

Das Antiparallelogramm (II)

Das sich selbst überschneidende Viereck kann nicht nur Ellipsen aneinander abrollen lassen; es verwandelt auch die geradlinig hin- und hergehende Bewegung eines Kolbens in die kreisförmige eines Rads.

Von Norbert Treitz

Ein ebenes Viereck, bei dem zwei Paare nicht benachbarter Seiten gleich lang sind, ist nicht unbedingt ein Parallelogramm. In der letzten Folge (SdW 4/2006, S. 114) haben wir gesehen, dass sein überkreuz angeordneter Kollege, das Antiparallelogramm, Ellipsen aneinander abrollen lassen kann und mit geringem gedanklichem Zusatzaufwand auch den Strahlengang in Flüstergewölben erklärt.

Diesmal geht es um eine ganz andere Fähigkeit des Antiparallelogramms, nämlich eine Drehbewegung in eine geradlinige umzuwandeln und umgekehrt. Das haben sich die Konstrukteure von Dampfmaschinen schon immer gewünscht, und ihr Erfinder James Watt war stolz, wenigstens eine gute Näherungslösung gefunden zu haben. Pafnuti Tschebyschow (1821–1894), den die Mathematikerwelt eher in der Schreibweise Tschebyschew und als Zahlen- und Wahrscheinlichkeitstheoretiker kennt, berechnete streckenweise sehr gute Näherungen.

Dass eine exakte Überführung einer Drehbewegung in eine geradlinige mit einem Gestänge überhaupt möglich ist, war lange Zeit unbekannt. Harry Hart (1848–1920), über dessen Leben kaum etwas in öffentlichen Quellen zu finden ist, fand 1874 den Schlüssel des Rätsels. Die Mittelpunkte aller vier Seiten des Antiparallelogramms liegen stets auf einer gemeinsamen Geraden, was ja für Vierecke sonst eher selten zutrifft. Entlang dieser Geraden gilt eine geometrische Beziehung, die von einer speziellen Abbildung, der Inversion am Kreis, her bekannt ist: Das Produkt der Längen zweier Strecken, die auf derselben Geraden liegen und einen Endpunkt gemeinsam haben, ist eine Konstante. Die Inversion am Kreis wiederum überführt Geraden in Kreise und umgekehrt (Kasten S. 106). Der französische General Charles-Nicolas Peaucellier (1832–1913) fand 1864 ebenfalls einen exakten Inversor, der mit einer Kombination aus Drachen und Raute arbeitet (Bild unten).

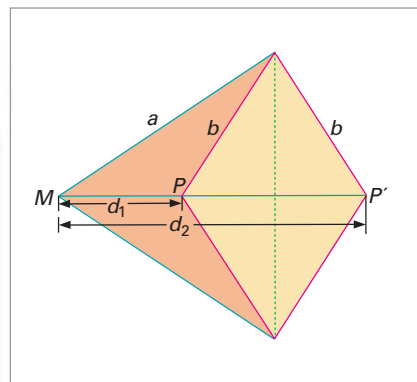
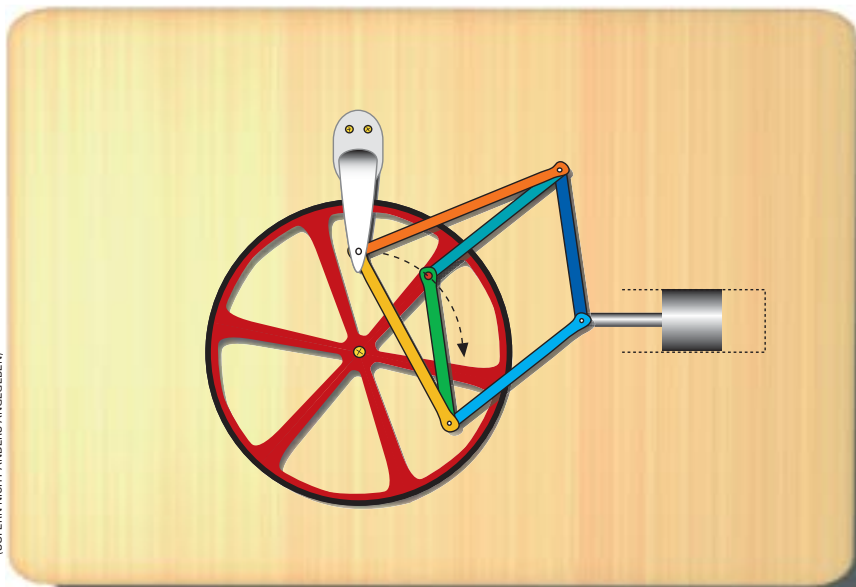
Der technische Nutzen einer exakten Geradföhrung ist allerdings begrenzt.

