massenhaft befolgt werden.

Stattdessen könnten die El-Farol-Fans zum Beispiel eine Münze werfen und nur zur Bar gehen, wenn »Kopf« erscheint. Dann ist rein per Zufall immer ziemlich genau die Hälfte da. Allgemein sorgt das Münzwurfverfahren dafür, dass die Minderheit stets knapp unter 50 Prozent liegt und damit so hoch wie nur möglich. Das ist günstig für das Gemeinwohl und damit auch günstig für jeden Einzelnen, der durch das Zufallsverfahren auf die Dauer seinen gerechten Anteil abkriegt. Allerdings gibt es immer wieder erhebliche Abweichungen von den 50 Prozent und damit ungenutzte Gewinnmöglichkeiten; einzelne Angehörige einer erdrückenden Mehrheit hätten sich ja anders entscheiden und damit Punkte kassieren können, ohne anderen welche wegzunehmen – wenn sie das vorher gewusst hätten.

Oder die Spieler legen sich feste Gewohnheiten zu. Wenn eine Clique im-

mer nur an geraden Tagen zur Bar geht und die andere an ungeraden, und beide Cliquen umfassen jeweils ziemlich genau die halbe Bevölkerung, dann ist jeden Tag eine starke Minderheit glücklich.

Ein solches koordiniertes Verhalten kann sich selbst dann einstellen, wenn es keine Verständigung der Akteure untereinander gibt. Ein Mensch, der sich regelmäßig in der Mehrheit wiederfindet, kann genau das zum Anlass nehmen, seine Gewohnheiten zu ändern. Dadurch schrumpft die Mehrheit und wächst die Minderheit, bis beide fast genau gleich groß sind.

Partygänger im Computer

So oder so ähnlich machen es die Börsengurus auch. Sie haben zwar nicht gerade feste Gewohnheiten, aber verschiedene Analyseprogramme zur Auswahl. Jedes dieser Programme nimmt die Kurse der letzten Tage entgegen und errechnet daraus eine Prognose für den Kurs von morgen, was auf eine konkrete Verhaltensempfehlung – kaufen oder verkaufen – hinausläuft. Wie das einzelne Programm zu seiner Empfehlung kommt, bleibt dessen Geheimnis. Der Spekulant, der zunächst nicht weiß, was er von den verschiedenen Programmen halten soll, testet sie alle aus und folgt dann der Empfehlung desjenigen, das in der Vergangenheit am häufigsten richtig gelegen hat.

Das ist die Grundidee hinter Challets Version des Minderheitsspiels, bei der ein Computerprogramm alle Akteure simuliert. Keiner von ihnen würfelt; aber sie sind lernfähig, und vor allem kommen sie schon verschieden auf die Welt. Denn wenn sie alle gleich wären, hätten sie das gleiche Pech wie die oben beschriebenen rationalen Wesen.

Jeder Akteur ist von Geburt an nach dem Zufallsprinzip mit einem Satz von so genannten Strategien ausgestattet. Das

sind Primitivversionen der genannten Analyseprogramme: Man gibt ihnen die Ergebnisse der letzten, sagen wir, sechs Spielzüge, und sie geben eine Verhaltensempfehlung für den nächsten Zug.

Für jedes der vergangenen Ergebnisse gibt es nur zwei Möglichkeiten. Die kann man nach Computerart durch die Binärziffern 0 und 1 ausdrücken, die gesamte Vorgeschichte der letzten sechs Züge ist also nichts weiter als eine sechsstellige Binärzahl wie zum Beispiel 101101, alle möglichen Vorgeschichten sind die Binärzahlen von 000000=0 bis 111111=63 im Dezimalsystem, und eine Strategie ist nichts weiter als eine Tabelle, die dem Spieler zu jeder Vorgeschichte, sprich jeder Nummer von 0 bis 63, ansagt, ob er sich für *A* oder *B* entscheiden soll.

Man kann auch sagen: Jeder Spieler ist von der Natur mit einem beschränkten Verstand ausgestattet. Er kann sich nur die letzten sechs Ereignisse merken; das ist alles, was man über den Zustand der Welt weiß, und diese Information ist für alle Spieler gleich. In verschiedenen Simulationen haben Challet und seine Kollegen die Reichweite des Spielergedächtnisses variiert; nennen wir sie *m*. Anstelle von *m* = 6 gab es also Spiele mit dumpfsinnigen Teilnehmern, die sich gerade noch an vorgestern erinnern konnten (*m* = 2), und solchen mit dem Zwei-Wochen-Elfantengedächtnis (*m* = 14).

