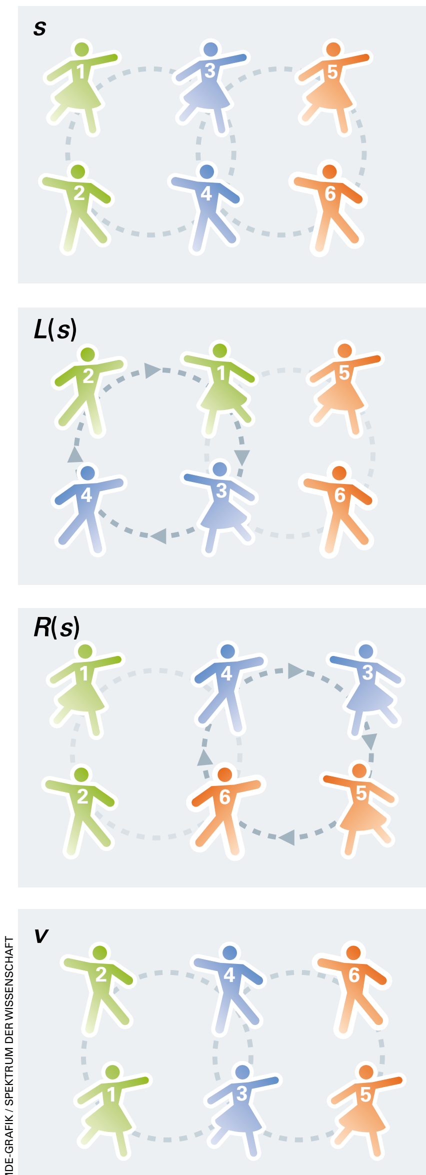
MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN

Englisch Tanzen in S_6

Ein Problem, das sich aus den Bewegungen einer Tanzgruppe ergibt, wird von einer losen Gruppe von Mathematikern über das Internet gelöst – mit Gruppentheorie.



Englisch Tanzen in Essex (S_6): Jede Tanzbewegung ist entweder *L* – die vier linken Tänzer wandern um 90 Grad im Uhrzeigersinn im Kreis – oder *R* – dieselbe Bewegung für die rechten vier Tänzer. Lässt sich durch Kombination dieser Bewegungen die Startaufstellung *s* in die Aufstellung *v* überführen, bei der die Partner jedes Paars vertauscht sind?

Von Christoph Pöppe

Beim bunten Tanzabend stellten sich die Paare im Kreis auf, die Mädchen außen, die Jungen innen. Gespielt wurde das englische Kinderlied von dem Hund des Bauern, der Bingo hieß. Am Ende jeder Strophe war der Name »Bingo« auf Englisch zu buchstabieren; mit jedem Buchstaben wanderten Jungen wie Mädchen eins nach links, dabei mit dem jeweils nächsten Tanzpartner Hände klatschend, und auf »O!« war es angesagt, dem dann aktuellen Tanzpartner in die Arme zu fallen – mehr oder weniger intensiv, je nach persönlichem Geschmack.

An jenem Abend hatte es mir Sabine mit ihren wunderschönen dunklen Knopfaugen angetan. Wir waren beide auf der Tanzfläche, »Bingo« wurde gespielt bis zum Abwinken, und in meinen Armen fanden sich viele Mädchen – aber nie Sabine! Wirklich schade.

Im Nachhinein ist der Grund dafür ziemlich klar: Offensichtlich war die Gesamtzahl der Paare auf der Tanzfläche ein Vielfaches von 5, sagen wir $5n$. Nach n Strophen Bingo hat man wieder seine Partnerin vom Anfang im Arm, das ganze Spiel beginnt von Neuem, und die restlichen $4n$ Mädchen bleiben unerreichbar.