Man muss zwar nicht mit besonderen Vorkehrungen das Gestänge daran hindern, den Kolben im Zylinder zu verankern; dafür muss man zahlreiche Drehgelenke durch Schmierung beweglich halten, was nicht unbedingt weniger Aufwand erfordert.

Wir nehmen nun an, dass eine der vier Seiten des Gelenkvierecks festgehalten und deswegen als Steg bezeichnet werde, die daran hängenden heißen Arme und die dem Steg gegenüber liegende Koppel. Wenn keine Seite länger ist als die anderen drei zusammen, gibt das ein Viereck. Wenn es eben bleiben soll, hat es einen Freiheitsgrad, es ist also genau ein Winkel kontinuierlich wählbar. Nach einer Regel von Franz Grashof (1826–1893) können die Winkel an den Enden der kürzesten Seite voll durchdrehen, wenn die kürzeste und die längste Seite zusammen nicht länger sind als die anderen beiden. Je nachdem, ob diese kürzeste Seite Steg, Arm oder Koppel ist, gibt es verschiedene Typen von Kurbeln und Schwingkurbel-Gelenkvierecken.

Gelenkvierecke

Wählen wir in unserem Antiparallelogramm eine der längeren Seiten als Steg. Dann sind die beiden kürzeren die Arme und die andere längere die Koppel. Nun ist die Grashof-Bedingung auf mehrfache Weise erfüllt, allerdings mit dem Grenzfall der Gleichheit. Das bedeutet, ▷



Der Inversor von Peaucellier: Mit dem Satz des Pythagoras findet man, dass das Produkt $\overline{MP} \cdot \overline{MP'}$ nur von den Stangenlängen a und b abhängt, nämlich $a^2 - b^2$ beträgt. Links eine denkbare Realisierung

▷ dass das Gelenkviereck zwischen Parallelogramm und Antiparallelogramm umschlagen kann.

Die Punkte auf den Armen bewegen sich trivialerweise auf Kreisbögen, für die Punkte auf der Koppel muss es aber nicht so trivial bleiben. Bewegt sich das Viereck als Parallelogramm, so wandert jeder Punkt der Koppel auf einem Kreis,

der die Armlänge als Radius hat. Bei der Bewegung als Antiparallelogramm laufen die Punkte der Koppel aber auf achtförmigen Kurven, ihr Mittelpunkt sogar auf einer mit zwei Symmetrieachsen. Falls Steg und Koppel um den Faktor $\sqrt{2}$ länger als die Arme sind (für den Metallbaukasten ist $7/5$ eine vernünftige rationale Näherung an $\sqrt{2}$), ist die Kurve der

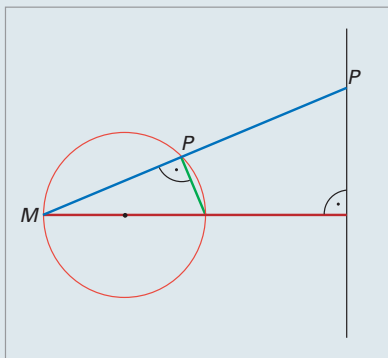
Koppelmitte eine Bernoulli-Lemniskate (Bild rechts oben).

Diese Kurve ist das Inversionsbild einer rechtwinkligen Hyperbel an dem Kreis, der deren Hauptachse als Durchmesser hat. Sie ist eine spezielle Cassini-Kurve; das ist eine Menge von Punkten, für die das Produkt der Abstände zu zwei gegebenen Punkten eine Konstante ist.