Der computersimulierte Spieler sagt also *A* oder *B* und bekommt nach dem Spielzug die Auskunft zurück, ob er gewonnen hat – das heißt zur Minderheit gehörte – oder nicht. Daraufhin schaut er für jede seiner Strategien nach, ob sie mit ihrer Empfehlung richtig gelegen hat; wenn das der Fall war, gibt er ihr einen Pluspunkt. Auf die Dauer sammeln die verschiedenen Strategien in seinem Kopf unterschiedlich viele Punkte an, und der Spieler folgt bei jedem Zug der ►

◀ Links: $N=301$ Individuen spielen das Minderheitsspiel in der Variante, bei der die Belohnung proportional zur Abweichung *A* vom Gleichstand ist. Je größer der Verstand (*m* ist die Reichweite des Gedächtnisses), desto besser die allgemein erwünschte Annäherung an den Gleichstand. Rechts die Volatilität (»Flüchtigkeit«, Schwankungsintensität) von *A* und die durchschnittliche Erfolgsrate des einzelnen Akteurs, aufgetragen gegen den Ordnungsparameter $\alpha = 2^m/N$ für das Minderheitsspiel mit $N=101$ (□), 201 (◇), 301 (△), 501 (◁) und 701 (▽).

▷ Strategie mit der höchsten Punktzahl. Gibt es mehr als eine Strategie mit maximaler Punktzahl, entscheidet das Los.

Ein Akteur kann also aus Erfahrung lernen, indem eine Strategie eine andere in der Punktzahl überrundet. Und der Lernprozess ist erfolgreich! In vielen Computersimulationen stellten Challet und seine Kollegen fest, dass seine Akteure ein besseres Gesamtergebnis, das heißt eine höhere Punktesumme, erzielten als eine gleiche Anzahl würfelter Spieler. Irgendwie ist es ihnen also gelungen, aus der kärglichen Information über die vergangenen Ergebnisse Gewinn zu ziehen, und zwar umso besser, je länger ihr Gedächtnis zurückreichte (Bild S. 104). Allerdings gewannen sie diese Information ohne Sinn und Verstand, durch schlichtes Austesten der Strategien und Auswahl der jeweils besten.

Taugen diese Chartanalyse-Programme etwa doch etwas? Vorsicht. Das Ergebnis der würfelnden Spieler zu über-

treffen gelingt nur unter gewissen Voraussetzungen. Die Forscher variierten die Gesamtzahl N der Spieler ebenso wie die Reichweite m des Spielergedächtnisses. Dabei stellte sich heraus, dass es für den Ausgang des Spiels nicht wirklich auf beide Zahlen N und m ankommt, sondern auf ihre Kombination: $\alpha = 2^m/N$ heißt der entscheidende Faktor. Wenn α ungefähr $1/2$ ist, funktioniert die Kooperation unter den Spielern hervorragend. Für große α nähert sich die Qualität der Ergebnisse dem Wert für die Würfelspieler, für sehr kleine α ist sie noch weit schlechter (Bild S. 104 rechts).

Jeder möchte eine Meinung haben, die sonst keiner teilt

Der Parameter α ist so etwas wie eine Meinungsvielfalt, allerdings gemessen an der Gesamtzahl der Meinungsträger. Erinnern wir uns: Ein einzelnes Mitglied der Gesellschaft bildet sich seine Meinung – sprich seine Strategie – zwar aus

der Erfahrung; es hat jedoch von Geburt an nur relativ wenige Strategien, unter denen es überhaupt wählen kann. Wenn es nun ungefähr halb so viele denkbare Meinungen gibt wie Spieler überhaupt ($\alpha = 1/2$), dann tut jeder Spieler gut daran, so individualistisch zu sein wie überhaupt möglich, das heißt sich eine Meinung zuzulegen, die von keinem anderen geteilt wird. Das ist die einzige Chance, häufiger als durch Zufall in die glückselige Minderheit zu geraten.

Diese Überlegung hat allerdings einen kleinen Haken. 2^m ist nicht etwa die Anzahl der möglichen Meinungen, sondern die Anzahl der für die Spieler unterscheidbaren Weltzustände. Da man zu jedem Weltzustand genau zwei verschiedene Meinungen haben kann (nämlich die Spielempfehlungen A und B), ist die Anzahl der denkbaren Strategien nicht 2^m , sondern viel größer, nämlich 2^{2^m} .

