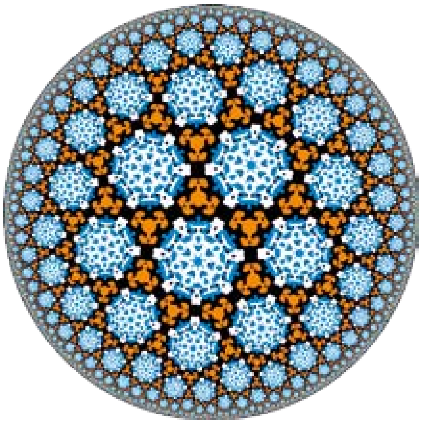
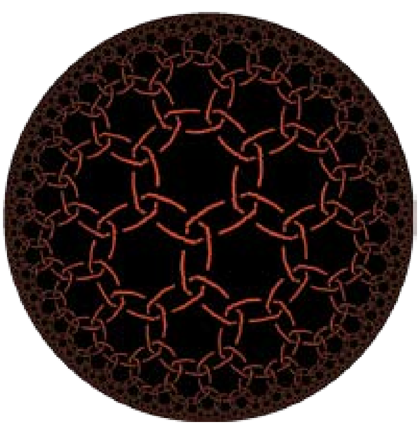
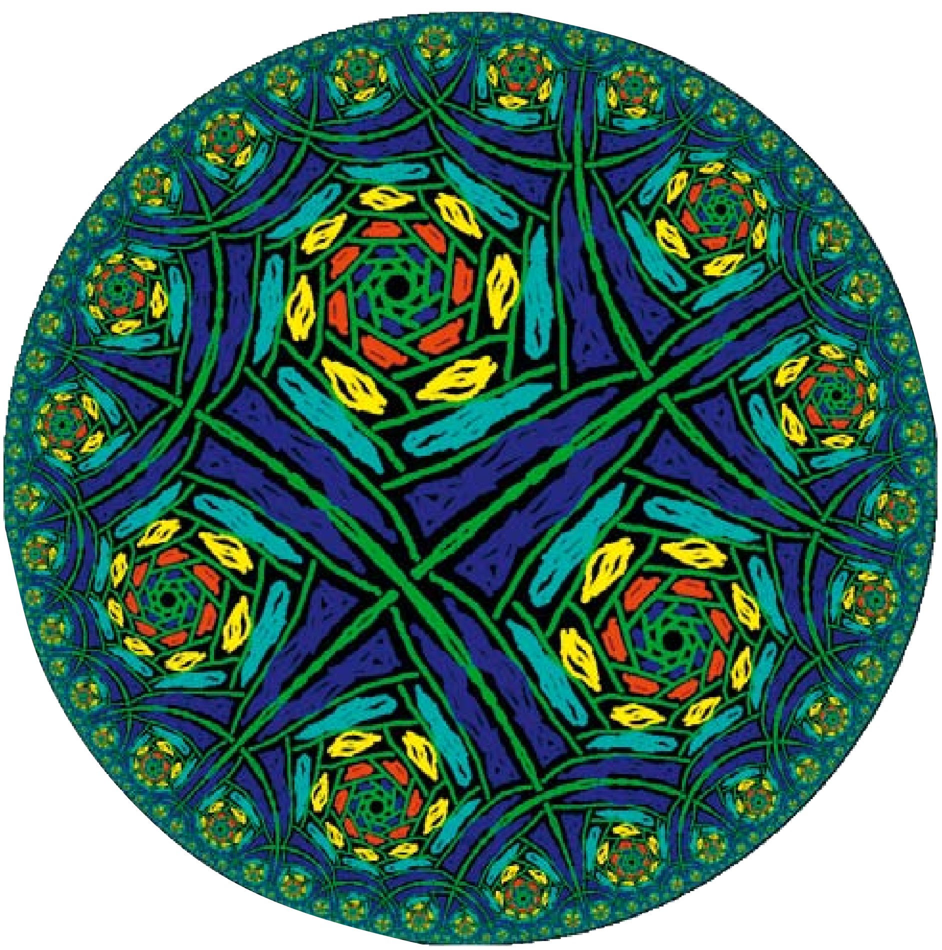


VISUALISIERUNG

Das Ausgedachte in Sichtbares umgerechnet

Imaginäres in Reales umgewandelt: Die Ausstellung »Imaginary 2008« versammelt Mathematik-Visualisierungen aus aller Welt.





MARTIN VON GAGERN

Einige Kostproben aus Martin von Gagerns Software zur Pflasterung der hyperbolischen Ebene: Im Bild oben Mitte sind Dreiecke gleich gefärbt, wenn sie durch gewisse elementare Transformationen aufeinander abgebildet werden; mit Hilfe dieser Transformationen füllt das Programm die Fläche mit Repliken eines »Urmusters«. In den übrigen Bildern hat der Benutzer das Urmuster mit der Maus gezeichnet.

Von Christoph Pöppe

Eine Polynomgleichung wie zum Beispiel $x^5 - 4x^3 - x^2 + 1 = 0$ ist nicht einfach durch Anwendung einer Formel zu lösen. Die Mitternachtsformel aus der Schule – mit p, q und der Wurzel – hilft nur, wenn der Grad des Polynoms, das heißt die höchste vorkommende Potenz von x, gleich 2 ist (»quadratische Gleichung«). Die entsprechende Formel für den Grad 3 ist schon sehr umfangreich, für den Grad 4 ist sie geradezu monströs, und für Gleichungen fünften und höheren Grades gibt es gar keine geschlossene Formel mehr. Da hilft nichts als schnöde Numerik: Ist es erst einmal gelungen, die Nullstelle des Polynoms von beiden Seiten in die Zange zu nehmen, dann ist es nicht mehr schwer, sie auf so viele Dezimalstellen zu bestimmen, wie man braucht.

