MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN

Topologie und Kombinatorik des Fußballs

Der Ball ist rund; aber für einen Topologen ist diese Aussage erst der Anfang einer Exkursion durch eine Welt deformierbarer Muster.

Von Dieter Kotschick

Was ist ein Fußball? Die offizielle Definition der Fifa sagt nur geringfügig mehr als der klassische Spruch »Der Ball ist rund«: Er soll eine Kugel mit einem Umfang zwischen 68 und 70 Zentimeter sein, und wenn er mit 0,8 Atmosphären Überdruck aufgeblasen ist, sind höchstens 1,5 Prozent Abweichung von der Kugelgestalt erlaubt.

Aber welches Bild kommt Ihnen in den Sinn, wenn Sie an Fußball denken? Mit größter Wahrscheinlichkeit ist es jenes schwarz-weiße Muster, das Ihnen zurzeit aus Anlass der Weltmeisterschaft von jeder Werbefläche entgegenstrahlt (Bild rechts).

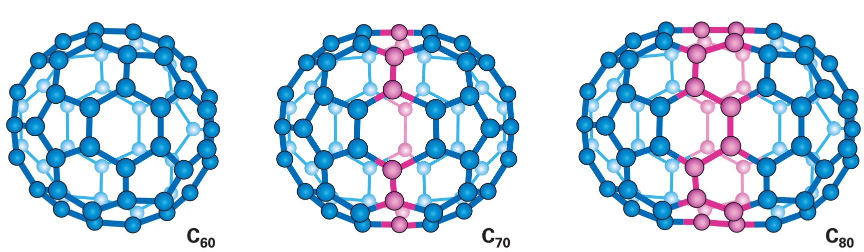
Dieser Standardfußball setzt sich aus 32 Polygonen (Vielecken) zusammen. Zwölf Fünfecke und 20 Sechsecke sind so angeordnet, dass jedes Fünfeck ausschließlich von Sechsecken umgeben ist. Traditionell sind die Fünfecke schwarz und die Sechsecke weiß gefärbt. Das Farbschema wurde angeblich zur Weltmeisterschaft 1970 eingeführt, um den Ball im Fernsehen besser sichtbar zu machen. Das Muster als solches ist allerdings älter.

Warum sieht der Fußball so aus, wie er aussieht? Kann man die Fünf- und Sechsecke auch anders anordnen? Dürfen es anstelle von Fünf- und Sechsecken andere Polygone sein? Fragen dieser Art sollen im Folgenden mit mathematischen Mitteln untersucht – und zum Teil auch beantwortet – werden.

Zu diesem Zweck ist die Frage »Was ist ein Fußball?« neu zu stellen, und die Antwort der Fifa ist nicht die geeignetste. Unser mathematischer Ball ist zwar auch noch »rund«, aber in einem verallgemeinerten Sinne. Er ist ein »sphärisches Polyeder«, was nichts weiter heißt, als dass er aus Polygonen zusammengesetzt ist und Kugelform annimmt, wenn man ihn geeignet aufbläst. Das ist nicht besonders restriktiv; selbst ein Würfel ist ein sphärisches Polyeder. Erst wenn beim Aufblasen keine Kugel, sondern beispielsweise ein Fahrradschlauch (Torus) herauskommt, nennt man das Polyeder nicht mehr sphärisch.

Außerdem interessiert uns nicht wirklich, wie das Aufblasen vonstatten geht und wo genau dabei die Ecken und Kanten des Polyeders auf der Kugeloberfläche (Sphäre) landen. Wir nehmen uns zum Beispiel die Freiheit, einen Eckpunkt auf der Sphäre zu verschieben (wobei die Kanten, die diesen Eckpunkt mit anderen verbinden, mitgehen). Nur einander überkreuzende Kanten dürfen dabei nicht entstehen. Nach unserer Definition ändert das nichts Wesentliches am Polyeder.

Mit anderen Worten: Es geht nicht um die metrischen, sondern um die topologischen Eigenschaften sphärischer Polyeder. Was von dem Fußball bleibt, ist ein so genannter Graph auf der Sphäre, bestehend aus Ecken und Kanten, die diese Ecken verbinden, ohne dass es auf deren genaue Lage ankommt. Aber trotz dieser Abstraktion: Fünfeck bleibt Fünfeck, und man kann nach wie vor davon reden, ob Fünfecke nur an Sechsecke oder auch aneinander grenzen und wie viele Flächen in einer bestimmten Ecke zusammenkommen.



AARON COX, NACH: RIICHIRO SAITO

In einem Fulleren sitzen Kohlenstoffatome an den Ecken eines Polyeders; dessen Kanten entsprechen den Bindungen zwischen den Atomen. Das klassische Buckminsterfulleren C_{60} entspricht dem Standardfußball; von C_{70} und C_{80} gibt es jeweils mehrere kombinatorische Möglichkeiten.

DIETER KOTSCHICK

Auch der Informationspavillon »Football Globe«, der im Vorfeld der Weltmeisterschaft die Runde durch Deutschland machte, trägt das klassisch gewordene Design aus zwölf Fünf- und zwanzig Sechsecken.

Aus graphentheoretischer Sicht hat der Standardfußball drei wesentliche Eigenschaften:

(1) Er besteht nur aus Fünf- und Sechsecken;
(2) jedes Fünfeck grenzt nur an Sechsecke; und
(3) die Seiten jedes Sechsecks grenzen abwechselnd an Fünf- und Sechsecke.

Aus diesem Grund definieren wir einen Fußball als ein beliebiges sphärisches Polyeder mit den Eigenschaften (1), (2) und (3). Wir denken uns die Fünfecke schwarz und die Sechsecke weiß (was am Prinzip nichts ändert). Damit ist der Standardfußball mit der vertrauten Musterung auch in dem soeben definierten Sinn ein Fußball, allerdings nicht der einzig mögliche.