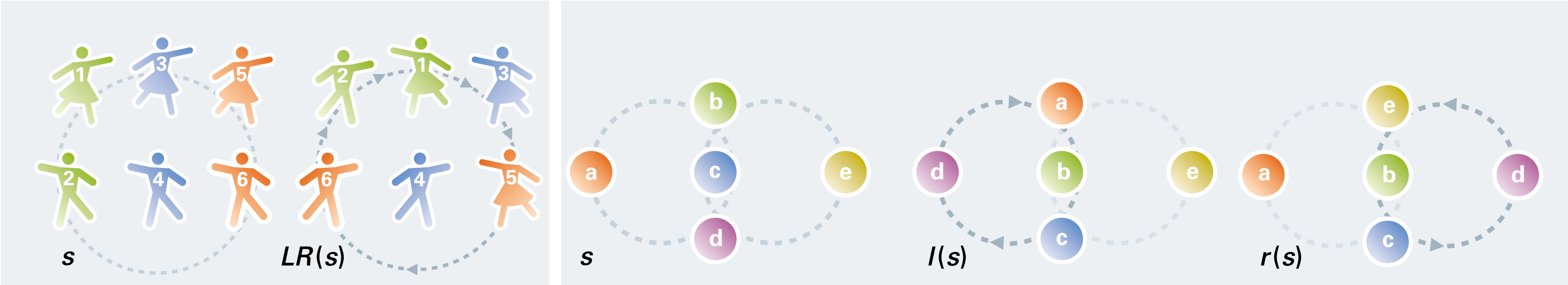
Wie heißt die Wissenschaft von den Tanzgruppen? Gruppentheorie! Nur sind die Mitglieder der mathematischen Gruppen nicht einzelne Knaben oder Mädchen, sondern ganze Bewegungen. »Alle Mädchen eins nach links rücken« ist ein Beispiel eines Gruppenelements; nennen wir es *M*. Man kann mehrere Bewegungen hintereinander ausführen: »Erst alle Mädchen eins nach links, dann alle Jungen eins nach rechts« ist auch eine Bewegung und damit ein Element der Gruppe. Wenn *J* die Bewegung »alle Jungen eins nach rechts« ist, nennt man die zusammengesetzte Bewegung einfach *JM*, in dieser – etwas gewöhnungsbedürftigen – Reihenfolge.

Allgemein spricht man von einer Gruppe, wenn man zwei ihrer Elemente irgendwie miteinander verknüpfen kann und dadurch wieder ein Element erhält. Dass die Elemente Bewegungen oder allgemeiner irgendwelche Abbildungen sind und die Verknüpfung darin besteht, diese Bewegungen hintereinander auszuführen, ist nur eine – wichtige – von vielen Möglichkeiten. Die Gruppenelemente können auch Zahlen sein und ihre Verknüpfung die Addition oder die Multiplikation zweier Zahlen. Wichtig ist, dass die Verknüpfung stets durchführbar und obendrein stets widerruflich ist: Zu jedem Element muss es ein »inverses« Element geben, das heißt eines, das dessen Wirkung gerade umkehrt. Der Vollständigkeit halber zählt man Nichtstun auch zu den Bewegungen; man nennt es das »neutrale Element« der Gruppe.

Das ist das Schöne an der Gruppentheorie: Sie ist so abstrakt, dass sie auf vielerlei passt, auf Bewegungen auf der Tanzfläche ebenso wie auf ganz gewöhnliche Zahlen und noch viel mehr. Was man aus dem einen Gebiet weiß, kann man auf das andere übertragen. So sind unsere Bewegungen im Rundtanz »eigentlich« nichts weiter als ganze Zahlen – »eins nach links« ist dasselbe wie 1 –, und die Verknüpfung von Abbildungen entspricht der Addition der entsprechenden Zahlen, allerdings mit einer kleinen Spezialität. Wenn dreißig Paare auf der Tanzfläche sind, dann ist dreißigmal nach links dasselbe wie Nichtstun – jedenfalls im Ergebnis –, oder auch $30=0$. Also ist unsere Tanzflächengruppe nicht die additive Gruppe $\mathbb{Z}$ der ganzen Zahlen, sondern die Gruppe $\mathbb{Z}_{30}$ der ganzen Zahlen »modulo 30«: Man rechnet wie gewohnt, nur addiert oder subtrahiert man bei Bedarf Vielfache von 30, um im Zahlenbereich von 0 bis 29 zu bleiben.

Bingo!