Für Polynome in drei Variablen x, y und z ist die Situation nicht grundsätzlich besser. Im Allgemeinen gibt es nicht nur wenige isolierte Lösungen, sondern ein ganzes Kontinuum. Alle Punkte (x, y, z) im Raum, die eine Gleichung wie $x^2z^2+z^4-y^2-z^3=0$ erfüllen, bilden eine Fläche. Aber wieder gibt es kein allgemeines, formelmäßig beschreibbares Verfahren, die Punkte dieser Fläche zu finden. Um sie darzustellen, muss der Computer ziemlich viele Punkte durchprobieren. Entsprechend ist der Gleichung nicht ohne Weiteres anzusehen, wo die Fläche sich selbst durchdringt oder wo sie so genannte Singularitäten wie Spitzen oder scharfe Kanten hat.

Hat man jedoch einen Punkt der Fläche gefunden, dann ist es kein Problem auszurechnen, wie die Fläche in einer kleinen Umgebung dieses Punkts aussieht. Immerhin sind Polynome differenzierbare Funktionen; diese Eigenschaft verschafft einem zwar nicht unbedingt einen Punkt der Fläche, aber zu einem gefundenen Punkt die Tangentialebene an die Fläche in diesem Punkt – es sei denn, der Punkt wäre eine Singularität. Wenn nun die Fläche aus einem spiegelnden Material wäre, dann würde ein Lichtstrahl, der auf einen Punkt der Fläche auftrifft, so reflektiert, als läge in diesem Punkt statt der echten Fläche die Tangentialebene. (Die ist natürlich in jedem Punkt eine andere.)

Damit sind algebraische Flächen – so heißen die Nullstellenmengen von Polynomen – dankbare Objekte für die Visualisierung mit dem Computer. In den gedachten Raum, in dem die Fläche lebt, setze man ein paar geeignete Lichtquellen und berechne, welchen Anteil dieses Lichts jeder sichtbare Punkt der Fläche ins Auge des Betrachters wirft. Dabei unterstellt man in der Regel, dass die Fläche das Licht nicht nur spiegelnd reflektiert, sondern auch diffus streut. Sie wirft das Licht also nicht nur in der Richtung zurück, die der Regel »Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel« entspricht, sondern auch in abweichenden Richtungen – je größer die Abweichung, desto weniger.

Eistüte und Dingdong mit spiegelndem Glanz

Alle Computerspiele arbeiten mit derartigen Beleuchtungsmodellen. Aber algebraische Flächen werden bei geschickter Programmierung viel schöner als die virtuellen Helden samt Drachen und zugehörigem Inventar; denn deren Oberflächen werden aus lauter kleinen Dreiecken mit jeweils einheitlichen Reflexionseigenschaften zusammengesetzt, und da sind sichtbare Brüche an den Dreieckskanten nicht immer vermeidbar.

Herwig Hauser, Professor für Mathematik an den Universitäten Wien und Innsbruck, hat mit seinem Team die Kunst der Visualisierung algebraischer Flächen zu großen Höhen getrieben. Be-

Mit dieser »Kollektion« aus Flächen gewannen Richard Palais und Luc Benard den »Visualization Challenge 2006« der Zeitschrift »Science«.

RICHARD PALAIS UND LUC BENARD

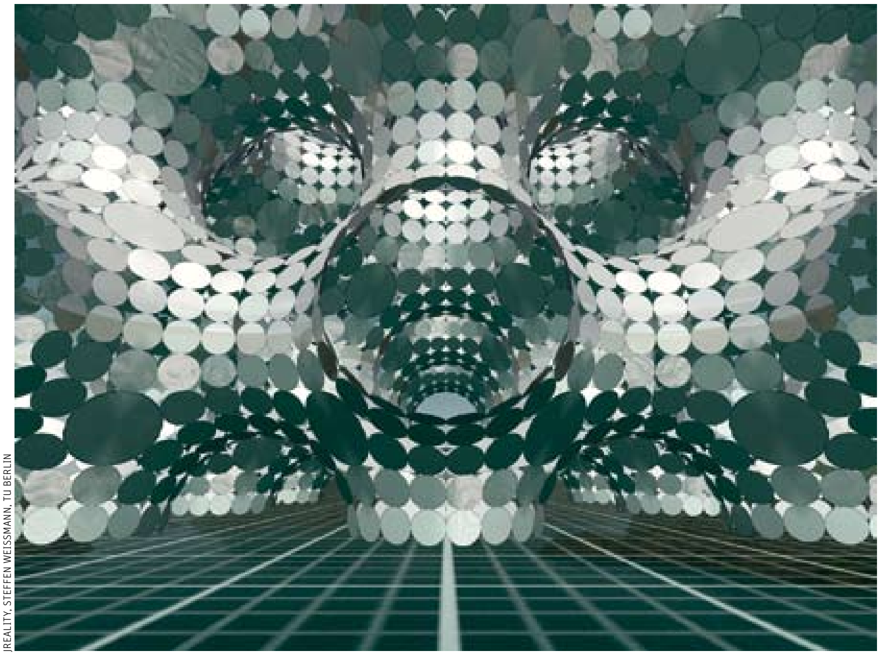
sucher des Internationalen Mathematik-Kongresses in Madrid 2006 konnten sich an einem Sortiment kunstvoll ausgearbeiteter Flächenbilder erfreuen. Die Fläche, welche die Deutsche Mathematiker-Vereinigung dem Schriftsteller Hans Magnus Enzensberger widmete (Spektrum der Wissenschaft 1/2007, S. 114), stammt im Konzept ebenfalls aus Hausers Werkstatt.