Dieser Definition bin ich 1983 zum ersten Mal als Schüler begegnet, in einer Aufgabe im Bundeswettbewerb Mathematik. Die Aufgabe lautete: Gegeben sei ein Fußball mit den Eigenschaften (1) bis (3). Aus wie vielen Fünf- und Sechsecken besteht er? Damals habe ich bei meiner Lösung angenommen, dass der Ball ein konvexes Polyeder sei, das aus regelmäßigen Polygonen besteht. Diese geometrische Voraussetzung erzwingt zusammen mit den Regeln (1) bis (3), dass es genau 12 Fünfecke und 20 Sechsecke gibt. Außerdem gibt es nur eine Möglichkeit, sie zusammenzusetzen, und diese liefert den Standardfußball. Aber ohne die geometrische Zusatzbedingung hat das graphentheoretische Problem unendlich viele weitere Lösungen.

Als ich im Jahr 2001 zu einem Vortrag anlässlich einer Preisverleihung des Bundeswettbewerbs eingeladen wurde, begann ich wieder, über dieses Problem nachzudenken. Schließlich fand ich zusammen mit meinem Mitarbeiter Volker Braungardt eine Beschreibung aller Lösungen, die ich im Folgenden diskutieren möchte.

Fullerene

Interessanterweise tauchte ein verwandtes Problem in den 1980er Jahren in der Chemie auf, nachdem das Buckminsterfulleren C_{60} entdeckt worden war. Das ist ein Molekül aus 60 Kohlenstoffatomen, deren räumliche Anordnung genau dem Standardfußball entspricht: Die 60 Atome sitzen an den Ecken des Polyeders, und die Kanten entsprechen chemischen Bindungen.

Die Entdeckung dieses Moleküls, die 1996 mit dem Nobelpreis für Chemie gewürdigt wurde (Spektrum der Wissenschaft 12/1996, S. 18), sorgte für ein großes Interesse an den so genannten Fullerenen (Bild links unten). Das sind Kohlenstoffmoleküle, deren räumliche Struktur die Eigenschaft (1) hat und außerdem die folgende Bedingung erfüllt, die von den chemischen Bindungseigenschaften des Kohlenstoffs erzwungen wird:

(3') An jeder Ecke treffen sich genau drei Kanten.

Manchmal interessiert man sich für die speziellen Fullerene, die zusätzlich Bedingung (2) erfüllen. Man nimmt an, dass sie besonders stabil sind; vermutlich ist es der Stabilität abträglich, wenn zwei Fünfecke benachbart sind.

Es gibt unendlich viele Fulleren-Polyeder – C_{60} war nur das erste, das als Molekül nachgewiesen wurde –, und es ist bemerkenswert, dass die beiden unendlichen Familien von Polyedern, Fußbälle und Fullerene, nur den Standardfußball miteinander gemein haben.

Um das einzusehen, ist die schöne Polyederformel hilfreich, die der Schweizer Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783) entdeckt hat. In jedem sphärischen Polyeder ist die Anzahl e der Ecken minus die Anzahl k der Kanten plus die Anzahl f der Flächen gleich 2:

$$e - k + f = 2$$

Wenden wir Eulers Formel auf ein Polyeder aus S schwarzen Fünfecken und W weißen Sechsecken an. Die Gesamtzahl f der Flächen ist $S + W$. Die Fünfecke haben insgesamt $5S$ Kanten und die Sechsecke $6W$. Beides zusammen wäre die Gesamtanzahl der Kanten – nur haben wir jede Kante doppelt gezählt, nämlich bei den beiden Flächen, zu denen sie gehört. Zum Ausgleich teilen wir durch 2. Die Anzahl der Kanten ist somit

$$k = \frac{5S+6W}{2}$$

Schließlich sind die Ecken zu zählen. Die Fünfecke haben zusammen $5S$ und ▷

VISUALISIERUNGEN DIESER DOPPELSEITE: MICHAEL TROTT

So macht man durch verzweigte Überlagerung aus einem Fußball einen neuen: Man wähle einen Weg von einer Ecke zu einer anderen entlang von Kanten (*a*), begradige ihn (*b*) und schneide den Ball entlang dieses Wegs auf (*c*), schrumpfe ihn in der Breite auf die Hälfte zusammen (*d*) und vernähe zwei Exemplare dieses Gebildes (*e*), um 180 Grad gegeneinander gedreht, miteinander (*f*). Der Ästhetik zuliebe kann man die ursprüngliche Zickzackform der Naht wiederherstellen (*g*). Die Bilder der (mathematischen) Fußbälle hat Michael Trott von Wolfram Research Inc. mit dem Programm »Mathematica« erzeugt.

die Sechsecke $6W$ Ecken. Im Fall der Fullerene gehört nach Bedingung (3') jede Ecke zu drei verschiedenen Flächen. In der Summe $5S+6W$ ist also jede Ecke genau dreimal gezählt, und wir müssen zum Ausgleich durch 3 teilen:

$$e = \frac{5S+6W}{3}$$

Setzen wir diese Werte für f, k und e in die Euler'sche Formel ein, so stellen wir fest, dass die Beiträge von W sich gegenseitig wegheben und die Formel sich auf $S=12$ reduziert. Jedes Fulleren enthält genau 12 Fünfecke! Dagegen ergibt sich aus der Euler'schen Formel keine Einschränkung für die Anzahl W der Sechsecke und mithin der Ecken. Man kann zeigen, dass unter der Zusatzbedingung (2) die Anzahl der Sechsecke mindestens 20 sein muss. Der Standardfußball realisiert diesen Mindestwert. Die Anzahl e der Ecken ist dann 60, entsprechend den 60 Atomen im C_{60}-Molekül.

Für unsere mathematischen Fußbälle ist die Anzahl der Flächen, die sich in einer Ecke treffen, nicht festgelegt – Bedingung (3') gilt nicht –, aber drei müssen es mindestens sein. Daher wird aus der Gleichung $e = (5S+6W)/3$ die Ungleichung $e \leq (5S+6W)/3$. Setzen wir das in die Euler'sche Formel ein, so heben sich die Beiträge von W wieder gegenseitig auf. Übrig bleibt die Ungleichung $S \geq 12$. Somit enthält jeder Fußball mindestens 12 Fünfecke, doch anders als ein Fulleren kann er sehr wohl mehr enthalten.