Wenn nun die einzig erlaubte Bewegung »fünf nach links« ist – nennen wir sie *B* wie Bingo –, geht es um die »von *B* erzeugte Untergruppe«. Das ist die Menge aller Elemente, die durch beliebig häufige Anwendung von *B* entstehen. In unserer Darstellung durch ganze Zahlen modulo 30 ist $B=5$, und die von *B* erzeugte Untergruppe ist schnell hingeschrieben: 5, 10, 15, 20, 25, 30, aber $30=0$, und neue Elemente kommen nicht hinzu. Die von *B* erzeugte Untergruppe hat nur sechs Elemente. Wären



EMDE-GRAFIK / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Die Bewegung *LR* (das »Produkt« von *L* und *R*) lässt Tänzer 4 an seinem Platz, während die anderen in einem Fünferkreis einen Platz im Uhrzeigersinn weiterrücken. Rechts die reduzierte Tanzformation von Wolfgang Thumser mit den elementaren Bewegungen *l* und *r*.

es nur 29 Paare gewesen oder irgendeine andere Zahl, die zu 5 teilerfremd ist, dann wäre die von B erzeugte Untergruppe gleich der ganzen Gruppe gewesen. Wirklich schade.

Das waren viele große Worte für den netten kleinen Ringeltanz. Aber es gibt eine Erwachsenenversion, und die geht so: Drei Paare stehen einander gegenüber, und es gibt zwei erlaubte elementare Bewegungen namens L und R (Bild links): L bedeutet, dass die linken vier Tänzer im Uhrzeigersinn einen Platz weiterrücken, R bedeutet dasselbe für die rechten vier Tänzer. Kann man erreichen, dass die Paare wie in der Startaufstellung stehen, aber mit Platztausch zwischen Dame und Herr?

Das Problem hat seinen Ursprung in einer Newsgroup namens de.sci.mathematik. Unter den Leuten, die in diesem Internet-Forum täglich einige Dutzend Beiträge veröffentlichen, sind auch Anwender und Schüler, die zu einem konkreten Problem Rat suchen; der harte Kern aber besteht aus Profis, die untereinander neue mathematische Probleme diskutieren, aus Blickwinkeln, die so unterschiedlich sind wie die Beteiligten. Legendär ist der »gute Geist« der Newsgroup, Hermann Kremer, der nicht nur zu den exotischsten Fragen binnen Minuten die Website aus dem Ärmel zu zaubern weiß, auf der die Antwort zu finden ist, sondern auch das freundschaftliche Klima innerhalb der Newsgroup maßgeblich geprägt hat.

Die Mitglieder dieses harten Kerns sind mehrheitlich männlich, sehr kommunikativ – untereinander – und nur mit der größten Mühe vom Computer wegzukriegen. Wenn sich diese Leute auch noch leibhaftig, mit Familie, zu einem Mathematikwochenende zusammenfinden, dann bekommen die mitgereisten Angehörigen ihre Ehegatten erst nach dem Ende des eigentlichen Treffens zu fassen – zum Beispiel bei einem Tanzabend. So geschah es, als Rainer Rosenthal seine Newsgroup-Freunde zu sich an den Bodensee einlud – und was machen diese Leute? Kaum sind sie wieder am heimischen Computer, diskutieren sie die Positionen, die sich bei dieser Form des englischen Tanzes ergeben können!

Die mathematische Formulierung der Frage ist schnell gefunden: Enthält die von L und R erzeugte Untergruppe ein Element, das die Startaufstellung s in die Stellung v überführt, bei der die Partner jedes Paars die Plätze getauscht haben? Die nächste Frage folgt auf dem Fuße: Untergruppe wovon? In welcher großen Gruppe spielt sich das ganze Ringelreihen ab?