Um zu erklären, warum sich im Computerexperiment von den 2^{2^m} nur

PREISRÄTSEL

Rosenkavaliere

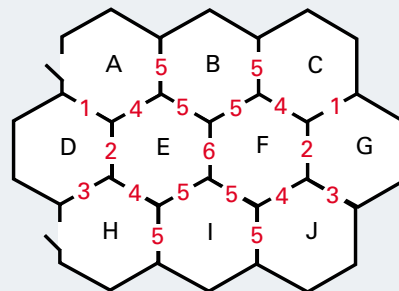
Von Roland Mildner

Aus einer Anzeige der Zeitschrift »Schloss und Hofhund«: »Königstochter nach besonderer Prüfung in liebevolle Prinzenhände abzugeben! Jeder Prinz des Landes ist aufgerufen, Schloss Hexagramm fünfmal über Raum A zu betreten und über Raum H zu verlassen (Skizze rechts). Dabei darf er bei einem Gang jeden Raum höchstens einmal betreten. An jeder Tür, die er durchschreitet, erhält er die in der Abbildung angegebene An-

zahl Rosen. Der Kavalier, welcher der Prinzessin am Ausgang beim ersten Gang 7 Rosen, beim zweiten 14, beim dritten 21, beim vierten 28 und beim fünften 35 Rosen überreicht, bekommt sie zur Frau.«

Nennen Sie jeweils eine Möglichkeit für die fünf Wege, die den Prinzen in die Ehe führen.

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg. Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir fünf



Sweatshirt-Jacken mit Spektrum-Logo. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 16. August 2005, eingehen.

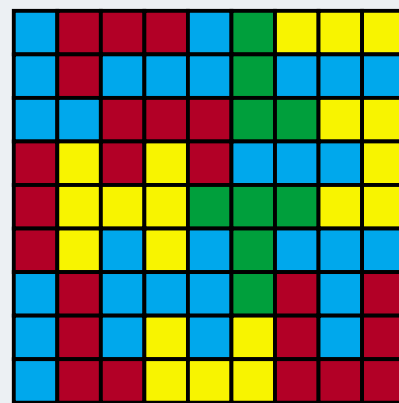
Lösung zu »Patchworkfamilie« (Juni 2005)

Rechts ist eine Möglichkeit abgebildet, wie die Quadratur der Lichts zu erreichen ist.

Wie viele Lösungen es gibt, ist unbekannt. So hat beispielsweise Helmut Meißner aus Oberaudorf mit einem Basic-Programm nach Lösungen gesucht und nach fünf Tagen und 500 ge-

fundenen Lösungen den Algorithmus abgebrochen.

Die Gewinner der fünf schwebenden Kugelschreiber »Pen Ultimate« sind Kristin Schantora, Weischlitz; Andrea Lochmahr, Wettstetten; Philipp Reintanz, Kassel; Klaus Timmel, Freiberg; und Ulrika Steinbrück, Rottenburg.



Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal [wissenschaft-online](http://www.wissenschaft-online.de) (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knebelerei.

bescheidene 2^m bemerkbar machen, betreiben Challet und seine Kollegen Geometrie im abstrakten Raum der möglichen Strategien. Zwei Strategien haben per Definition einen umso größeren Abstand voneinander, je mehr Unterschiede sie in ihren 2^m Spielempfehlungen aufweisen. Ein Unterschied an einer einzigen Stelle macht sich auch nur entsprechend selten bemerkbar. Zwei Spieler mit derart ähnlichen Strategien werden sich nur allzu häufig mit der gleichen Meinung wiederfinden und damit eher in der Mehrheit als in der Minderheit. Entsprechend weniger Punkte sammeln diese Strategien in der persönlichen Bilanz jedes Spielers an.

Das hat denselben Effekt, als würden die Spieler auf Punkten im abstrakten Strategieraum sitzen und abstoßende Kräfte aufeinander ausüben. Wer kann, wechselt die Strategie, das heißt, er hüpfte auf einen anderen Punkt, in dessen Umgebung es nicht so voll ist. Auf die Dauer stellt sich also im Strategieraum eine einigermaßen gleichmäßige Verteilung aus Punkten ein. Jeder von ihnen hat in seiner Umgebung so etwas wie eine Privatsphäre, die ihn einzigartig macht. Es ist dann nicht die Anzahl der Punkte im Strategieraum, auf die es ankommt, sondern die der einigermaßen komfortablen Privatsphären.

Das funktioniert aber nur, wenn es ausreichend Platz gibt! Wenn nämlich wegen zu kurzen Verstandes ($m=2$) sehr viele Leute in einem engen Strategieraum Platz finden müssen, geraten schon durch Zufall sehr viele auf ein und denselben Punkt; daran kann sich durch das Strategie-wechsel-dich-Spielchen nichts Wesentliches ändern. Die Bevölkerung zerfällt dann in relativ wenige Fraktionen, die jeweils einer Strategie anhängen und damit bei jedem Zug geschlossen in der Mehrheit oder der Minderheit landen. Fraktionswechsel sind zwar erlaubt, können aber dieser Vergrößerung der Entscheidungsprozesse nicht ernsthaft entgegenwirken.

Wenn dagegen α einen großen Wert annimmt, sitzen in einem weit gehend wüsten und leeren Strategieraum relativ wenig Leute – und merken nicht viel voneinander. Ein paar zufällig eng benachbarte Punkte wird es im Lauf der Zeit zwar etwas auseinander treiben, aber insgesamt gesehen ähnelt das Verhalten des Kollektivs doch sehr einer Zufallsbewegung.