Ebenfalls im Unterschied zu Fullerenen bestimmt bei einem Fußball die Anzahl der Fünfecke die der Sechsecke und umgekehrt. Wir zählen die Kanten, an denen Fünf- und Sechsecke zusammenstoßen. Nach Bedingung (2) sind alle Kanten von Fünfecken auch Kanten von Sechsecken, und nach Bedingung (3) ist jede zweite Sechseckskante gleichzeitig Kante eines Fünfecks. Daraus folgt $(1/2)(6W) = 5S$, also $3W = 5S$. Wegen $S \geq 12$ ist W mindestens 20. Diese Mindestwerte werden vom Standardfußball realisiert, und die Realisierung ist wegen der Bedingungen (2) und (3) kombinatorisch eindeutig. Allerdings hat die Gleichung $3W = 5S$ unendlich viele weitere ganzzahlige Lösungen; entsprechen diese Fußballpolyedern? Es wird sich zeigen, dass dies genau für diejenigen Lösungen der Fall ist, bei denen W ein Vielfaches von 20 und S ein Vielfaches von 12 ist. Es gibt also tatsächlich eine unendliche Schar von Fußbällen.

Damit wissen wir, dass es unendlich viele Fullerene – mit den Eigenschaften (1), (2) und (3') – und unendlich viele Fußbälle – mit (1), (2) und (3) – gibt. Aber diese beiden unendlichen Mengen haben nur ein gemeinsames Element! Für ein Fulleren ist $S = 12$, für einen Fußball gilt $5S = 3W$. Soll ein Fußball gleichzeitig ein Fulleren sein, so schließen wir, dass $5 \cdot 12 = 3W$ oder $W = 20$. Jeder Fußball, der zugleich ein Fulleren ist, muss also 12 Fünfecke und 20 Sechsecke haben. Es ist bekannt, dass es 1812 verschiedene Fullerene mit 12 Fünfecken und 20 Sechsecken gibt, doch 1811 davon haben Fünfecke mit einer gemeinsamen Kante und sind daher keine Fußbälle, weil sie die Bedingung (2) verletzen. Der Standardfußball ist das einzige dieser Fullerene mit disjunkten Fünfecken.

Achtblättrige verzweigte Überlagerung eines Standardfußballs

Neue Fußbälle aus alten

Lassen wir nun die Chemie beiseite und kommen zur eigentlichen Frage: Welche weiteren Fußbälle gibt es außer dem Standardfußball, und wie können wir sie verstehen? Es stellt sich heraus, dass man durch eine topologische Konstruktion namens »verzweigte Überlagerung« aus einem Fußball einen anderen machen kann. Das Spiel lässt sich beliebig oft wiederholen, sodass unendliche Folgen verschiedener Fußbälle entstehen.

Was ist eine verzweigte Überlagerung? Stellen Sie sich das Muster eines Fußballs, zum Beispiel des Standardfußballs, auf die Erdoberfläche aufgetragen vor, und zwar so, dass eine Ecke auf den Nordpol und eine andere auf den Südpol fällt (Bild oben, *a*). Nun verzerren Sie das Muster so, dass einer der (Zickzack-)Wege, die an Kanten entlang von Pol zu Pol führen, begradigt wird und auf einen Längengrad zu liegen kommt, zum Beispiel den Nullmeridian (*b*). Diese Verzerrung ist erlaubt; wir betreiben ja Topologie und nicht Geometrie.

Als Nächstes schneiden Sie in Gedanken mit einem Messer entlang der soeben begradigten Linie von Pol zu Pol und ziehen die derart aufgeschlitzte Erdoberfläche in Ost-West-Richtung zusammen (*c*), bis sie nur noch die Hälfte der Kugel bedeckt, zum Beispiel die westliche Halbkugel (*d*). Fertigen Sie schließlich eine Kopie dieser zusammengestauchten Fläche an und drehen Sie sie um die Erdachse, bis sie die östliche Halbkugel bedeckt (*e*). Dann passen die Fussballmuster der beiden Stücke zusammen, sodass man sie zu einem neuen Fussball zusammennähen kann. An den beiden vom Nord- zum Südpol verlaufenden Nähten treffen sich nämlich Teilstücke – eins vom Original, eins von der Kopie –, die genau so aussehen wie die Teilstücke, die wir durch Aufschlitzen voneinander getrennt hatten. Das Ergebnis ist ein Fußball mit doppelt so vielen Fünf- und Sechsecken wie zuvor (*f*, *g*).

Man bezeichnet den so konstruierten Fußball als zweiblättrige verzweigte Überlagerung des ursprünglichen Fußballs; die Pole heißen Verzweigungspunkte. Wenn man den neuen Ball nur lokal betrachtet, das heißt den Blick nur auf einzelne Ecken und deren Umgebungen richtet, sieht er topologisch genau so aus wie der alte, außer an den Verzweigungspunkten. An diesen beiden Ecken stoßen jetzt sechs statt drei Flächen zusammen; an den übrigen 116 Ecken (den 58 Ecken, die nicht auf die Pole gelegt wurden, und ihren Kopien) treffen sich wie zuvor jeweils drei Flächen.

Von der lokalen zur globalen Struktur

Es gibt eine nahe liegende Variante dieser Konstruktion. Man ziehe die geschlitzte Erdoberfläche in der Breite nicht nur auf die Hälfte, sondern auf ein Drittel, Viertel, … *d*-tel zusammen, sodass sie wie ein Stück Melonenschale aussieht (die Melone wurde in *d* Teile zerschnitten), und lege dann *d* Exemplare dieses Schalenstücks um die Erde. Wieder lassen sich alle Stücke so zusammennähen, dass ein Fußballmuster entsteht. Das ist eine *d*-blättrige verzweigte Überlagerung (Bild links unten). Für große Werte von *d* sind die Fünf- und Sechsecke zwar bis zur Unkenntlichkeit gestaucht, aber das macht nichts: Auf Längen und Winkel kommt es in der Topologie nicht an.