Permutationsgruppen

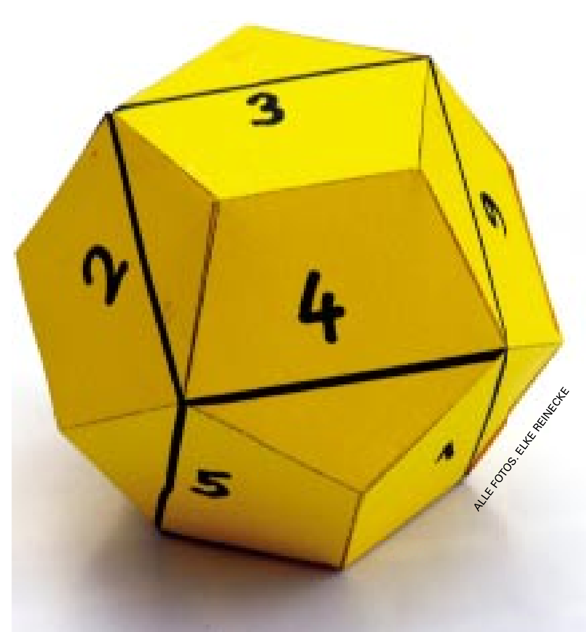
Man nummeriert die Plätze, zum Beispiel von 1 bis 6, so wie die Tänzer in der Startaufstellung bezeichnet sind. Jede beliebige Stellung beschreibt man nun, indem man der Reihe nach aufzählt, welcher Tänzer auf Platz 1, 2, … steht. Unsere Stellung v ist (2, 1, 4, 3, 6, 5), das heißt, auf Platz 1 steht 2, auf Platz 2 steht 1 und so weiter. Also ist unsere große Gruppe, in der sich alles abspielt, die Gruppe der Permutationen (Umstellungen der Reihenfolge) von sechs Elementen. Sie ist den Gruppentheoretikern wohlbekannt, heißt S_6 und hat $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720$ Elemente. Rainer Rosenthal hat seinen »Thread« (die Serie der Wortmeldungen) zu diesem Thema »Englisch Tanzen in Essex« genannt; man darf »Essex« auch als »S_6« lesen.

Die von L und R erzeugte Untergruppe besteht zunächst aus allem, was man durch Aneinanderreihen der Symbole L und R schreiben kann: *LR*, *RLR*, *LLRR*, … Eine solche Symbolfolge nennen die Gruppentheoretiker ein »Wort« und könnten selbst dann etwas damit anfangen, wenn die Zeichen L und R überhaupt keine Bedeutung hätten.

Wörter dürfen beliebig lang sein; aber da jedes Wort einer Permutation entspricht, kann es höchstens 720 wirklich verschiedene Wörter geben. Ob aber zwei verschiedene Wörter eigentlich dasselbe sagen, nämlich dieselbe Permutation bezeichnen, ist nicht offensichtlich. Nur dass man Wortteile wie *LLLL* (links einmal im Kreis laufen) oder *RRRR* weglassen kann, sieht man auf einen Blick.

Was tun? Tjark Weber aus München verschafft sich – und der Gruppe – zunächst einen Überblick, und zwar mit einem Programm namens »Waldmeister«, das die Universität Kaiserslautern zur allgemeinen Nutzung ins Netz gestellt hat. Eigentlich ist Waldmeister ein »Theorembeweiser«, also ein Werkzeug für tiefgründig-abstrakte Fundamentalisten. Aber das ist das Schöne an der Abstraktion: Wenn man die Bedeutung von L und R vorübergehend vergisst, kann man schadlos eine unschuldige Permutation für ein tiefsinniges Theorem halten. »Eine Permutation aus elementaren Bewegungen zusammensetzen« und »ein Theorem aus elementaren Wahrheiten (Axiomen) herleiten« sind von dieser hohen Warte aus dasselbe.

Jedenfalls liefert Waldmeister die Auskunft, dass die Stellung v von der Ausgangsstellung s aus erreichbar ist, al- ▷



ALLE FOTOS: ELKE REINECKE

Das Dodekaeder mit nummerierten Flächen und einem der fünf Würfel, die im Dodekaeder stecken

Der Würfelfünfling in zwei verschiedenen Stellungen: Eine Drehung setzt an die Stelle des gelben Teilwürfels (oben) den roten (unten). Andere Teilwürfel werden ebenfalls vertauscht; nur der blaue wird zwar gedreht, aber auf sich selbst abgebildet.

lerdings mit reichlich Ringelreihen: *RLLRLRRLRRLRR*. Wenig später entdeckt Rainer Rosenthal, dass es auch mit 11 statt 13 elementaren Bewegungen geht, und zwar auf zwei verschiedene Weisen: *RLLRLRRLRRLRR* = *LLLRLLRRRLR* = *RRRLRRLLLRL*. Verschiedene Leute erkunden die von *L* und *R* erzeugte Untergruppe systematisch und erschöpfend und finden, dass sie 120 Elemente hat.