Bei aller Inspiration, die das Spiel aus dem Verhalten der Menschen, vor allem der Partygänger und der Börsenspekulanten bezogen hat, ist es doch sehr abstrakt. Viele kleine Einheiten stehen in einer sehr speziellen Wechselwirkung miteinander und geraten dabei in die merkwürdigsten kollektiven Zustände. So etwas ruft unweigerlich die theoretischen Festkörperphysiker auf den Plan – Damien Challet ist selbst einer –, und die denken dann an Atome in einem Festkörper, Spins in einem magnetisierbaren Material und vor allem Phasenübergänge. Der Parameter α spielt dabei die Rolle einer Temperatur. Zur festen Phase gehören die Spieler, die ihre Meinung nicht mehr ändern, weil eine ihrer Strategien in der inneren Bilanz einen uneinholbaren Vorsprung hat; die anderen sind noch beweglich, »flüssig«.

Entscheidend: der gemeinsame Irrglaube

Zahlreiche Varianten des Spiels sind erdacht worden. Die Grundausstattung der Spieler mit Strategien wurde variiert. Zwei müssen es mindestens sein, damit sich überhaupt ein Lernprozess abspielen kann; mehr ändern nichts Wesentliches an den Ergebnissen, wie sich herausstellt. Es macht auch nur einen geringen Unterschied, wenn die Punkte für die Spieler nicht nach dem Ja-Nein-Prinzip vergeben werden (1 für die Minderheit, -1 für die Mehrheit), sondern proportional der Abweichung vom Gleichstand: je kleiner die Minderheit, desto größer die Belohnung für den Nonkonformisten.

Andere Interpretationen sind bei der hohen Abstraktheit ebenfalls möglich. So haben verschiedene Leute eine darwinistische Evolution mit ins Spiel gebracht: Alle paar Zeitschritte stirbt das Individuum mit der bis dahin schlechtesten Punktzahl und wird durch einen Klon des Punktbesten ersetzt, allerdings ohne dessen Lebenserfahrung: Die interne Bilanz der Strategien steht auf null wie bei einem Neugeborenen. Auch Mutationen wurden untersucht.

Dann kam die Überraschung. Der theoretische Physiker Andrea Cavagna, damals in Oxford, nahm den Spielern das Einzige, was sie zur Grundlage ihrer Entscheidungen nehmen konnten, nämlich die allen gemeinsame Erfahrung über die Vergangenheit, ersetzte sie durch irgendwelchen, für alle gleichen Nonsense, und es passierte – gar nichts!

Im Ganzen gesehen blieb das kollektive Verhalten der Spieler unverändert.

Das verblüfft und lässt die Tätigkeit der Chartanalysten in einem neuen Licht erscheinen. Gut, sie holen aus allgemein verfügbarer Information noch etwas heraus, das unter günstigen Umständen sogar realen Nutzen einbringt – aber nicht, weil diese Information etwas wert wäre. Aus der Vergangenheit an sich lernt man gar nichts. Man nutzt allein die Tatsache aus, dass alle anderen ebenfalls dem Irrglauben unterliegen, man könne aus der Vergangenheit etwas lernen. Das macht ihr Verhalten bis zu einem gewissen Grad berechenbar.

Ich habe hier einen Geheimtipp, den ich veröffentliche mit dem Ziel, dass alle Leute daran glauben: Es sind überhaupt nicht die Börsenkurse der letzten Woche, die ihr in eure Chartanalysen eingeben sollt. Es sind die Lottozahlen vom letzten Samstag. Mit einem wissenschaftlich getesteten Analyseprogramm, das ich euch hiermit zum kostenlosen Download anbiete – damit ihr alle es anwendet – und mit Zufallskomponenten versehen – damit es nicht so auffällt –, könnt ihr daraus die Kauf- und Verkaufsempfehlungen für die nächste Woche errechnen. Der Einzige, der konsequent gegen die Prognosen meines eigenen Programms spekuliert, bin ich – und werde steinreich dabei. Schön wär's. $\triangleleft$



Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

The Minority Game: an introductory guide. Von Esteban Moro in: Advances in condensed matter and statistical physics. Von Elka Korutcheva und Rodolfo Cuerno (Hg.). Nova Science Publishers, 2004

Irrelevance of memory in the minority game. Von Andrea Cavagna in: Physical Review E, Bd. 59, S. R3783, 1999

Emergence of cooperation and organization in an evolutionary game. Von D. Challet und Y.-C. Zhang in: Physica A, Bd. 246, S. 407, 1997

Inductive reasoning and bounded rationality. Von W. Brian Arthur in: The American Economic Review, Bd. 84, S. 406, 1994

Online-Versionen der angegebenen Literatur und weitere Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.