Gert-Martin Greuel, Direktor des Mathematischen Forschungsinstituts Oberwolfach und als Professor an der Universität Kaiserslautern selbst in der Singularitätenforschung aktiv, griff die Ausstellung in Madrid auf, um zum Jahr der Mathematik 2008 eine Ausstellung mit den »international besten Mathematik-Visualisierungen« zu konzipieren und auf die Deutschland-Rundreise zu schicken. »Oberwolfach«, das ist jenes Institut im Schwarzwald mit den paradiesischen Arbeitsmöglichkeiten, wo sich jede Woche eine andere Gruppe von Mathematikern zu einer Tagung zusammenfindet – darunter auch Visualisierer wie Ulrich Pinkall aus Berlin und Richard Palais aus Irvine (Kalifornien), der vor zehn Jahren emeritiert und immer noch aktiv ist.

Palais und seine Arbeitsgruppe entwickeln das Visualisierungsprogramm »3D-XplorMath« – so erfolgreich, dass Palais gemeinsam mit dem Künstler Luc Benard den Visualisierungswettbewerb der Zeitschrift »Science« gewann (Bild links unten). Bei seiner Vergangenheit verwundert es nicht, dass er ästhetischen Reiz in merkwürdig gekrümmten Flächen sucht (und findet), für die nur eine ziemlich kleine Gruppe von Mathematikern professionelles Interesse aufbringt.

Ein weiterer prominenter Mathematik-Künstler ist Jos Leys, den ich Ihnen vor gut einem Jahr an dieser Stelle vorgestellt habe (Spektrum der Wissenschaft 2/2007, S. 105).

Warum soll man überhaupt die Ausstellung besuchen, statt sich die Bilder bequem im Internet anzusehen? Nun ja, auf großen Ausstellungstafeln wirken die algebraischen Flächen schon deutlich eindrucksvoller. Einige Objekte sind sogar in leibhaftigem Kunststoff zu besichtigen; die Technik der computergesteuerten Stereolithografie hat große Fortschritte gemacht. Aber die wesentliche Stärke der Ausstellung liegt in den interaktiven Möglichkeiten. Mit Hilfe des Programms »jreality«, das von einer Gruppe an der Technischen Universität Berlin entwickelt wird, fliegt der Benutzer durch eine imaginäre Landschaft und besichtigt von allen Seiten so merkwürdige Dinge wie eine Boy'sche Minimalfläche oder die dreifach periodisch fortsetzbare Minimalfläche mit der Symmetrie des Würfels; nur ist diese Fläche nicht durchgehend dargestellt, sondern aus Kreisscheiben unterschiedlicher Größe zusammengesetzt (Bild oben).



JREALITY, STEFFEN WEISSMANN, TU BERLIN

Eine dreifach periodische Minimalfläche mit der Symmetrie des Würfels wird hier durch Kreisscheiben approximiert.

Darüber hinaus kann der Besucher gestalterisch tätig werden. Ornamente zeichnen sich dadurch aus, dass ein und dasselbe Bildelement verschoben, gedreht und / oder gespiegelt immer wieder auf der Bildfläche vorkommt – im Prinzip unendlich oft. Es gibt genau 17 wesentlich verschiedene Weisen (die 17 »kristallografischen Gruppen«), Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen so zu kombinieren, dass die Bilder eines »Urmusters« lückenlos zusammenpassen, ohne sich zu überlappen. Ein Programm des Studenten Martin von Gagern übernimmt den technischen Teil: die Replikation des Urmusters. Der künstlerische Teil, nämlich das Urmuster selbst mit der Maus zu zeichnen, bleibt dem Besucher überlassen (Bild S. 65).