Aber erreicht man durch diese Konstruktion jeden überhaupt denkbaren Fußball? Überraschenderweise ja. Braungardt und ich haben bewiesen, dass jeder Fußball eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs ist. Allerdings kommen dabei auch allgemeinere Überlagerungen vor, die sich nicht aus den hier geschilderten zyklischen Überlagerungen zusammensetzen lassen.

Der Beweis beruht auf einem interessanten Zusammenspiel zwischen der lokalen Struktur von Fußballmustern und der globalen Struktur verzweigter Überlagerungen. Wir betrachten irgendeine Ecke eines beliebigen Fußballs (Bild rechts unten). Jede Fläche, die der Ecke anliegt, hat zwei aufeinander folgende Kanten, die sich in dieser Ecke treffen. Weil nach Bedingung (3) wenigstens eine dieser beiden Kanten ein Fünfeck berandet, gibt es keine Ecke, an der sich nur Sechsecke treffen. Also liegt an jeder Ecke ein Fünfeck an. Seine Nachbarn sind Sechsecke, und die Seiten der Sechsecke grenzen abwechselnd an Fünf- und Sechsecke.

Diese Bedingung ist nur erfüllbar, wenn die Flächen um die Ecke herum in der Reihenfolge schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter angeordnet sind. (Zur Erinnerung: Die Fünfecke sind schwarz.) Damit sich das Muster um die Ecke herum schließt, muss die Anzahl der an der Ecke anliegenden Flächen ein Vielfaches von 3 sein. Folglich sieht das Muster in der Umgebung jeder Ecke so aus wie eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs bei einem Verzweigungspunkt.

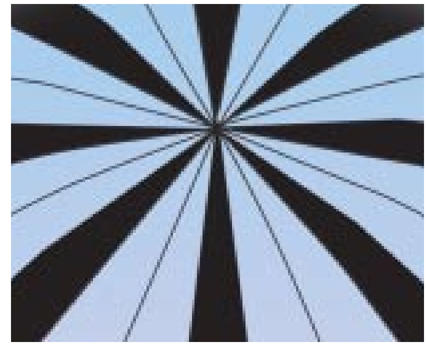
Das ist zwar nur eine lokale Information; aber die Überlagerungstheorie – der Teil der Topologie, der Abbildungen zwischen Räumen untersucht, die lokal gleich aussehen – erlaubt es, daraus Schlüsse auf globale Eigenschaften zu ziehen und insbesondere zu beweisen, dass tatsächlich jeder Fußball eine verzweigte Überlagerung des Standardfußballs ist.

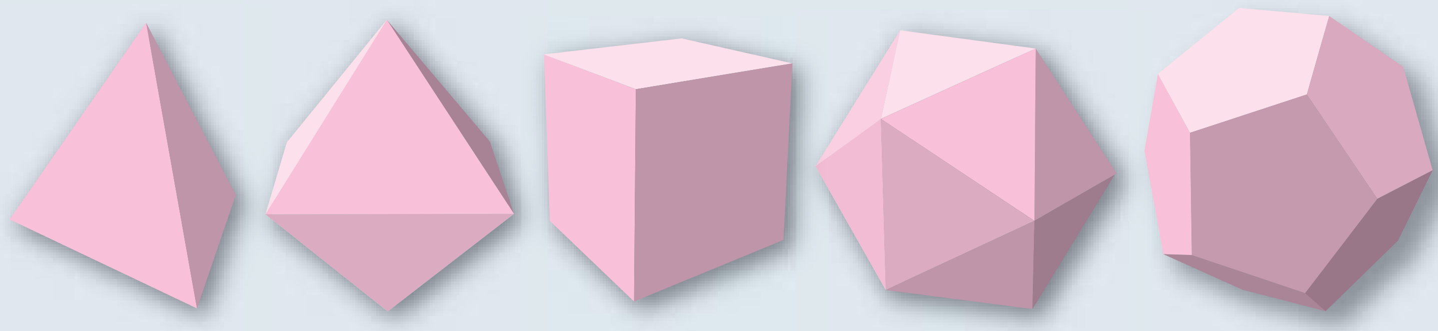
Jenseits der Fünf- und Sechsecke

Das Verallgemeinern liegt dem Mathematiker im Blut. Kaum hat er ein Ergebnis, schaut er nach, welche der verwendeten Voraussetzungen er wirklich braucht und welche vielleicht entbehrlich sind. In unserem Fall stellt sich rasch heraus, dass wir von der Tatsache, dass Fußbälle aus Fünf- und Sechsecken bestehen, nirgends Gebrauch gemacht haben. Führen wir also verallgemeinerte Fußbälle ein!

Das sind Polyeder, die immer noch Flächen zweier Arten haben, schwarze mit je s Kanten und weiße mit je w Kanten. Aber wir bestehen nicht mehr darauf, dass $s = 5$ und $w = 6$ ist. Allerdings ▷

Bei einem (mathematischen) Fußball liegen um jede Ecke die Flächen in der Reihenfolge schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter. Insbesondere ist die Gesamtzahl dieser Flächen ein Vielfaches von 3.





Die fünf platonischen Körper

SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

sollen immer noch die schwarzen Flächen nur zu weißen Flächen benachbart sein und an den Kanten weißer Flächen abwechselnd schwarze und weiße Flächen anliegen – woraus folgt, dass w eine gerade Zahl sein muss.

Wir können noch einen Schritt weiter gehen, indem wir verlangen, dass eine weiße Fläche nur an jeder n-ten Kante eine schwarze Fläche trifft und dass alle übrigen benachbarten Flächen weiß sind. Dann muss w ein Vielfaches von n sein; das heißt $w = m \cdot n$ für eine ganze Zahl m. Nach wie vor sollen schwarze Flächen nur an weiße grenzen.

