MATHEMATISCHE UNTERHALTUNGEN

CARL-FRIEDRICH-GAUSS-PREIS

Die Integration des Zufalls

Der 90-jährige japanische Mathematiker Kiyoshi Itô erhält den erstmals vergebenen Preis »für mathematische Forschung, die besondere Auswirkungen außerhalb der Mathematik hat«.

Von Christoph Pöppe

Schon richtig: Das Geschäftsprinzip der Mathematik ist die Weltabgewandtheit. Ihre Vertreter befassen sich mit der Realität nicht direkt, sondern nur über eine Idealisierung, die das Wesentliche herausarbeitet und die lästigen Ungenauigkeiten der realen Dinge vernachlässigt.

Aber das ist nur die eine Seite. Auf der anderen Seite hat die Aktivität der Mathematiker enorme Auswirkungen auf die reale Welt. Die klassische Verkörperung beider Seiten ist Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), der »Princeps mathematicorum« (Fürst der Mathematiker). Er führte nicht nur die Zahlentheorie zu höchster Blüte, jenen einstmals realitätsfernsten Zweig der Mathematik, der erst in jüngster Zeit unverhofft zu Anwendbarkeitsehren gelangte; seine »Methode der kleinsten Quadrate« kommt überall dort zum Einsatz, wo es die Folgen lästiger Ungenauigkeiten realer Dinge, sprich Messfehler, zu bewältigen gilt.

Mit gutem Grund ist daher der neu geschaffene Preis für »mathematische Forschung, die besondere Auswirkungen außerhalb der Mathematik hat« nach Gauß benannt. Gestiftet von der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der International Mathematical Union aus den Überschüssen des mathematischen Weltkongresses von 1998 in Berlin, bringt der Preis seinem Träger neben der Ehre eine Medaille und 10 000 Euro Preisgeld. Die erste feierliche Preisverleihung fand am 22. August auf dem diesjährigen Weltkongress in Madrid statt, gemeinsam mit den (seit 1936 verliehenen) Fields-Medaillen und dem (seit 1982 vergebenen) Nevanlinna-Preis für mathematische Aspekte der Informatik. Nach dem Stand der Planung bei Redaktionsschluss war es König Juan Carlos persönlich, der die Preise überreichte.

Der Preisträger ist der 90-jährige Japaner Kiyoshi Itô, der seine bahnbrechenden Leistungen in den 1940er Jahren erarbeitet hat. Der lange Verzug ist unvermeidlich. Mangels Existenz konnte der Gauß-Preis nicht früher verliehen werden. Und natürlich müssen unter den Weltklasse-Kandidaten die Alten zuerst an die Reihe kommen, denn sie sollen noch zu Lebzeiten geehrt werden. Das ist für den ebenfalls überragenden George Dantzig (1914 – 2005), den Erfinder des längst zu Lehrbuchwissen gewordenen Simplex-Algorithmus, nicht mehr gelungen.

DEUTSCHE MATHEMATIKER-VEREINIGUNG

Die erstmals verliehene Gauß-Medaille trägt auf der Vorderseite ein in Linien aufgelöstes Porträt des Namensgebers. Auf der Rückseite steht der Kreis auf der Kurve für den 1801 neu entdeckten Kleinplaneten Ceres und das Quadrat für die von Gauß erfundene Methode der kleinsten Quadrate, mit der er die Wiederauffindung des zeitweilig hinter der Sonne verschwundenen Himmelskörpers ermöglichte.

ALLE DREI FOTOS: ARCHIV KIYOSHI ITÔ

Kiyoshi Itô 1954 am Institute for Advanced Studies in Princeton, 1978 bei einem Vortrag an der Cornell-Universität in Ithaca (New York) und 2005 bei der Feier seines 90. Geburtstags

Die Geschichte von Itôs Werk beginnt in der Realität, mit einem Blick durchs Mikroskop, unter dem man im Wasser schwebende Pollenkörner einen wilden Tanz aufführen sieht. Und sie endet – vorläufig – in der Realität, aber an einer ganz anderen Stelle: auf dem Börsenparkett, wo es zum Beispiel darum geht, den Preis einer Aktienoption zu finden, also des Rechts, zu heute festgelegtem Preis ein Geschäft in der Zukunft abzuschließen. Dazwischen liegt Mathematik reinsten Wassers – abstrakteste Begriffsbildungen, deren Herkunft aus der Realität nur noch mühsam zu erkennen ist, Formeln, die man leichter manipulieren als in Worten ausdrücken kann, Integrale, unendlichdimensionale Räume und Konvergenzbeweise.