Bei einer endlichen Gruppe ist die Anzahl der Elemente, die »Ordnung« der Gruppe, eines ihrer wichtigsten Merkmale. Die Ordnung einer Untergruppe ist nämlich stets ein Teiler der Gruppenordnung. Eine Gruppe, die als Ordnung eine Primzahl hat, ist also ziemlich langweilig: Ihre einzige Untergruppe ist die triviale, die nur aus dem neutralen Element besteht. Dagegen gibt es für eine Gruppe der Ordnung 120 – eine Zahl mit vielen Teilern – sehr viele Strukturmöglichkeiten.

Wer ein wenig mit endlichen Gruppen gespielt hat, dem kommt an dieser Stelle in den Sinn, dass 120 = 5! die Ordnung der Gruppe S_5 der Permutationen von fünf Elementen ist. Nur: Was hat die Zahl 5 hier zu suchen, wo sich stets vier von sechs Leuten bewegen, aber nie fünf auf einmal?

Das sieht man, wenn man sich die Bewegung *LR* anschaut (man erinnere sich: erst *R*, dann *L*). Im Endeffekt bewegt sich Herr Vier gar nicht, während die anderen fünf Tänzer in einem großen Kreis um ihn herum einen Platz im Uhrzeigersinn weiterrücken (Bild S. 107 oben, links).

An dieser Stelle fällt es Marc Olschok aus Duisburg »plötzlich wie Schuppen aus den Haaren«, dass er die beiden elementaren Tanzbewegungen aus einem ganz anderen Kontext kennt: dem berühmten Rubik-Würfel, jener Zusammensetzung aus 3·3·3 Würfeln, bei der durch eine trickreiche Mechanik jede Ebene aus 3·3 Würfeln gegen die anderen verdrehbar ist und die Aufgabe darin besteht, aus einem irgendwie verdrehten Würfel den Urzustand mit einheitlich gefärbten Seitenflächen wiederherzustellen. Hält man sich nämlich den Rubik-Würfel so vor die Nase, dass eine Kante einen von oben nach unten verlaufend genau anschaut, und dreht die beiden an diese Kante grenzenden Ebenen, dann vollführen die Eckwürfelchen genau die Bewegungen unserer Tänzer!

Die Bewegungen des Rubik-Würfels werden beschrieben durch eine Gruppe – was sonst? –, und diese Gruppe ist ausgiebig studiert worden, als der Rubik-Würfel in Mode war (Spektrum der Wissenschaft 5/1981, S. 16). So braucht Marc Olschok nur in seinen alten Unterlagen nachzuschauen, um die Zahl 5 auch in der Rubik-Gruppe wiederzufinden. Obendrein findet er als alter Rubik-Profi einen noch kürzeren Weg zum Paareplatztausch: *RLRLLLRRL*.

Während einige andere Leute die richtig schweren Sachen aus der Algebra-Vorlesung wie Sylow-Gruppen hervorkramen, wirft Wolfgang Thumser wie aus heiterem Himmel eine neue Tanzformation in die Diskussion. Diesmal sind es nur noch fünf Tänzer namens *a*, *b*, *c*, *d* und *e*; sie sind wieder in zwei Kreisen angeordnet; in beiden Kreisen darf eine »Vierteldrehung« namens *l* (im Uhrzeigersinn) beziehungsweise *r* (gegen den Uhrzeigersinn) stattfinden, sodass jeder Tänzer den Platz seines Kreisnachfolgers einnimmt (Bild S. 107 oben, rechts).

Offensichtlich hat Wolfgang Thumser die Lösung schon, schreibt sie aber nicht einfach auf, sondern lässt die anderen noch zappeln und suchen. Das tun die auch fleißig und finden rasch heraus, dass mit *l* und *r* jede Stellung der fünf Tänzer erreichbar ist. Die Bewegungen *l* und *r* erzeugen also die gesamte Permutationsgruppe S_5. Aber was haben sie mit *L* und *R* zu tun?

