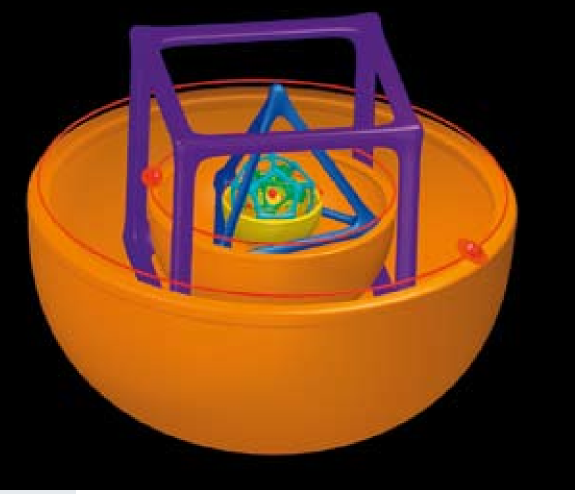
ALGEBRAISCHE FLÄCHEN

Mathematik-Kunst-Wettbewerb: die Ergebnisse

Einige der interessantesten Werke entstanden durch Zweckentfremdung des Programms, das zur Erzeugung algebraischer Flächen bereitgestellt wurde.



Johannes Keplers Modell der Sphärenharmonie, in Form algebraischer Flächen wiedergegeben durch Gerhard Brunthaler

GERHARD BRUNTHALER

Von Christoph Pöppe

Der Mathematik-Kunst-Wettbewerb, zu dem wir in dieser Zeitschrift (4/2008, S. 70) aufgerufen haben, hat unsere Erwartungen weit übertroffen. Bis zum Einsendeschluss am 27. Mai wurden mehr als 800 Arbeiten eingereicht, und auch danach riss der Strom der Einsendungen nicht ab.

Ein regelmäßiger Beobachter konnte nachvollziehen, wie die Künstler an einer Formel herumprobierten, bis das Ergebnis ihren Vorstellungen entsprach oder das Potenzial dieses Ansatzes erschöpft war. Häufig war zu beobachten, dass der eine Ideen eines anderen aufgriff und nach seinem Geschmack modifizierte.

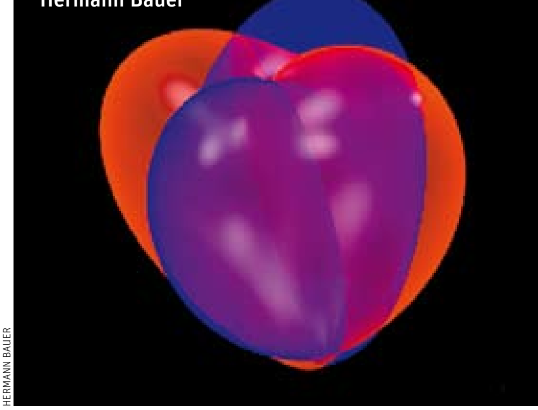
Der großen Gesamtzahl der Teilnehmer zum Trotz wurde das Feld, vor allem gegen Ende, von wenigen Namen dominiert (Kasten S. 96). Algebraische Flächen zu erzeugen ist, in den Worten eines Teilnehmers, »ein Breiten-, aber kein Massensport«. Ein breites Spektrum von Vorgehensweisen war vertreten, von wild-fröhlichem Herumprobieren bis zur tiefen theoretischen Durchdringung mit dem Ziel, eine vorgegebene Gestalt zu produzieren.

Das Runde muss eckig werden

Auch wenn die Mathematiker den Stellen, an denen algebraische Kurven nicht ganz wohlgerundet sind, den »Singularitäten«, besondere Aufmerksamkeit widmen: Eckig sind sie »ihrer Natur nach« eigentlich nicht, Polyeder wie insbesondere die platonischen Körper dagegen sehr. Es bedarf daher besonderer Anstrengungen, eine algebraische Fläche so zurechtzubiegen, dass sie das Kantenmodell eines Polyeders wiedergibt. Nur die Tatsache, dass die Symmetrien der platonischen Körper sich algebraisch elegant ausdrücken lassen, erleichtert die Arbeit. Gerhard Brunthaler hat es geschafft und seine Kunstfertigkeit dazu eingesetzt, das bekannte Modell, mit dem Johannes Kepler die Radien der Planetenbahnen zu erklären versuchte, nachzuempfinden (Bild links oben).