Das Farbschema eines derart verallgemeinerten Fußballs wird also durch die drei ganzen Zahlen (s, m, n) beschrieben; dabei ist s die Anzahl der Kanten einer schwarzen Fläche, $w = m \cdot n$ die Anzahl der Kanten einer weißen Fläche, und jede n-te Kante einer weißen Fläche grenzt an eine schwarze. Welche Kombinationen von s, m und n sind überhaupt möglich? Die Antwort hängt eng mit den regulären Polyedern zusammen.

Die Polyeder mit der größtmöglichen Symmetrie sind die platonischen Körper: Alle ihre Flächen sind gleichseitige Polygone mit der gleichen Anzahl von Kanten, und an jeder Ecke des Polyeders treffen sich gleich viele Flächen. Euklid hat in seinen »Elementen« bewiesen, dass es nur fünf solche Polyeder gibt: das Tetraeder, das Oktaeder, den Würfel, das Ikosaeder und das Dodekaeder (Bild oben).

Heutzutage wissen wir, dass der Beweis nicht von der metrischen Eigenschaft »Gleichseitigkeit« abhängt. Das folgende topologische Argument, das nur die Euler'sche Polyederformel benutzt, zeigt, dass es neben den fünf genannten Polyedern keine weitere Möglichkeit gibt.

Jeder platonische Körper wird durch zwei Zahlen beschrieben: die Anzahl K der Ecken jeder Fläche und die Anzahl M der Flächen, die sich in jeder Ecke treffen. Ist f die Anzahl der Flächen, dann gilt für die Gesamtzahl der Kanten $k = (1/2)Kf$ und für die Anzahl der Ecken $e = (1/M)Kf$. Setzen wir diese Werte in die Euler'sche Formel $e - k + f = 2$ ein, so führen elementare Umformungen auf die Gleichung

$$\frac{1}{Kf} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2K} + \frac{1}{2M}$$

Die möglichen Lösungen lassen sich leicht bestimmen. Für das Zahlenpaar (K, M) kommen nur die folgenden Werte in Frage:

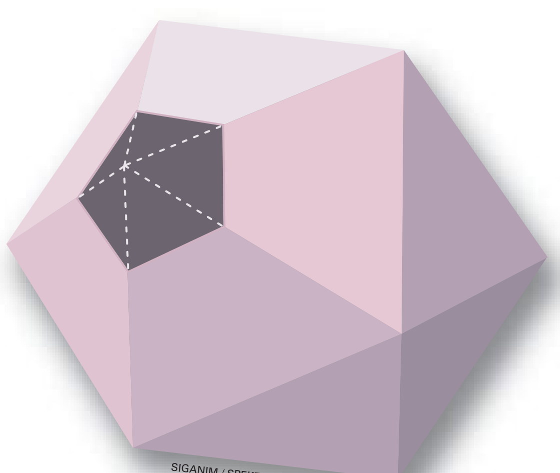
- (3, 3) für das Tetraeder;
- (4, 3) für den Würfel und (3, 4) für das Oktaeder;
- (5, 3) für das Dodekaeder und (3, 5) für das Ikosaeder.

Hinzu kommen die Möglichkeiten $K = 2$ und M beliebig sowie $M = 2$ und K beliebig. Sie sind nicht durch Polyeder im üblichen Sinn realisierbar, aber der erste Fall entspricht M Zweiecken in Gestalt von Melonenschalenstücken, die sich sämtlich an zwei Punkten treffen. Der amerikanische Football ist nach diesem Muster genäht.

Konstruktion verallgemeinerter Fußbälle

Damit haben wir einen vollständigen Überblick über die Polyeder, die nur eine Art Flächen (nämlich K-Ecke) und nur eine Art Ecken (nämlich solche mit M Flächen) haben. Was wir suchen, sind aber Polyeder mit genau zwei Arten Flächen – schwarze und weiße –, die noch gewisse Zusatzbedingungen erfüllen. Wie kann man die aus regulären Polyedern herstellen? Eine mögliche Antwort ist: durch Entecken oder auch Abstumpfen. Man schneidet einem regulären Polyeder alle Ecken mitsamt etwas Umgebung ab. Was dabei von den Flächen des ursprünglichen Polyeders übrig bleibt, bildet die eine Art Flächen; die andere Art sind die Schnittflächen.

Für das Ikosaeder sieht das so aus: An jeder seiner zwölf Ecken kommen fünf Flächen zusammen. Durch Abschneiden jeder Ecke entsteht ein Fünfeck, und die zwanzig Dreiecke werden zu Sechsecken zurechtgestutzt (Bild links). Die Kanten jedes Sechsecks sind im Wechsel die Überreste der ursprünglichen Ikosaederkanten und die neu entstandenen Kanten zu den Schnittflächen. Mit den Kanten der ersten Art grenzt das Sechseck an ein weiteres



SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT UND AMERICAN SCIENTIST

Jeder platonische Körper wird durch Entecken (Abstumpfen) zu einem verallgemeinerten Fußball. Aus dem Ikosaeder entsteht der Standardfußball: Die zwölf Ecken werden zu Fünfecken und die zwanzig Dreiecke zu Sechsecken.