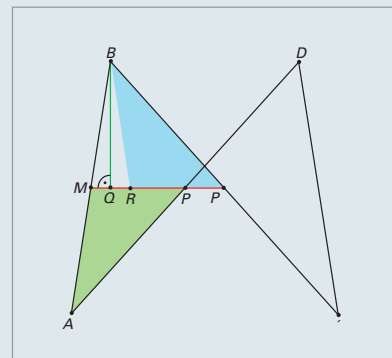
Die mathematisch exakte Geradföhrung

Die Inversion am Kreis (Spektrum der Wissenschaft 9/2004, S. 106) wird auch »Spiegelung am Kreis« genannt, obgleich ein spiegelnder Kreisrand ein ganz anderes Bild erzeugt. Eine Inversion bildet das Innere des Kreises auf das Äußere ab und umgekehrt; die Kreislinie wird auf sich selbst abgebildet. Der Bildpunkt P' eines Punktes P unter der Inversion liegt, vom Kreismittelpunkt M aus gesehen, in derselben Richtung wie P , und zwar so, dass das Produkt der Entfernungen beider Punkte von M gleich dem Quadrat des Kreisradius ist: $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = R^2$. In der komplexen Zahlenebene finden wir das Bild unter der Inversion an dem speziellen Kreis mit Mittelpunkt 0 und Radius 1 als das Konjugierte des Kehrwerts.

In drei Dimensionen kann man die Inversion in nahe liegender Weise auf die Kugel ausdehnen.



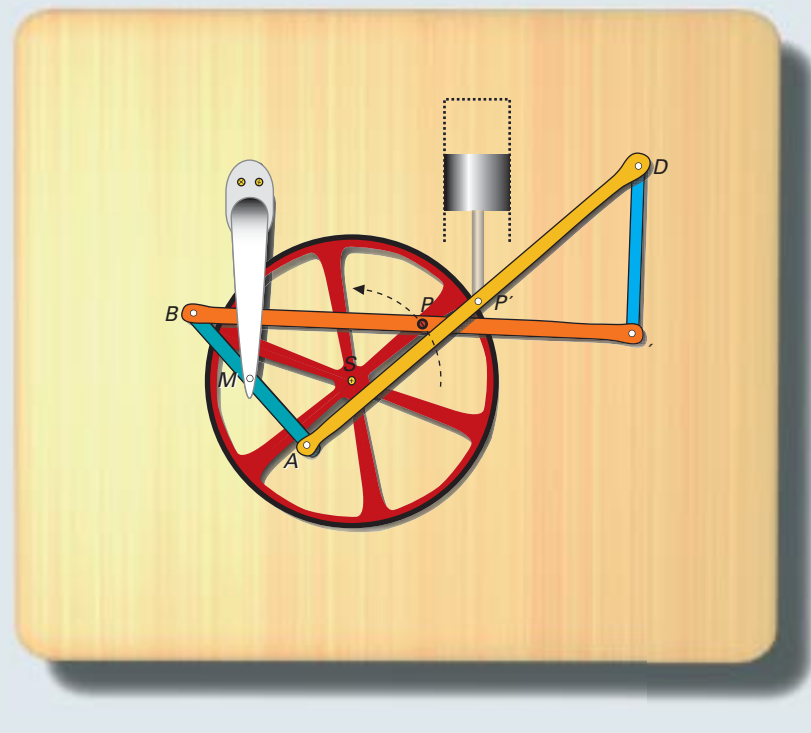
Einen Kreis, der durch den Mittelpunkt M des Inversionskreises geht, bildet die Inversion auf eine Gerade ab: Wenn P auf dem gezeichneten Kreis durch M wandert, bewegt sich dessen Inversionsbild P' auf einer Geraden, die rechtwinklig zur Geraden durch die beiden Kreismitten liegt (ähnliche Dreiecke im Bild oben links).