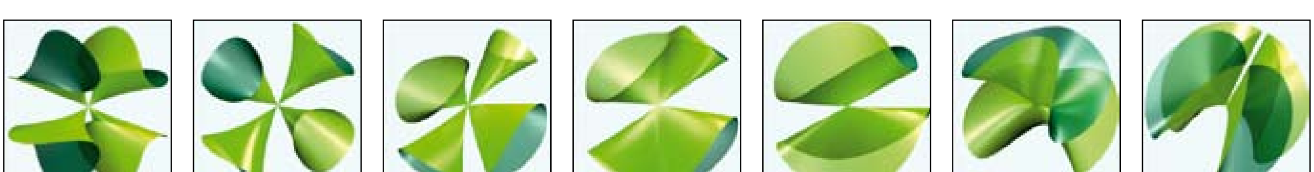
Eine einzelne Fläche ist definiert durch ein Polynom, also einen Ausdruck wie $(2x^2+y^2+z^2-1)^3-0{,}1\,x^2z^3-y^2z^3$, in dem die Variablen x, y und z durch endlich viele Additionen und Multiplikationen miteinander und mit Konstanten verknüpft werden. Die Nullstellen des Polynoms, das heißt die Punkte (x, y, z), in denen dieser Ausdruck zu null wird, bilden die Fläche. Multipliziert man dieses Polynom mit einem weiteren, zum Beispiel $(2y^2+x^2+z^2-1)^3-0{,}1y^2z^3-x^2z^3$, dann sind die Nullstellen des Produkts die Nullstellen beider Polynome zusammen. Man kann also algebraische Flächen durch schlichtes Multiplizieren ihrer Polynome zusammensetzen. So hat Hermann Bauer aus Riegelsberg aus einem Herzen zwei gemacht (Bild unten). Die zweite Formel entsteht aus der ersten durch Vertauschung von x und y; entsprechend ist das zweite Herz das Spiegelbild des ersten an der Ebene $x=y$.

Aber das ist nur der einfache Spezialfall. Im Allgemeinen wirkt sich jede kleine Änderung – eine Konstante ein bisschen variieren, hier einen Term hinzufü-