Unendliche Zittrigkeit

Das Thema, das diese so disparat scheinenden Dinge verbindet, ist der Zufall, und zwar in seiner reinsten und zugleich wildesten Form. Auch ein Würfel realisiert eine Folge zufälliger Ereignisse; aber die einzelnen Würfe kommen säuberlich getrennt hintereinander, sodass man sie nummerieren kann. Der wilde Zufall dagegen schlägt nicht so geordnet zu, sondern zu Zeitpunkten, die ihrerseits vom Zufall bestimmt sind, und das ohne Unterlass. Ein zufallsfreies Intervall auf der Zeitachse gibt es nicht.

Das ist der Anblick, der sich 1827 dem schottischen Botaniker Robert Brown bot, als er Pollenkörner, später auch Staubteilchen in Wasser unter dem Mikroskop beobachtete. Die Zitterbewegung dieser Teilchen, die heute allgemein Brown'sche Bewegung heißt, ist auf zufällige Stöße der umgebenden Wassermoleküle zurückzuführen, die sich in ihrem Effekt fast, aber nicht ganz ausgleichen.

Kein Geringerer als Albert Einstein formulierte 1905, in einer der drei revolutionären Arbeiten seines »annus mirabilis«, ein mathematisches Modell der Brown'schen Bewegung. Norbert Wiener (1894–1964), besser bekannt als Begründer der Kybernetik, lieferte 1923 den zugehörigen Existenzbeweis nach.

Es stellt sich heraus, dass Einstein und Wiener damit so etwas wie den Prototyp des reinen Zufalls gefunden hatten. Was auch immer die Staubteilchen im Wasser bewegt, die Schlange an der Supermarktkasse anwachsen und schrumpfen lässt oder einen Aktienkurs auf und ab treibt, es kann plausibel durch dieses Modell beschrieben werden. Immer wenn die »Triebkraft« keine räumliche Richtung bevorzugt und kein Gedächtnis hat, das heißt in ihren Effekten von der Vergangenheit unabhängig ist, ergibt sich ein Wiener-Prozess; so nennt man mittlerweile das mathematische Modell in Abgrenzung von der physikalischen Realisierung.

Dieser ist damit ähnlich universell wie die Gauß'sche Normalverteilung, die sich immer dann einstellt, wenn sehr viele zufällige Einflüsse unabhängig voneinander auf eine Messgröße einwirken. In der Tat ist ein Wiener-Prozess so etwas wie eine Aneinanderreihung unabhängiger Zufallsereignisse, die sämtlich derselben Gauß-Verteilung mit dem Erwartungswert null genügen – nur dass in kontinuierlicher Zeit von einer Aneinanderreihung nicht wirklich die Rede sein kann.

Ausgerechnet dieses mathematisch wohl begründete Reinheitsgebot verursacht nun enorme Probleme. Die Funktion, die den Ort des Teilchens in Abhängigkeit von der Zeit beschreibt, ist zwar stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar. Der Weg des zitternden Teilchens ist nicht nur unendlich zittrig, sondern auch unendlich lang.

Auf solch wilde Gebilde ist ein Standardwerkzeug der Mathematik, das Integral, nicht mehr anwendbar. Wie sich ein Punkt unter dem Einfluss einer Kraft bewegt, beschreibt man durch eine (gewöhnliche) Differenzialgleichung und deren Lösung durch ein Integral. Kommt zu der deterministischen Kraft noch der ▷

Einfluss des Zufalls hinzu, so wird aus der gewöhnlichen eine stochastische Differenzialgleichung, und das Integral, das über den unendlich langen Weg genommen werden müsste, ist nicht mehr definiert.

An dieser Stelle setzt die Arbeit des Preisträgers ein. Um das untauglich gewordene klassische Integral durch ein funktionierendes Werkzeug zu ersetzen, erarbeitete Itô ab 1942 den Integralbegriff von Grund auf neu, angefangen bei den Treppenfunktionen, für die das klassische Integral noch eine unproblematische Summe von Rechtecks-Flächeninhalten ist (siehe Kasten rechts). Am Ende langer Bemühungen stand ein neues Konzept, das »stochastische Integral«, mit zugehörigen Rechenregeln und einer Lösungstheorie für stochastische Differenzialgleichungen.

Die Mathematiker nahmen die neuen Resultate zunächst nur zögerlich zur Kenntnis, zumal Japan im Zweiten Weltkrieg vom Rest der Welt wissenschaftlich weit gehend isoliert war. Erst ab 1954 konnte Itô seine Erkenntnisse am Institute for Advanced Studies in Princeton verbreiten.