Überraschung: das Dodekaeder

Dafür bringt Wolfgang Thumser einen neuen Gegenstand ins Spiel, der eine besonders innige Beziehung zur Zahl 5 aufzuweisen hat: das Dodekaeder, jenen platonischen Körper, der aus zwölf regelmäßigen Fünfecken besteht. Das Dodekaeder ist auf sehr vielfältige Weise symmetrisch, und diese Eigenschaft wird – wen wundert's – durch eine Gruppe ausgedrückt: die Symmetriegruppe des Dodekaeders. Sie enthält alle Drehungen und Spiegelungen, die das Dodekaeder wieder auf sich selbst abbilden. Ein Beispiel ist eine Fünfteldrehung um die Achse, die durch die Mittelpunkte zweier gegenüberliegender Dodekaederflächen geht. Insgesamt hat diese Gruppe 120 Elemente – aber sie ist nicht die S_5! Das wäre dann doch zu einfach.

Immerhin: In dem genannten Beispiel werden die beiden Flächen, durch deren Mittelpunkt die Achse verläuft, auf sich selbst abgebildet, während deren jeweilige fünf Nachbarflächen einen Platz im Fünferkreis weiterrücken. Das entspricht genau der Bewegung *LR* von Herrn Vier (unbewegt) und seinen Mittänzern (im Kreis wandernd). Man identifiziere also jeden Tänzer mit einer Fläche des Dodekaeders plus der gegenüberliegenden Fläche und nummeriere entsprechend die Flächen des Dodekaeders von 1 bis 6; gegenüberliegende Flächen bekommen gleiche Nummern.

Entspricht jetzt jede Bewegung der sechs Tänzer einer Symmetrieabbildung des Dodekaeders? Nein, das wäre immer noch zu einfach. Aber Wolfgang Thumser hilft uns wieder auf die Sprünge: Im Dodekaeder steckt ein Würfel. Man zeichne in jede fünfeckige Seitenfläche eine Diagonale, und zwar so, dass sich jeweils drei solcher Diagonalen an den Ecken treffen und aufeinander senkrecht stehen (Bild S. 107 unten). Das ergibt die zwölf Kanten eines Würfels!

Man bezeichne nun jede Würfelfläche durch die Nummern der beiden Dodekaederflächen, die mit ihrem größten Teil über dieser Würfelfläche liegen. Im genannten Bild sind dem Betrachter die Würfelflächen (3, 4) (oben) und (1, 5) (vorn) zugewandt. Der Würfel mit seinen sechs Flächen ist somit durch drei Zahlenpaare charakterisiert, im abgebildeten Beispiel: (3, 4), (1, 5) und (2, 6). Jedes Zahlenpaar kommt doppelt vor, auf der Vorder- wie auf der Rückseite.

Jetzt kommt der Knüller. Man wende auf diese Zahlen eine beliebige Permutation aus S_6 an, zum Beispiel die Abbildung L. Dadurch entsteht ein neuer Würfel, gekennzeichnet durch drei Zahlenpaare. Im Dodekaeder steckt nämlich nicht nur ein Würfel, sondern deren fünf. Der Körper, der aus diesen fünf einander durchdringenden Würfeln besteht, ist sehr ansehnlich (Bild links), und die Online-Artikel eines gewissen Christoph Pöppe über räumliche Geometrie im Allgemeinen und die Symmetriegruppe des Dodekaeders und den Würfelfünfling im Besonderen haben der Anschauung der Newsgroup-Mathematiker aufgeholfen (was den Autor natürlich freut).

Die Abbildungen der Sechser-Tanzgruppe wirbeln diese fünf Würfel durcheinander, sind also Permutationen von fünf Elementen. Und wenn man die fünf Würfel in der richtigen Weise mit a, b, c, d und e bezeichnet, entspricht die Abbildung L, angewandt auf die Zahlen 1 bis 6, genau der Abbildung l, angewandt auf die Würfel a bis e. Entsprechendes gilt für die Abbildungen R und r.