Die Klassifizierung der verallgemeinerten Fußbälle

Typ	*s*	*m*	*n*	minimale Realisierung	*S*	*W*
1	3	3	1	Oktaeder	4	4
2	3	4	1	Kuboktaeder	8	6
3	4	3	1	Kuboktaeder	6	8
4	3	5	1	Ikosidodekaeder	20	12
5	5	3	1	Ikosidodekaeder	12	20
6	3	3	2	Tetraederstumpf	4	4
7	3	4	2	Würfelstumpf	8	6
8	4	3	2	Oktaederstumpf	6	8
9	3	5	2	Dodekaederstumpf	20	12
10	5	3	2	Ikosaederstumpf = Standardfußball	12	20
11	≥3	2	2	abgestumpfter amerikanischer Football oder *s*-seitiges Prisma	2	*s*
12	3	2	3	entkantetes Tetraeder	4	6
13	4	2	3	entkanteter Würfel	6	12
14	5	2	3	entkantetes Dodekaeder	12	30
15	≥3	1	3	einseitig abgestumpfter amerikanischer Football oder *s*-seitige Pyramide	1	*s*
16	≥3	1	4	doppeltes *s*-seitiges Prisma	2	2*s*
17	≥3	1	5	verdrehtes doppeltes *s*-seitiges Prisma	2	2*s*
18	3	1	6	bekränztes Tetraeder	4	12
19	4	1	6	bekränzter Würfel	6	24
20	5	1	6	bekränztes Dodekaeder	12	60


4


8


10


14


17
($s=6$)


20

MICHAEL TROTT

Ein verallgemeinerter Fußball ist ein Polyeder mit zwei Arten Flächen: schwarzen mit *s* Seiten und weißen mit $w = m \cdot n$ Seiten, wobei jede *n*-te Seite einer weißen Fläche an eine schwarze grenzt.

Jeder der hier aufgeführten zwanzig Typen enthält außer dem in der Tabelle genannten Exemplar mit der kleinstmöglichen Anzahl *S* schwarzer Flächen (und der zugehörigen Anzahl *W* an weißen Flächen) unendlich viele Realisierungen mit größeren Flächenzahlen.

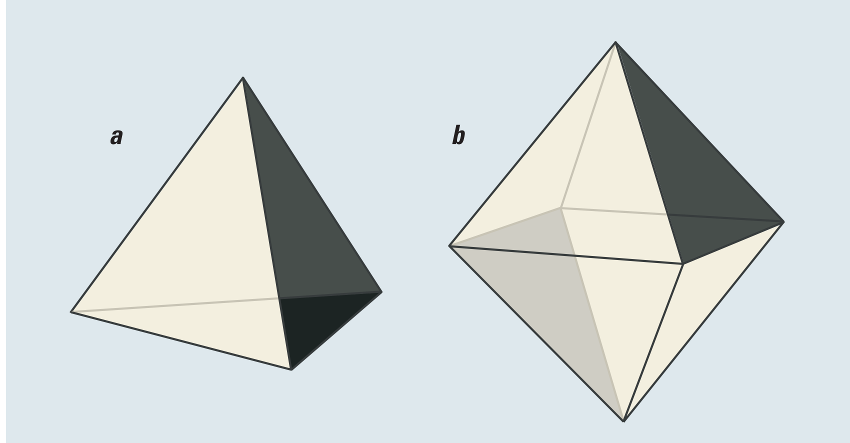
Nicht alle in der Tabelle aufgeführten Polyeder haben etablierte Namen. Die minimalen Realisierungen der Typen 12 bis 14 werden durch Entkanten aus platonischen Körpern hergestellt. Dabei schneidet man, analog zum Abschneiden der Ecken beim Abstumpfen, Umgebungen ganzer Kanten ab (das Messer wird parallel zur Kante geführt). Insgesamt wird jede Fläche des Polyeders zu einer kleineren Version ihrer selbst und jede Kante zu einem Sechseck.

Alternativ kann man das entkantete Tetraeder (12) konstruieren, indem man den Würfel an vier Ecken abstumpft, von denen keine zwei benachbart sind.

Die minimalen Realisierungen der Typen 18 bis 20 entstehen aus platonischen Körpern, indem man jede Seitenfläche mit einem Kranz von Sechsecken umgibt, und zwar so, dass jede Ecke des neuen Polyeders dreizählig wird. Das bekränzte Tetraeder (18) kann man auch direkt aus dem Dodekaeder konstruieren, indem man vier geeignet gewählte Ecken abstumpft.

Ein *s*-seitiges Prisma ist eine Dose mit einem *s*-Eck als Grundfläche, einem gleichen *s*-Eck als Deckfläche und viereckigen Seitenwänden. Stapelt man zwei solche Prismen Grundfläche auf Deckfläche aufeinander und entfernt die Trennfläche zwischen beiden Geschossen, so entsteht das doppelte *s*-seitige Prisma (Typ 16). Dort, wo die beiden Geschosse aneinander stoßen, hat man *s* vierzählige Ecken, denen lauter Vierecke anliegen.

Beim verdrehten *s*-seitigen Doppelprisma (Typ 17) werden ebenfalls zwei *s*-seitige Prismen aufeinander gestapelt und die Trennfläche entfernt. Allerdings werden die beiden Prismen gegeneinander verdreht, sodass die Ecken des Obergeschosses auf den Kanten des Untergeschosses liegen und umgekehrt. Dies funktioniert, wenn man sich das Prisma tatsächlich als Dose vorstellt, also mit runden Deckeln statt mit *s*-eckigen. Durch die Verdrehung liegen in der Mitte nun nicht *s* vierzählige Ecken, sondern 2*s* dreizählige. Die Seitenflächen sind daher Fünfecke, nicht Vierecke. Man kann das verdrehte Doppelprisma auch herstellen, indem man zwei *s*-Ecke mit je einem Ring von Fünfecken umgibt und die beiden Ringe dann entlang einer Zickzacklinie aneinander fügt (siehe Bild oben, dort mit $s=6$).



SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT UND AMERICAN SCIENTIST

Sowohl ein Tetraeder mit einer schwarzen Fläche (*a*) als auch ein Oktaeder mit zwei gegenüberliegenden schwarzen Flächen (*b*) sind Realisierungen des Schemas (s, m, n) = (3, 1, 3), gehen aber nicht durch verzweigte Überlagerung auseinander hervor.

Sechseck, mit denen der zweiten Art an ein Fünfeck. Das ist nichts anderes als der Standardfußball! Mathematiker nennen ihn den Ikosaederstumpf.