Kurioserweise wird eines seiner fundamentalsten Resultate allgemein »Itôs Lemma« genannt, als wäre es ein eher nebensächlicher Hilfssatz. Henry McKean, der mit Itô intensiv zusammenarbeitete, hatte diese Bezeichnung mehr oder weniger versehentlich eingeführt, und sie bürgerte sich ein, weil Itô in landesüblicher Bescheidenheit ihr nicht widersprach. Aber so wie die ganze klassische Analysis an der Kettenregel hängt, so beruht die stochastische Analysis auf Itôs Lemma.

Es liegt in der Natur der Sache, dass ein stochastisches Integral an sich nie das Endziel einer Untersuchung ist. Einen stochastischen Prozess kann man nicht im Voraus kennen – sonst wäre er nicht stochastisch –, also ist es sinnlos zu fragen, wo sich ein Punkt, der einer stochastischen Differenzialgleichung folgt, in fünf Minuten befinden wird oder wann er zum ersten Mal eine gedachte Grenzlinie überschreitet. Was Itôs Methode jedoch liefert, sind Wahrscheinlichkeiten für die genannten Ereignisse.

Nehmen wir statt eines Teilchenorts den Kassenstand eines Spielers beim Roulette oder den Wert eines Anlagenportfolios. Dann interessiert dessen Besitzer brennend der Zeitpunkt, zu dem dieser – vom Zufall wie den eigenen Aktionen abhängige – Wert erstmals die Nulllinie unterschreitet; denn dann ist das Spiel unwiderruflich zu Ende. Weniger risikofreudige Spieler am Aktienmarkt, insbesondere Banken, wollen die eigenen Aktionen so steuern, dass die Effekte des Zufalls möglichst gut kompensiert werden.

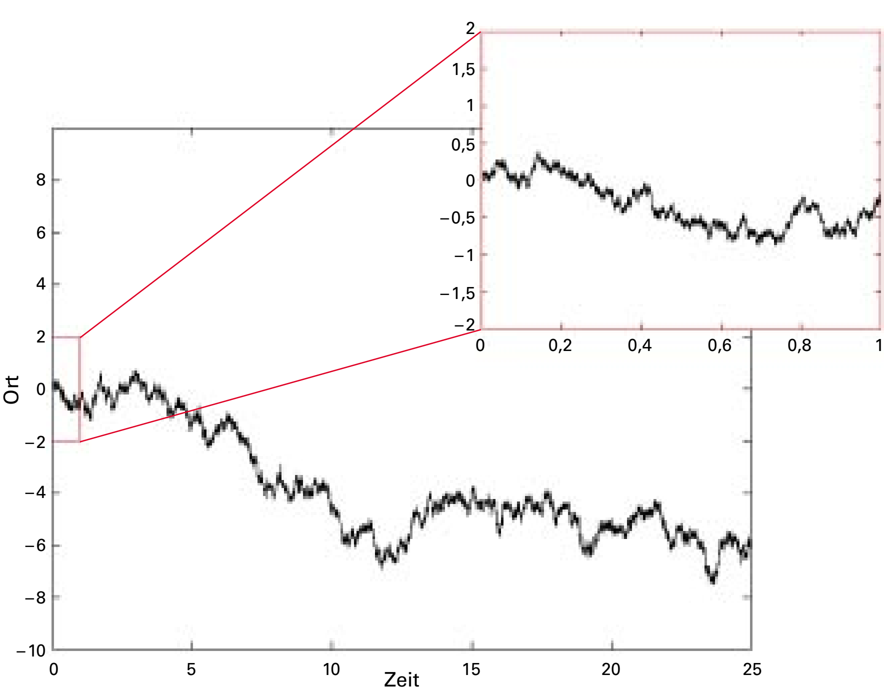
Das ist die Grundidee des Optionshandels: Eine Bank verkauft einem Kunden das Recht, zu einem zukünftigen Zeitpunkt eine gewisse Menge von Aktien zu einem heute schon festgelegten Preis zu erwerben. Sie schließt also mit ihm eine Wette auf die Zukunft ab. Also muss sie Vorkehrungen treffen, um am Fälligkeitstag für den Fall, dass sie verliert, das Geld beisammenzuhaben. Der Aufwand dafür entspricht dem Preis der Option. Allerdings kann die Bank diese Vorkehrungen während der gesamten Laufzeit der Wette und abhängig vom – zufällig variierenden – Kurs der Aktie, der am Ende über die Auszahlung der Wette bestimmt, betreiben. Also ist der Preis der Option über ein stochastisches Integral zu berechnen.