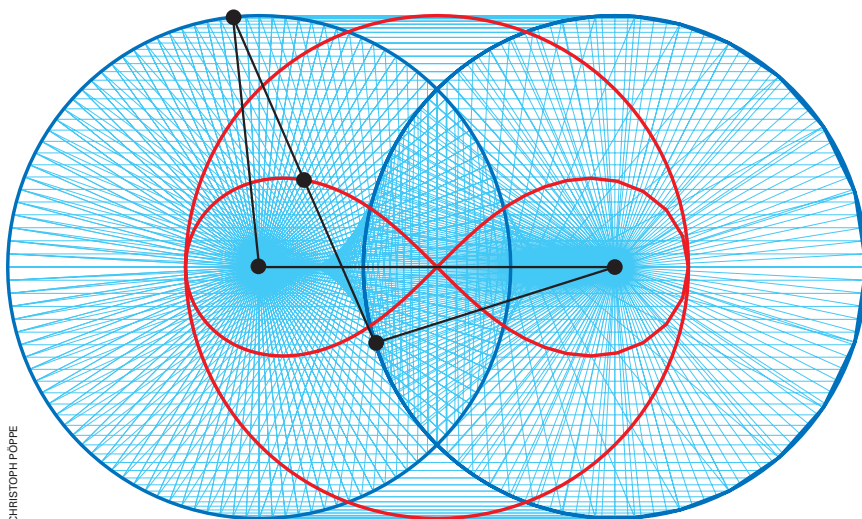


Diese Situation finden wir auch in dem Antiparallelogramm $ABCD$ vor (Bild oben rechts): Wir ziehen die Mittelparallele des zugehörigen Trapezes $ACDB$ (jede andere Parallele würde denselben Dienst leisten). M , P und P' sind die Mitten der drei Seiten $\overline{AB}$, $\overline{DA}$ und $\overline{BC}$. Wir zeigen nun, dass in jeder Stellung des Antiparallelogramms P und P' durch eine Inversion an einem Kreis um M aufeinander abgebildet werden.

BQ sei das Lot von B auf MP und $\overline{QR}$ so lang wie $\overline{MQ}$. Dann sind die beiden getönten Dreiecke APM und BRP' (mit Klappung) deckungsgleich zueinander und $\overline{MP} = \overline{RP'}$, also $\overline{MR} = \overline{PP'}$. Wir interessieren uns für $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{RP'} \cdot \overline{MP} = \overline{RP'} \cdot (\overline{RP'} + 2 \cdot \overline{QR}) = (\overline{RP'} + \overline{QR})^2 - \overline{QR}^2 = \overline{QP'}^2 - \overline{MQ}^2$. Mit dem Satz des Pythagoras an den Dreiecken QRB und $QP'B$ finden wir, dass das Produkt $\overline{MP} \cdot \overline{MP'} = \overline{P'B}^2 - \overline{MB}^2$ ist, also nur von den Längen der Seiten des Antiparallelogramms und nicht von den Winkeln abhängt.

Als Gelenkmechanismus wäre das wie im nebenstehenden Bild zu realisieren. Die Punkte M und S sind fest mit der Grundplatte verbunden, P mit einem Punkt auf dem Umfang des Rades. Wenn P auf einem Kreis um S rotiert, wandert P' auf einer Geraden, die rechtwinklig zu MS liegt: Das Rad treibt den Kolben oder umgekehrt.





Sie ist nicht zu verwechseln mit der Geroni-Lemniskate, die eine Lissajous-Kurve ist.

In der Nähe des Mittelpunkts verläuft die Bernoulli-Lemniskate recht genau geradlinig. Dieses Teilstück der Kurve nutzte James Watt zur Geradföhrung des Stempels in der Dampfmaschine, jedoch mit einer schlankeren Kurve mit kleineren Armen.

In modernen Dampfmaschinen oder auch Verbrennungsmotoren sind diese ausgeklügelten Mechanismen allerdings nicht zu finden. Es hat sich als geschickter herausgestellt, den Geradlauf des Kolbens mit anderen Mitteln zu erzwingen und zur Umwandlung der geradlinigen in eine Drehbewegung so banale Mechanismen wie Pleuelstangen und Kreuzköpfe zu verwenden. ◁

Ein spezielles Gelenkvierck erzeugt eine Bernoulli-Lemniskate.