Dieselbe Prozedur ist auch auf die übrigen platonischen Körper anwendbar. So besteht der Tetraederstumpf aus Dreiecken und Sechsecken, wobei die Dreiecke nur an Sechsecke grenzen und die Sechsecke abwechselnd an Dreiecke und Sechsecke. Es handelt sich um einen verallgemeinerten Fußball mit $s = 3$, $m = 3$, $n = 2$ (und $w = m \cdot n = 6$). Der Ikosaederstumpf (Standardfußball) hat $s = 5$, $m = 3$ und $n = 2$. Die übrigen Abstumpfungen ergeben (s, m, n) = (4, 3, 2) für das Oktaeder, (3, 4, 2) für den Würfel, (3, 5, 2) für das Dodekaeder sowie (s, 2, 2) mit beliebigem $s > 2$ für den entsprechenden amerikanischen Football.

Sind das die einzigen Möglichkeiten für verallgemeinerte Fußballmuster oder gibt es weitere? Wiederum können wir die Frage mit Hilfe der Euler'schen Formel beantworten. Genau wie bei den platonischen Körpern können wir die Anzahl der Flächen, Kanten und Ecken durch die Daten des Musters ausdrücken, und zwar hier die Anzahl S der schwarzen Flächen, die Anzahl W der weißen Flächen und die Parameter s, m und n. Diesmal ist die Anzahl der Flächen, die sich an einer Ecke treffen, nicht festgelegt; sie muss aber wie oben mindestens gleich 3 sein. Daraus ergibt sich die folgende Bedingung an die Daten des Musters:

$$\frac{1}{sS} + \frac{n+1}{12} \leq \frac{1}{2s} + \frac{1}{2m}$$

Das sieht kompliziert aus, lässt sich jedoch leicht analysieren, ähnlich der Gleichung, die auf die platonischen Körper führt. Es ist nicht schwer zu zeigen, dass n höchstens 6 sein kann, weil sonst die linke Seite größer als die rechte würde. Mit etwas mehr Aufwand können wir eine vollständige Liste aller möglichen Lösungen aufstellen.

Ordentliche und unordentliche Fußbälle

Allerdings ist die Arbeit damit noch nicht getan. Es gibt Tripel wie etwa (s, m, n) = (4, 4, 1), welche die Ungleichung für geeignete Werte von S erfüllen, ohne dass sich entsprechende verallgemeinerte Fußbälle konstruieren ließen. Braungardt und ich haben die Werte von (s, m, n) bestimmt, die durch verallgemeinerte Fußbälle realisiert werden; sie sind in der Tabelle (Kasten S. 113) aufgeführt. Für $n = 2$ sind die kleinsten Realisierungen aller Muster abgestumpfte platonische Körper.

Neben dem Standardfußball (Typ 10) enthält die Tabelle drei weitere Fullerene: die Typen 14 und 20 und Typ 17 für $s = 6$. Die Anzahl der Sechsecke ist in diesen Fällen 30, 60 beziehungsweise 2 (wobei im letzten Fall die Sechsecke die schwarzen sind). Die entsprechenden Fullerenmoleküle haben 80, 140 beziehungsweise 24 Kohlenstoffatome. Während das 24-atomige Fulleren eindeutig bestimmt ist, gibt es bei 80 Atomen sieben verschiedene Anordnungen mit disjunkten Fünfecken, von denen nur eine (und zwar nicht die im Bild S. 108 gezeigte) ein verallgemeinerter Fußball ist, und bei 140 Atomen 121 354 Stück.

Hat man einen verallgemeinerten Fußball, so kann man durch eine verzweigte Überlagerung einen weiteren Fußball desselben Typs, das heißt mit denselben Werten (s, m, n), daraus machen. Aber was wir oben für den Standardfußball ausgeführt haben, nämlich dass diese Konstruktionsmethode die Menge aller verallgemeinerten Fußbälle ausschöpft, gilt nicht mehr uneingeschränkt. Es gilt für $n = 2$, das heißt, wenn weiße Flächen entlang ihren Kanten abwechselnd an schwarze und weiße Nachbarn stoßen. Aber die Aussage ist falsch für andere Werte von n. Das einfachste Gegenbeispiel ist (s, m, n) = (3, 1, 3): Das Polyeder besteht aus lauter Dreiecken; die schwarzen grenzen nur an weiße und jedes weiße an genau ein schwarzes. Das minimale Beispiel ist ein Tetraeder, bei dem eine Fläche schwarz ist. Eine weitere Realisierung ist das Oktaeder, von dem zwei gegenüberliegende Flächen schwarz sind (Bild oben). Aber das ist keine verzweigte Überlagerung des gefärbten Tetraeders! Dann müssten nämlich an jeder Ecke 3 oder 6 oder 9 … Flächen zusammenstoßen, beim Oktaeder aber sind es vier.

Der Fall $n = 2$ ist in einem gewissen Sinn ordentlicher als alle anderen. Denn wie beim Standardmuster mit Fünf- und Sechsecken (siehe oben) müssen alle Ecken im Wesentlichen gleich aussehen: Die einer Ecke anliegenden Flächen haben dieselbe Farbfolge, nämlich schwarz, weiß, weiß, schwarz, weiß, weiß und so weiter, nur die Länge der Folge ist offen. Die lokale Struktur eines verallgemeinerten Fußballs mit $n = 2$ ist also durch diese kombinatorischen Bedingungen schon weit gehend festgelegt. Diese Kontrolle fehlt im Fall $n \neq 2$. In der Tat haben die

ADIDAS

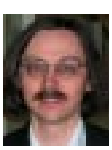
Man erkennt die Vier- und Sechsecke nur mühsam; aber der für die laufende Weltmeisterschaft neu eingeführte Fußball »Teamgeist« ist topologisch ein Oktaederstumpf.

Ecken des gefärbten Oktaeders (Bild links, *b*) die Farbfolge schwarz, weiß, weiß, weiß, und beim gefärbten Tetraeder kommen sogar zwei verschiedene Farbfolgen vor. Daher können wir jetzt zwar alle verallgemeinerten Fußbälle mit $n = 2$ beschreiben: Sie sind verzweigte Überlagerungen abgestumpfter platonischer Körper. Doch verfügen wir über kein einfaches Verfahren, das sämtliche verallgemeinerten Fußbälle mit $n > 2$ hervorbringt.