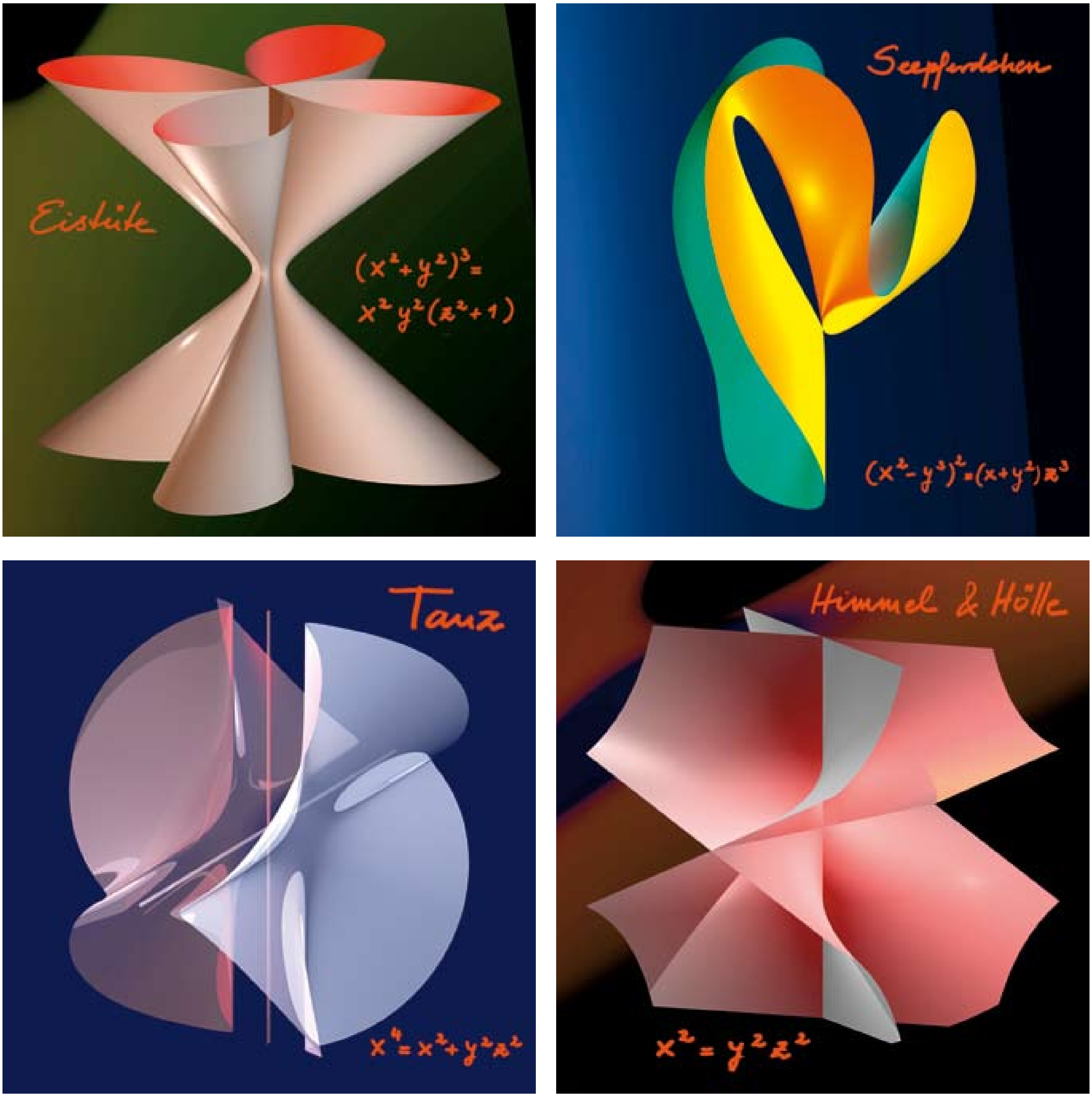
Neuerdings hat Martin von Gagern sein Programm auf die hyperbolische Geometrie erweitert, jene merkwürdige nichteuklidische Welt, in der die Winkelsumme im Dreieck stets kleiner ist als 180 Grad und die man daher zum Bei-

Imaginary 2008

Nach bisheriger Planung ist die Ausstellung
- vom 10. März bis 11. April im Fraunhofer-Institut für Techno- und Wirtschaftsmathematik (ITWM), Kaiserslautern,
- vom 16. bis 25. Mai im Ideenpark 2008 der ThyssenKrupp AG in der Neuen Messe Stuttgart,
- vom 29. Mai bis 25. Juni in den Bahnhofsgalerien, Potsdam, und
- im Rahmen des Wissenschaftssommers vom 28. Juni bis 4. Juli in Leipzig

zu sehen. Darüber hinaus fährt das Wissenschaftsschiff der Leibniz-Gemeinschaft in diesem Jahr durch ungefähr zwanzig Städte in Deutschland und wird einen Teil von Imaginary präsentieren. Weitere Ausstellungstermine in Kassel (August), Köln (September), Konstanz und München (Oktober), Saarbrücken (Oktober / November) und Mainz (November / Dezember) sind geplant und werden auf der Webseite bekanntgegeben. Der Eintritt ist frei.

www.imaginary2008.de



Im Atelier von Herwig Hauser entstehen algebraische Flächen mit den exotischsten Formen.

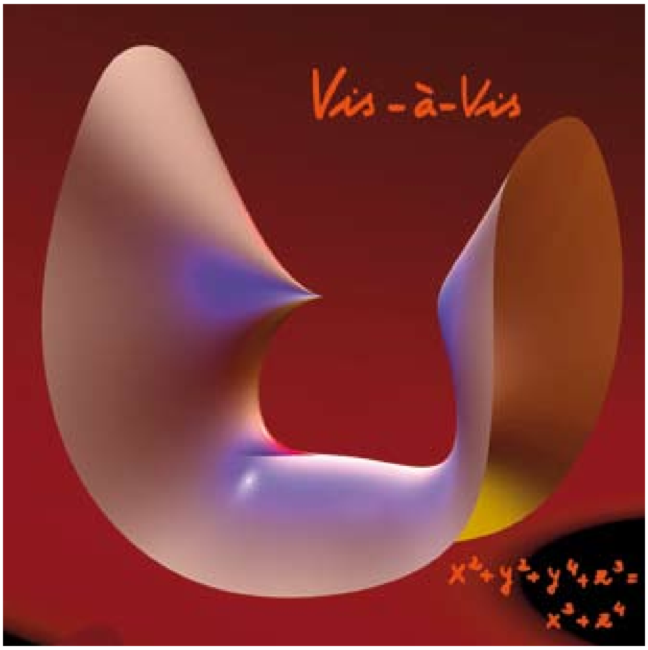
spiel mit rechtwinkligen Fünfecken lückenlos pflastern kann – jawohl, Fünfecke mit fünf rechten Winkeln (Spektrum der Wissenschaft 10/1990, S. 12). Das Problem war so schwierig und von Gagerns Lösung so genial, dass die ursprünglich vorgesehene Diplomarbeit unversehens zur Dissertation geriet.