Das Eindringen der Mathematik in die Hochfinanz

So kommt Itôs Methode zu ihrer derzeit populärsten Anwendung: Die amerikanischen Wirtschaftswissenschaftler Fischer Black, Myron S. Scholes und Robert C. Merton fanden Anfang der 1970er Jahre eine explizite, nur von bekannten Daten abhängige Formel zur Berechnung des Preises für eine Option. Für diese mittlerweile berühmt gewordene und allenthalben verwendete Black-Scholes-Formel erhielten Merton und Scholes 1997 den Wirtschafts-Nobelpreis (Black war 1995 gestorben).

Es darf auch – die Theorie ist abstrakt genug dafür – statt eines Teilchenorts oder eines Aktienkurses eine völlig andere Größe sein: die Größe einer Tier- oder Pflanzenpopulation, der Anteil, mit dem ein bestimmtes Allel eines Gens in einer Population vorkommt, oder noch detailliertere biologische Größen. Da in solchen Fällen der Zufall nicht ganz blind ist – eine Population schwankt in absoluten Zahlen umso stärker, je größer sie ist, ein Allel hat geringfügig bessere Fortpflanzungschancen als ein anderes –, ist er durch Varianten eines Wiener-Prozesses zu modellieren, eine Erweiterung, für die Itôs Theorie von entscheidender Bedeutung ist. Man erhält so zum Beispiel Aussagen über die Wahrscheinlich-

Ein Wiener-Prozess (die mathematische Idealisierung einer Brown'schen Bewegung) ist unendlich zittrig auf jeder Größenskala: Die eingeklinkte Grafik ist eine Ausschnittsvergrößerung der großen. Wenn man die Ortsskala mit dem Faktor *f* und die Zeitskala mit dem Faktor f^2 vergrößert, sieht das Bild im Wesentlichen genauso aus wie zuvor.



HTTP://EN.WIKIPEDIA.ORG/WIKI/IMAGE:WIENER_PROCESS_ZOOM.PNG

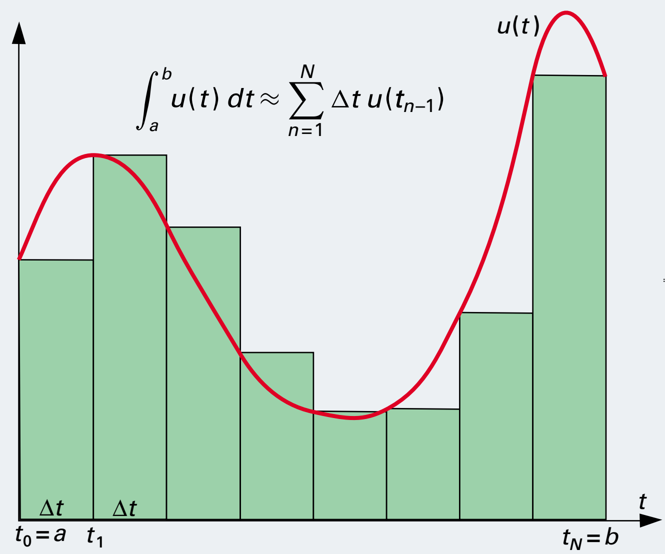
Das Itô-Integral oder die Kunst, einen unendlich langen Weg zurückzulegen

Das klassische Integral beschreibt – zum Beispiel – den Inhalt der Fläche unter dem Graphen einer Funktion *u*. Man approximiert die Funktion *u* durch eine stückweise konstante Funktion (»Treppenfunktion«). Deren Integral ist eine einfache Summe von Rechtecks-Flächeninhalten $u(t_n)\,(t_n - t_{n-1})$ (Bild rechts). Indem man diese Rechtecke immer schmäler macht, approximiert man die gegebene Funktion immer besser. Das Integral $\int u(t)\,dt$ wird dann über einen Grenzwertprozess definiert.

Eine Verallgemeinerung des klassischen Integrals ist das Stieltjes-Integral. Ein Ausdruck wie $\int u(t)dF(t)$ ist der Grenzwert einer Summe von Termen der Form $u(t_n)\,(F(t_n) - F(t_{n-1}))$. In der Wahrscheinlichkeitstheorie kommen solche Integrale häufig vor; dabei ist *F* die Verteilungsfunktion einer Wahrscheinlichkeitsverteilung und muss nicht differenzierbar, noch nicht einmal stetig sein. Nur die Summe der Beträge $|F(t_n) - F(t_{n-1})|$, die so genannte Variation von *F*, darf nicht gegen unendlich gehen, wenn die Unterteilung (die Punkte t_n) beliebig verfeinert wird. Genau das passiert aber, wenn *F* der Pfad eines Wiener-Prozesses ist.