Coda

Sie werden es schon geahnt haben: Das Ziel unserer Überlegungen war nicht in erster Linie die Konstruktion von Bällen, die man gut treten kann. Von unserem Standpunkt aus sind unter anderen die Fußbälle besonders interessant, mit denen man gar nicht richtig spielen kann: Sie haben die Form eines Torus, einer Brezel oder einer Oberfläche mit noch mehr Löchern. Denn jede dieser Flächen ist – in einem etwas verallgemeinerten Sinn – eine verzweigte Überlagerung der Kugeloberfläche. Unsere Konstruktionen für Fußballmuster lassen sich also auf diese Flächen übertragen. Dies ist nur ein sehr einfaches Beispiel für die engen Beziehungen zwischen Graphen auf Flächen und verzweigten Überlagerungen, die in der modernen algebraischen Geometrie eine wesentliche Rolle spielen. Aber das ist eine andere Geschichte. ◁

AUTOR UND LITERATURHINWEISE



Dieter Kotschick ist Professor für Mathematik und Inhaber des Lehrstuhls für Differentialgeometrie an der Universität München.

Dieser Artikel basiert auf dem Artikel »The topology and combinatorics of soccer balls«, der gleichzeitig in der Zeitschrift »American Scientist« erscheint. Der Autor bedankt sich bei Volker Braungardt und Allyn Jackson für ihre Unterstützung.

Bundeswettbewerb Mathematik. Aufgaben und Lösungen 1983 – 1987. Klett, Stuttgart 1988

The classification of football patterns. Von Dieter Kotschick und Volker Braungardt. Preprint, online unter http://129.187.111.185/~dieter/football.pdf

A constructive enumeration of fullerens. Von D. Brinkmann und A. Dress in: Journal of Algorithms, Bd. 23, S. 345, 1997

Regular polytopes. Von H. S. M. Coxeter. Dover, New York 1973

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

PREISRÄTSEL

Randen- und Radieschenprimzahlen

Von Willi Botta

Schneidet man eine Rande – auch Rote Rübe genannt – in Stücke, so ist jede Schnittfläche so rot wie die ganze Rande. Bei einem Radieschen hingegen ist nur die äußere Haut rot, die Schnittflächen sind weiß.

Dementsprechend nennen wir eine im Dezimalsystem geschriebene Primzahl eine Randenprimzahl, wenn jede ihrer aus zusammenhängenden Ziffern gebildete ein- oder mehrstellige Teilzahl wiederum eine Primzahl (oder 1) ist. So ist beispielsweise 173 eine Randenprimzahl, weil alle ihre Teilzahlen 1, 7, 3, 17 und 73 obige Bedingung erfüllen.

Im Gegensatz dazu ist 60 649 eine Radieschenprimzahl, denn die ganze Zahl ist zwar prim, aber alle Teilzahlen 6, 60, 606, 6064, 64, 649, 4, 49 und 9 sind zusammengesetzt.

Wie heißt die kleinste Radieschenprimzahl, und welches ist die größte Randenprimzahl?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 10 48 40, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir drei Jahrgangs-CD-ROMs Spektrum 2005. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 11. 7. 2006, eingehen.

Lösungen zu »Winzers Erbe« (Mai 2006)

Unter den fünf Kindern sind 45 Fässer verschiedenen Füllungsgrades zu verteilen. Wir messen den Inhalt jedes Fasses in Viertelfasseinheiten (VFE) und bezeichnen jedes Fass mit der Zahl (0, 1, 2, 3 oder 4), die den Füllungsgrad in VFE angibt.

Jedes Kind soll mindestens ein Fass von jedem Füllungsgrad bekommen. Durch diese Bedingung sind 25 Fässer bereits verteilt: Jedes Kind bekommt fünf Fässer mit zusammen 10 VFE Inhalt.

Nur die restlichen 20 Fässer sind noch so aufzuteilen, dass jedes Kind genau vier Fässer mit insgesamt 8 VFE bekommt.

Es gibt folgende Möglichkeiten, aus vier Fässern 8 VFE zusammenzustellen:

A:	4 + 4 + 0 + 0
B:	4 + 3 + 1 + 0
C:	4 + 2 + 2 + 0
D:	4 + 2 + 1 + 1
E:	3 + 3 + 2 + 0
F:	3 + 3 + 1 + 1
G:	3 + 2 + 2 + 1
H:	2 + 2 + 2 + 2

Aus diesen acht Möglichkeiten A bis H sind jetzt fünf derart auszuwählen, dass von jedem Füllungsgrad vier Fässer verwendet werden.

Damit die vier vollen Fässer ihren Abnehmer finden, muss ein Kind das Sortiment A bekommen; um die beiden restlichen vollen Fässer unterzubringen, stehen die Kombinationen B/C, B/D und C/D zur Verfügung.

Zu jeder dieser Möglichkeiten müssen noch zwei der vier Sortimente E, F, G, H ausgewählt werden. H scheidet in jedem Fall aus, da wir bereits mindestens ein halbvolles Fass verteilt haben.

Zu C/D passen nur noch E und F, da sonst nicht alle zu drei Vierteln gefüllten Fässer verteilt würden. Bei B/C sind schon alle leeren Fässer verteilt, was F/G erzwingt. Bei B/D sind drei der zu einem Viertel gefüllten Fässer verteilt, also bleibt nur E/G.

Insgesamt erhält man also folgende drei Lösungen für die Verteilung der Fässer auf die fünf Kinder: A/B/C/F/G, A/B/D/E/G und A/C/D/E/F. Dazu bekommt jedes Kind, wie oben erwähnt, noch ein Fass von jedem Füllungsgrad.

Die Gewinner der drei T-Shirts »Pioneer 11« sind Valentin Kreh, Nürnberg; Maresa Lehmann, Homburg und Henning Schulze, Karlsruhe.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.