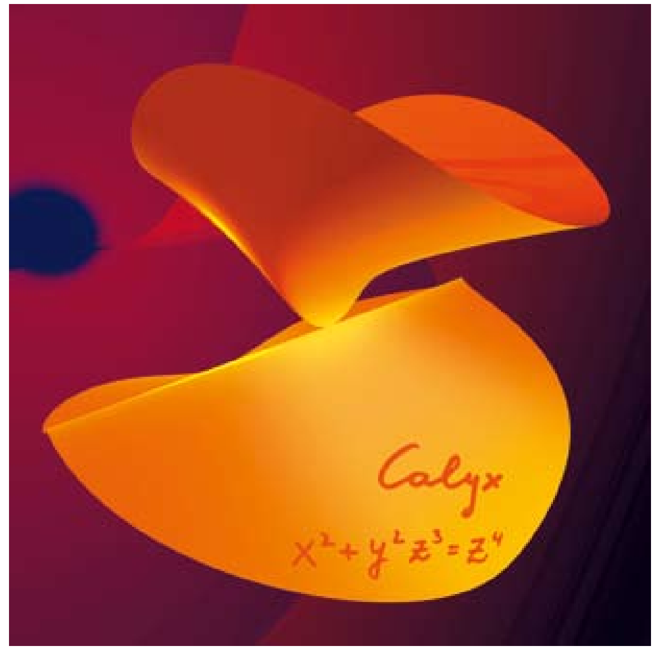
Schließlich kann man sich auch selbst an den algebraischen Flächen versuchen, deren edle Formen Herwig Hauser so trefflich ins Bild zu setzen weiß. Auf einer virtuellen Tastatur gibt man die Formel ein, und schon springt die Fläche auf den Bildschirm und ist nach Belieben von allen Seiten betrachtbar.

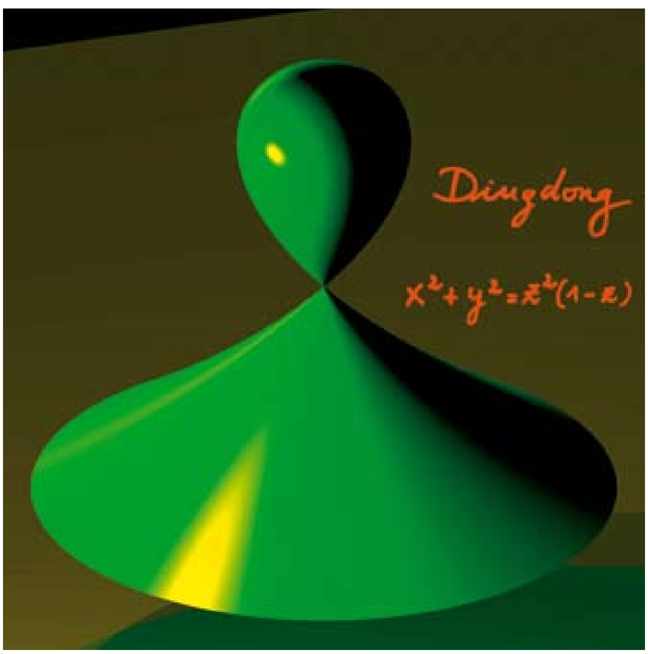
Die Formel darf zwei Parameter namens a und b enthalten; deren Wert kann der Benutzer mit einem virtuellen Schieberegler zwischen 0 und 1 variieren, wobei sich die Fläche entsprechend deformiert. Mit weiteren Regelknöpfen kann man die Fläche im Raum drehen. Von dem Gesamtobjekt, das sich bis ins Unendliche erstrecken kann, zeigt das Programm nur den Teil, der sich innerhalb einer Kugel um den Nullpunkt befindet; der Radius ist ebenfalls durch einen Mausklick einstellbar.

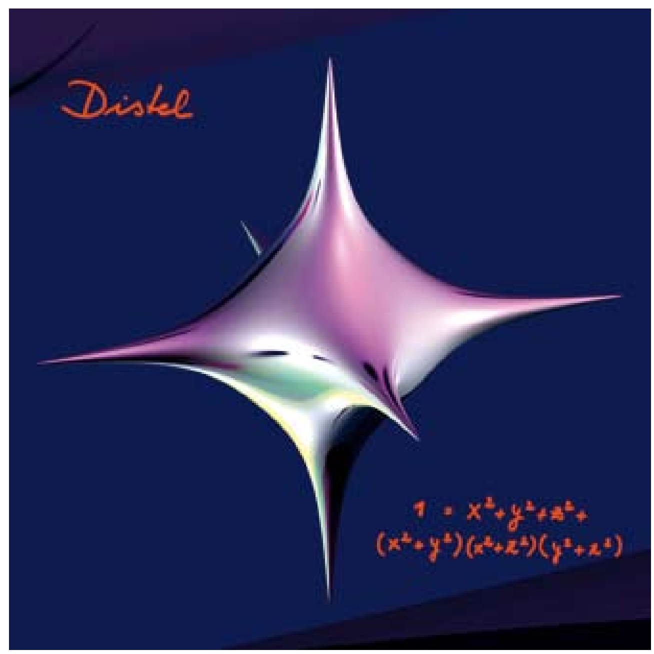
Einige Beispiele, von denen aus man herumprobieren kann, sind vorbereitet, und unversehens landet der ahnungslose Spieler am Bildschirm an der vordersten Front der Forschung.