Was tun? Wenn einer von zwei Partnern sich danebenbenimmt (in diesem Fall der Pfad *F*), kann der andere (die Funktion *u*) das durch besonderes Wohlverhalten wieder gutmachen. In der Analysis nutzt man das, indem man die Bürde des Wohlverhaltens – mittels »partieller Integration« – von der wilden Funktion auf eine eigens dafür bereitgestellte, brave Kollegin abwälzt. So kann man auch widerspenstigen Objekten noch einige Erkenntnisse abgewinnen. Itôs Theorie bewältigt den noch schwierigeren Fall, dass die zahme Funktion *u* ihrerseits vom wilden Pfad *F* abhängt.

Ein Wiener-Pfad ist allerdings nicht beliebig wild. Seine Variation ist unendlich, aber die »quadratische Variation«, das ist die Summe der Betragsquadrate $|F(t_n) - F(t_{n-1})|^2$ im Grenzwert unendlicher Verfeinerung, ist beschränkt. Entsprechend enthält das Itô-Integral einen Term mit einer zweiten Ableitung von *u*, der im klassischen Integral nicht vorkommt.



CHRISTOPH PÖPPE / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

keit, mit der ein Erbmerkmal oder eine ganze Population ausstirbt.

Die genannte Erweiterung konnten sich wiederum die Finanzwissenschaftler zu Nutze machen. John C. Cox, Stephen A. Ross und Jonathan E. Ingersoll fanden 1985 ein Modell für die zeitliche Entwicklung von Zinssätzen, das inzwischen zum Standard geworden ist. Stephen L. Heston brachte 1993 das Black-Scholes-Modell durch eine Verallgemeinerung der Realität näher.

Tinte zerfließt rückwärts in der Zeit

Die Mathematik kennt übrigens eine andere, traditionsreiche Methode, den Zufall zu bewältigen: Man nimmt ihn überhaupt nicht zur Kenntnis. Ein Tropfen Tinte, ins Wasserglas getropft, besteht aus lauter Farbstoffpartikeln, die jedes für sich eine Brown'sche Bewegung vollführen. Aber in der Analysis stellt man das gedachte Mikroskop so unscharf, dass man keine einzelnen Teilchen mehr sieht, sondern nur ein Kontinuum, eine ortsabhängige Tintenkonzentration. Für diese mathematische Größe gibt es eine ganz deterministische (partielle) Differenzialgleichung, die Diffusionsgleichung, und ein reichhaltiges Arsenal an Lösungsmethoden.

Beide Modelle sind in ihren Methoden grundverschieden; aber nachdem sie – zumindest bei Tinte in Wasser – dieselbe Realität beschreiben, müssten sie sich doch eigentlich ineinander umrechnen lassen. Es geht, ist aber nicht einfach. Die Black-Scholes-Formel verwendet diese Umrechnung: Der Optionspreis ist die Lösung einer Diffusionsgleichung. Allerdings diffundiert da ziemlich abstrakte Tinte, und das auch noch rückwärts in der Zeit. Der Preis des Optionsgeschäfts ist genau bekannt für den Zeitpunkt der Fälligkeit – so wird die Option ja verkauft. Je weiter man von diesem zukünftigen Zeitpunkt in Richtung auf die Gegenwart zurückgeht, desto mehr verschwimmt diese präzise Information – und die Black-Scholes-Formel erzählt uns, wie man von dieser diffusen Preisinformation nützlichen Gebrauch macht.

Diese gegenseitige Befruchtung von klassischer und stochastischer Analysis ist noch relativ neu. Jahrzehntelang rechneten Vertreter beider Methoden nebeneinander her, ohne mit der jeweils anderen Methode allzu viel anfangen zu können. Erst seit den 1970er Jahren hat die geniale Leistung Itôs im Bewusstsein aller Mathematiker den ihr gebührenden Platz eingenommen. ◁

AUTOR UND LITERATUR

Christoph Pöppe ist Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Stochastische Differentialgleichungen. Theorie und Anwendung. Von Ludwig Arnold. Oldenbourg, München 1973

Brownian motion and stochastic calculus. Von Ioannis Karatzas und Steven E. Shreve. Springer, New York 1988

Stochastic integrals. Von Henry P. McKean. Academic Press, New York 1969

On stochastic differential equations. Von Kiyoshi Itô. American Mathematical Society, New York 1951

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.