Die Koppelmitte kann auf dem Kreis oder der Lemniskate laufen und an den Beröhrpunkten beider wechseln. Damit Letzteres nicht passiert, sind bei Lokomotiven stets nicht nur zwei, sondern mehr Räder miteinander durch Stangen gekoppelt.



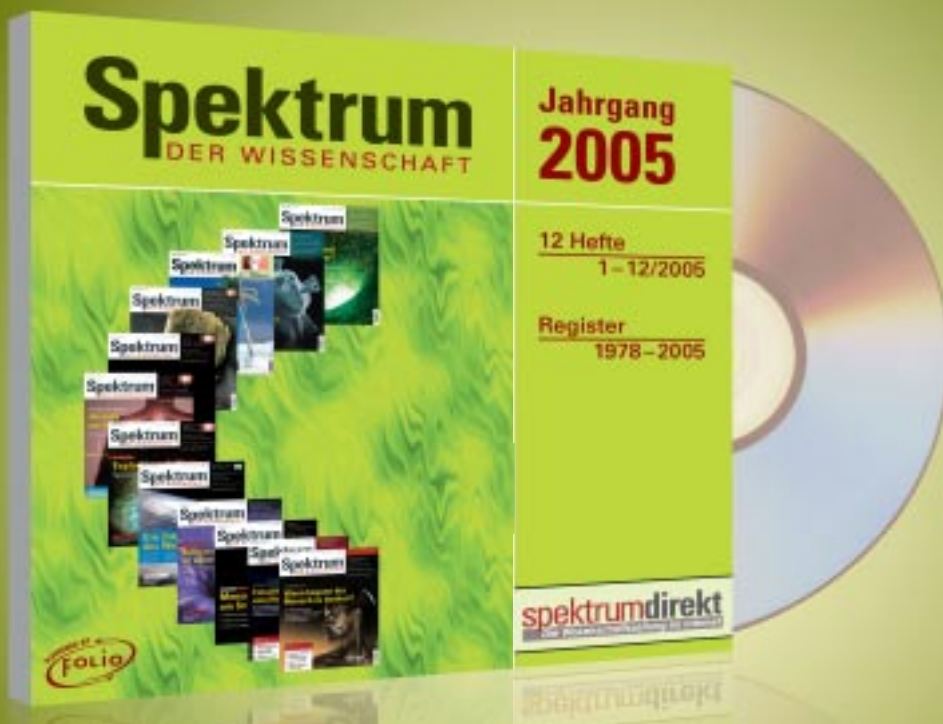
Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie für anschauliche Erklärungen dazu nutzt er nicht

nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hoch begabter Kinder und Jugendlicher.

Ebene Kinematik. Von W. Wunderlich. BI, Mannheim 1979

Geradföhrung durch Gelenkmechanismen. Kapitel 16 in: Von Zahlen und Figuren. Von Hans Rademacher und Otto Toeplitz. Springer, Berlin 1930; Nachdruck 1968

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.



CD-ROM JAHRGANG 2005 MIT GESAMTREGISTER 1978–2005 UND spektrumdirekt

Die CD-ROM enthält den kompletten Inhalt (inkl. Bilder) des Jahrgangs 2005 von SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT als ausdruck- und recherchierbare PDF-Version.

Zur besseren Nutzung Ihres persönlichen Archivs finden Sie die Registerdatenbank von 1978 bis 2005, in der Sie bequem und schnell verschiedene Rubriken wie Schlagwort, Autorenname und Jahrgang zur Suche verknüpfen können. Jetzt neu auf der CD: mehrere tausend Artikel von spektrumdirekt! Hinweis: Das Suchregister und die spektrumdirekt-Datenbank laufen nur unter Windows (ab Win 95). Das Heftarchiv 2005 ist mit dem mitgelieferten Acrobat Reader auch unter Mac-, Linux- und Unixsystemen verwendbar.

Preis: € 25,- (Einzelbestellung zzgl. Porto), als Standing Order € 18,50 (inkl. Porto Inland). Lieferung ab März 2006. Alle Preise verstehen sich inkl. Umsatzsteuer.

Eine Bestellmöglichkeit finden Sie auf dem Beiheter oder im Internet:

www.spektrum.de/lesershop