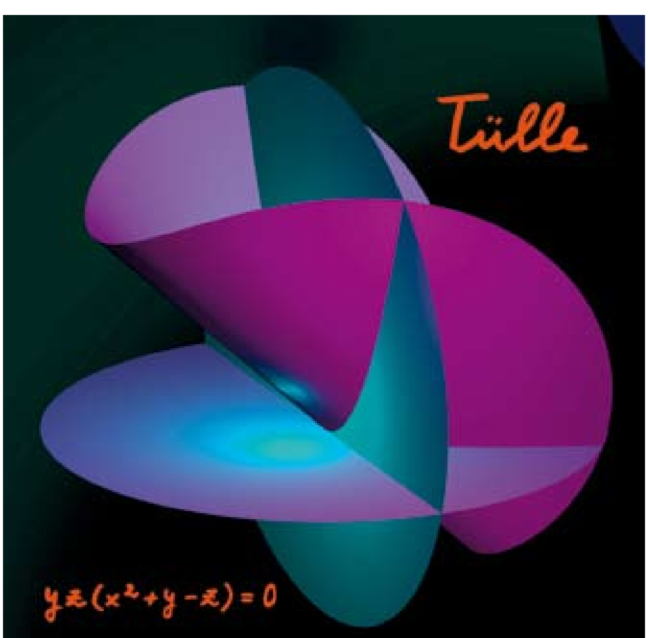
Es ist nämlich noch nicht in jedem Fall bekannt, wie viele Singularitäten eine algebraische Fläche gegebenen Grades höchstens haben kann. Für den Grad 6 hält den Weltrekord die von dem Erlanger Mathematiker Wolf Barth entdeckte Barth'sche Sextik mit 65 Singularitäten und daran ansetzenden Trompetenrohren, die sich in die verschiedensten Raumrichtungen bis ins Unendliche erstrecken. Es ist auch bewiesen, dass mehr Singularitäten beim Grad 6 nicht möglich sind. Für höhere Grade dagegen ist die maximal mögliche Anzahl an Singularitäten











ABBILDUNGEN DIESER DOPPELSEITE: HERWIG HAUSER

Preisausschreiben

Mathematik-Kunst-Wettbewerb

Gemeinsam mit dem Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach veranstaltet Spektrum der Wissenschaft einen Wettbewerb mit dem Ziel, neue, ansehnliche, überraschende oder sonstwie beeindruckende Bilder und Bildsequenzen aus algebraischen Flächen zu erstellen.

Hilfsmittel ist das Programm »Surfer«, das wir zum Download bereithalten. Um eine algebraische Fläche zu erzeugen, genügt es, deren Formel, ein Polynom in den drei Variablen x, y und z, einzugeben.

Mathematische Vorkenntnisse sind hilfreich, aber nicht Bedingung. Beim Aufruf bietet das Programm »Surfer« eine Auswahl an Beispielflächen samt zugehörigen Formeln an. Verändern Sie zunächst diese Beispielformeln, indem Sie für manche Zahlenwerte geringfügig andere einsetzen, und gewinnen Sie so einen ersten Eindruck von den Möglichkeiten des Programms.

Oder arbeiten Sie sich von elementaren Formen zu komplizierteren vor, zum Beispiel:

▶ $x^2+y^2-1=0$ ist die Gleichung für einen Kreis mit Radius 1 und Mittelpunkt 0 in der Ebene. »Surfer« macht daraus eine ganze Röhre mit kreisförmigem Querschnitt; denn die dritte Koordinate z kommt in der Gleichung nicht vor, also enthält die algebraische Fläche für jeden z-Wert einen Kreis. Eine Kugel (mit Radius 1 und Mittelpunkt 0) hat die Gleichung $x^2+y^2+z^2-1=0$.

▶ Wenn Sie die Variable x überall, wo sie vorkommt, durch cx ersetzen, wobei $c \neq 0$ irgendeine reelle Zahl ist, wird die Fläche in x-Richtung mit dem Faktor $1/c$ gestaucht (oder gedehnt, wenn $c<1$ ist). Ersetzen Sie x durch $x-a$, so wandert die Fläche um a in positiver x-Richtung, das heißt nach rechts. Entsprechendes gilt für die Variablen y und z.

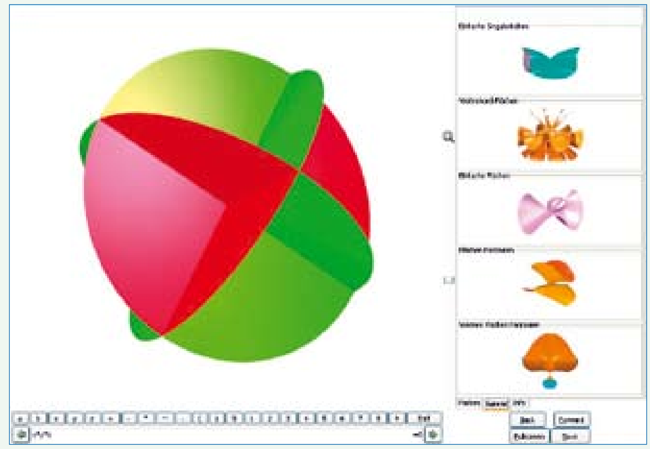
▶ Ein Produkt ist null, wenn einer seiner Faktoren null ist. Das Produkt zweier Formeln zu verschiedenen Flächen ergibt eine Fläche, die aus beiden zusammen besteht. $(x^2+y^2-1)(y^2+z^2-1)(z^2+x^2-1)=0$ erzeugt drei Kreisröhren, die im Nullpunkt senkrecht aufeinander stehen.