Damit ist unter Einsatz der verschiedensten Ideen und begrifflichen Hilfsmittel vollkommene Klarheit hergestellt: Die Gruppe der Bewegungen der Sechser-Tanzformation ist tatsächlich die S_5, und es gibt eine explizit angebbare Korrespondenz zwischen den Positionen der sechs Tänzer 1 bis 6, der fünf Tänzer a bis e und der Würfel im Dodekaeder.

Nur zwei Fragen sind noch offen: Was tun die Mitglieder der Newsgroup, nachdem das Problem gelöst ist? Das, was Mathematiker so gerne tun: verallgemeinern. Man untersucht mit wieder anderen Mitteln die Gruppenstruktur, wenn an dem Tanz nicht nur drei, sondern vier, fünf oder noch mehr Paare beteiligt sind.

Und wie endet die Geschichte mit Sabine? Tragikomisch. Wir freundeten uns an, und irgendwann erzählte ich ihr beiläufig, dass ich für ein halbes Jahr an der Kernforschungsanlage Jülich arbeitete. Diese Institution hat zwar der Kernenergie inzwischen weit gehend abgeschworen und ihren Namen in »Forschungszentrum Jülich« geändert; aber damals glaubte Sabine, ich sei der Atom-Mafia beigetreten, erklärte mich zu ihrem Feind und sprach nie wieder ein Wort mit mir. Wirklich schade. ◁

AUTOR

Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei http://www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

PREISRÄTSEL

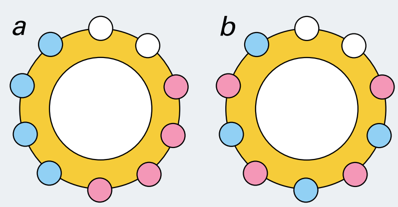
Am runden Tisch

Von Pierre Tougne

Ein Ehepaar, beide Mathematiker, hat vier Kolleginnen und vier Kollegen zum Abendessen in ein Restaurant eingeladen. Als das Paar dort ankommt, sitzen die Gäste bereits am bestellten runden Tisch und zwar streng nach Frauen und Männern getrennt. Zwei Plätze nebeneinander sind für die Gastgeber frei geblieben (Bild, *a*).

Die Gastgeberin bittet die Kolleginnen und Kollegen, sich doch in bunter Reihe, also Frau, Mann, Frau …, zu setzen. Zudem sollten am Ende wieder dieselben Plätze für die Gastgeber frei sein (*b*).

Um diese Sitzordnung zu erreichen, stehen immer wieder zwei Tischnachbarn gemeinsam auf und nehmen die beiden freien Plätze ein. Wer zuvor rechts von seinem Nachbarn gesessen hat, tut dies auch nachher.



Wie viele Bewegungen von Tischnachbarn sind mindestens nötig, bis die Gäste wie in der Abbildung rechts sitzen? Und wie viele Bewegungen wären es bei zweimal fünf Gästen?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 10 48 40, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir fünf Blechschilder »Kamel«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 11. Oktober 2005, eingehen.

Lösung zu »Rosenkavaliere« (August 2005)

Manchmal hat der Kavalier nur einen Weg, um eine bestimmte Anzahl Rosen zu bekommen; manchmal gibt es mehrere Wege, die in die Ehe führen. Für die Anzahl von 28 Rosen sind es immerhin 13.

- 7 Rosen: ADEH
- 14 Rosen: ABEH, AEIH
- 21 Rosen: ABFEDH
- 28 Rosen: ABCFIEH, ABCFJIH, ABCGFIEDH, ABCGJFEH, ABCGJFIH, ABCGJIEH, ABFCGJIH, ABFJIEH, ADEBFGJIH, AEBCFIH, AEBCGJIH, AEBFJIH und AEFCGJIH
- 35 Rosen: ABCGJIFEDH

Die Gewinner der fünf Sweatshirtjacken mit Spektrum-Logo sind Elisabeth Arnold, Essenbach; Gunnar Johannsen, Bonn; Helmut Schmitz, Pullach; Silvia Schickel, Erding; und Harald Krug, Linkenheim.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.