▶ Geringfügige Variation der Formel erzeugt eine geringfügig abweichende Fläche. Dabei pflegen besondere Punkte wie Spitzen oder scharfe Kanten »aufzuweichen«.

▶ Wenn in Ihrer Formel nur gerade Potenzen von x vorkommen (x^2, x^4, …, nicht aber x oder x^3), dann bleibt die zugehörige Fläche unverändert (»invariant«) unter der Ersetzung von x durch $-x$. Das heißt, sie ist spiegelbildlich symmetrisch bezüglich der Ebene $x=0$ (das ist die y-z-Ebene). Indem man sich auf gerade Potenzen von y oder z beschränkt, erreicht man Symmetrie bezüglich Vertauschung von vorn und hinten beziehungsweise unten und oben.

▶ Eine andere Art von Symmetrie erreicht man, wenn die Formel gegen die Vertauschung zweier Variablen invariant ist. Dann ist nämlich die Fläche spiegelsymmetrisch bezüglich einer »schrägen« (um 45 Grad gegen die Koordinatenebenen geneigten) Ebene.

▶ Eine Fläche hat die Symmetrie des Dodekaeders (oder des Ikosaeders, was dasselbe ist), wenn sie gegenüber Spiegelungen an dessen sechs Symmetrieebenen invariant ist. Ein prominentes Beispiel ist die Barth'sche Sextik (Bild rechts oben). Dazu genügt es, wenn sie nur von den zwei Polynomen $P_6=(\tau^2x^2-y^2)(\tau^2y^2-z^2)(\tau^2z^2-x^2)$ und $K=x^2+y^2+z^2-1$ abhängig ist ($\tau=(\sqrt{5}+1)/2$ ist das Verhältnis des goldenen Schnitts). Denn die vollkommene Symmetrie der Kugel K stört keine andere Symmetrie. Dagegen macht jeder andere nichtkonstante Term die Fläche unsymmetrisch – was künstlerisch ganz reizvoll sein kann.



Viele weitere Anregungen sind dem bereits abgeschlossenen Wettbewerb der »Zeit« (www.zeit.de/matheskulptur) zu entnehmen.

Einsendeschluss ist Dienstag, der 27. Mai. Eine Jury aus

▶ Andreas Daniel Matt, Kurator der Ausstellung »Imaginary«

▶ Daniel Lordick, Vorstandsmitglied der Deutschen Gesellschaft für Geometrie und Grafik (DGfGG)

▶ Christoph Pöppe, Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft

bestimmt unter den eingesandten Arbeiten die drei Gewinner.

1. Preis: ein Jahresabonnement Spektrum der Wissenschaft

2. Preis: eine Mathematik-Armbanduhr (www.science-shop.de/artikel/760507)

3. Preis: ein Magnet-Schwebeglobus (www.science-shop.de/artikel/713547)

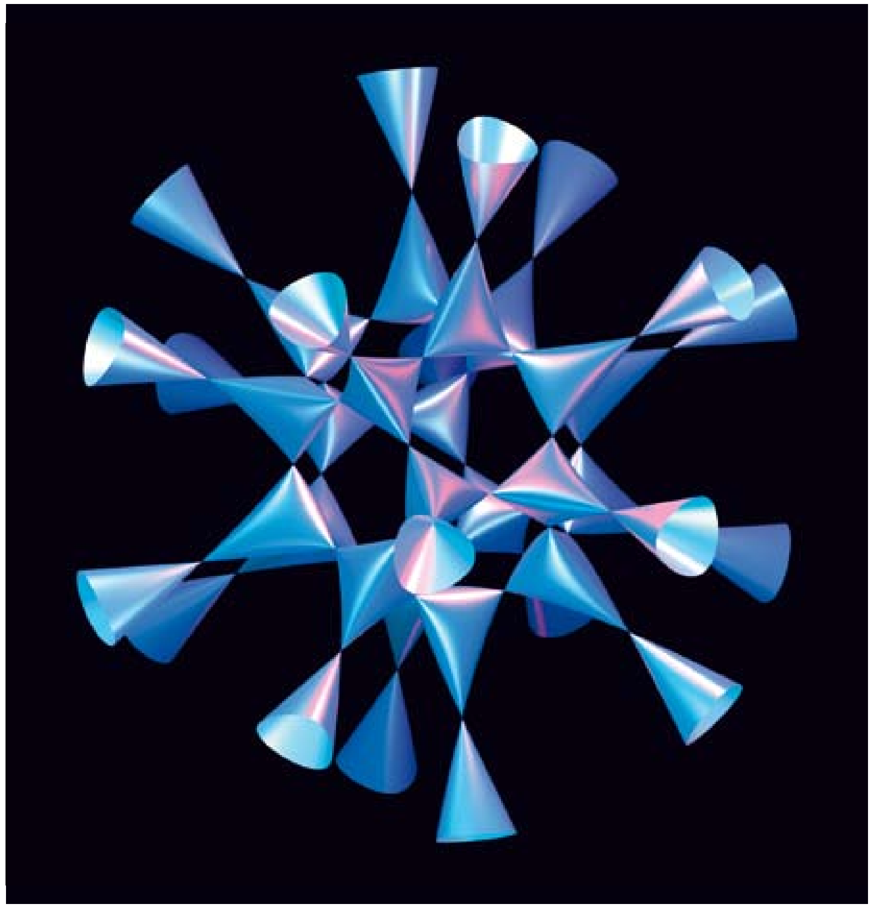
Auf der Webseite www.spektrum.de/mathekunst finden Sie

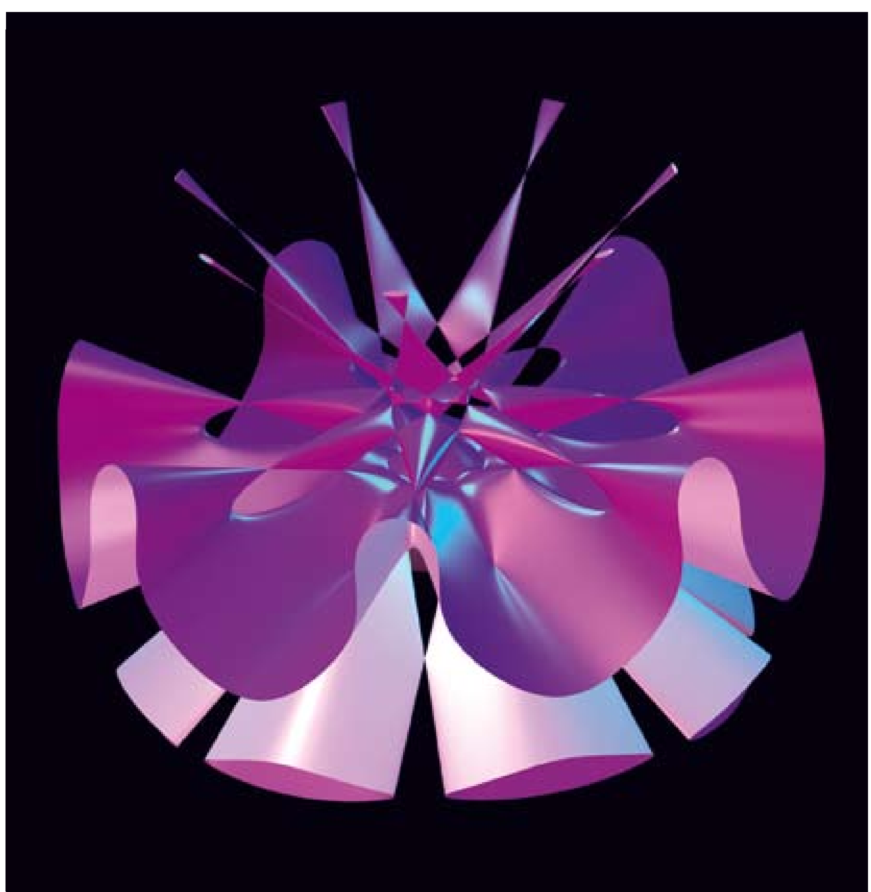
▶ das Programm »Surfer« zum Download für Windows- und Linux-Rechner,

▶ ein Formular, mit dessen Hilfe Sie Ihr Bild oder Ihren Film samt Zusatzinformationen zur Online-Veröffentlichung und zum Wettbewerb einreichen können,

▶ ausführliche Zusatzinformationen zum Thema, verfasst von den Mathematikern Gert-Martin Greuel, Oliver Labs und Duco van Straten, im PDF-Format zum Download.

Die Barth'sche Sextik mit 65 Singularitäten (oben); die Septik von Oliver Labs mit 99 Singularitäten (unten)





BEIDE ABBILDUNGEN: OLIVER LABS

unbekannt. Für den Grad 7 hält gegenwärtig die von dem Saarbrücker Mathematiker Oliver Labs entdeckte Labs'sche Septik mit 99 Singularitäten den Rekord.

Was passiert, wenn man diesen oder jenen Koeffizienten ein bisschen verändert oder dort ein Vorzeichen umdreht? Die teilweise überraschenden Folgen solcher Aktionen bekommt man in der Ausstellung dank raffiniert geschriebener Software in wenigen Sekunden auf der Großleinwand zu sehen – oder auch auf dem heimischen Computer. Das Programm »Surfer«, das dahintersteckt, läuft nicht nur in der Ausstellung; man kann es aus dem Internet herunterladen.

Die Wochenzeitung »Die Zeit« hatte im Januar und Februar dieses Jahres jedermann eingeladen, dem Publikum und einer Jury die schönsten selbst gefundenen algebraischen Flächen zu präsentieren. Bis zum Einsendeschluss am 29. Februar haben begeisterte Hobby-Algebraiker dort eine bunte Vielfalt von knapp 600 Flächen zur Schau gestellt (www.zeit.de/matheskulptur).

Inzwischen hat die Gruppe von der Universität Kaiserslautern, die das Programm »Surfer« entwickelt hat, daran weitergearbeitet. Man kann jetzt mehrere algebraische Flächen in ein und dasselbe Bild setzen und elementares Kino betreiben: Auf einen Mausklick hin erzeugt das Programm eine Serie von Bildern, bei denen sich der Wert eines Parameters allmählich verändert oder die Figur gedreht wird.

Aus diesem Anlass legen wir einen neuen Wettbewerb auf (siehe die Ankündigung auf der linken Seite). Finden Sie die Formel für die schönste, wildeste oder überraschendste – möglicherweise bewegliche – Fläche und senden Sie uns Bild oder Filmsequenz ein. Ihr Werk wird auf der Stelle online veröffentlicht und kandidiert für einen der drei Preise. ◁

AUTOR

Christoph Pöppe ist Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de/artikel/943427.