»Zwei Herzen vereint« von Hermann Bauer

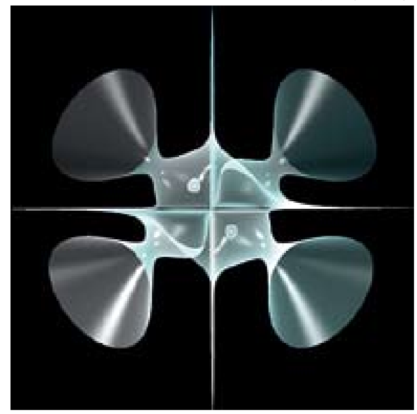
HERMANN BAUER

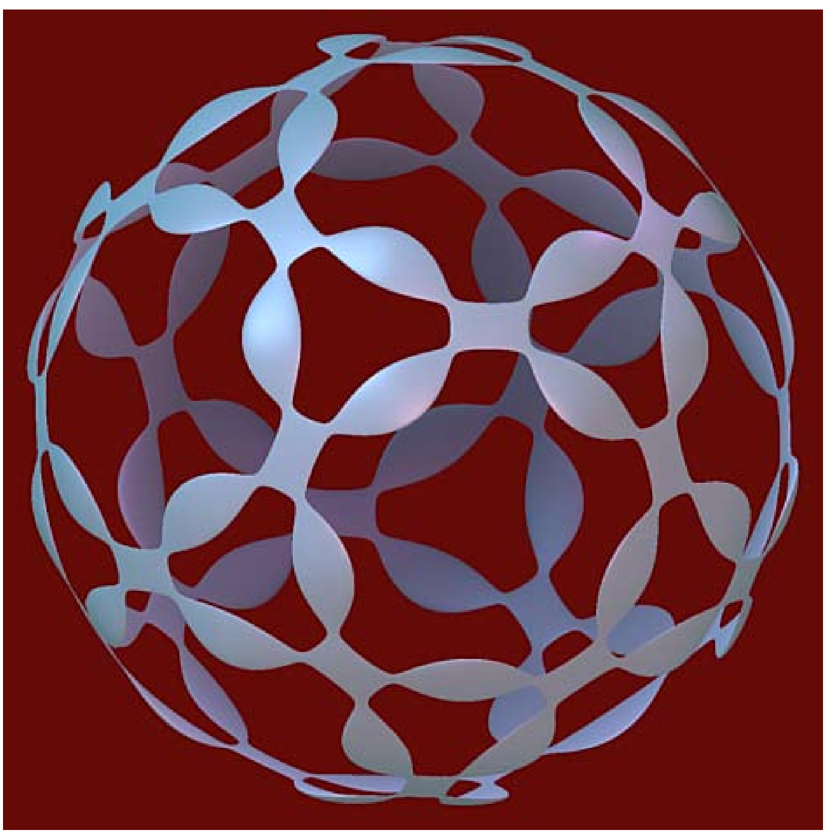


BIANCA VIOLET

HILTRUD HEINRICH

BEIDE: HILTRUD HEINRICH



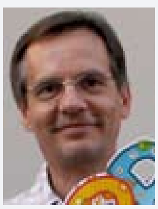


MARTIN HEIDER

Die Sieger-Arbeiten des Wettbewerbs: »Tropen-Wunder« von Hiltrud Heinrich (links oben) erhielt in der Endausscheidung die höchste Punktzahl, dicht gefolgt von den Werken »Zuneigung« und »Glockenstern« derselben Autorin (oben). Der zweite Preis geht an Bianca Violet für das Video »Kleeblatt-Metamorphose« (unten eine Folge von Einzelbildern) und der dritte an Martin Heider für »Ikosidodekaeder, filigran gearbeitet« (links).

Die produktivsten Wettbewerbsteilnehmer

Eduard Baumann (65), Physiker aus dem Dorf Le Mouret bei Fribourg (Schweiz), ist in dieser Zeitschrift erstmals aufgetreten als Erfinder der materialsparendsten Verpackungen für Hamburger oder, was auf dasselbe hinausläuft, der Kissen maximalen Volumens (Spektrum der Wissenschaft 6/1995, S. 10). Seine umfangreichen Untersuchungen über Zylinderschnitte habe ich in einem Online-Artikel beschrieben. Die algebraischen Flächen sind eines seiner vielen Geometrie-Hobbys, die er neben zahlreichen Sportarten betreibt.



Gerhard Brunthaler (51), Dozent am Institut für Halbleiterphysik der Johannes-Kepler-Universität in Linz (Donau), geriet an die mathematische Visualisierung über die Symmetrien, mit denen er sich in seiner Vorlesung »Gruppentheorie in der Festkörperphysik« zu befassen hatte. Konsequenterweise brachte er auch in seinen Arbeiten mit algebraischen Flächen immer wieder räumliche Symmetrien ins Spiel.

Martin Heider (45) studierte zunächst Maschinenbau sowie Luft- und Raumfahrttechnik, bevor er zur evangelischen Theologie wechselte. Heute ist er Pfarrer in Iserlohn; Mathematik betreibt er nur noch freizeitmäßig an speziellen Fragestellungen. Weniger als den künstlerischen Aspekt interessiert ihn die Visualisierung mathematischer Strukturen. So suchte er lange und schließlich erfolgreich nach einer Quintik (Fläche fünften Grades), die wie die bereits bekannte Togliatti-Quintik 31 Singularitäten aufweist, aber etwas klarer strukturiert ist.

Hiltrud Heinrich (67) aus Darmstadt, Lehrerin für Biologie und Chemie im Ruhestand, versteht nach eigener Aussage »an sich wenig von Mathematik«. Aber die Arbeit mit dem Programm hat sie begeistert, und ausgerechnet die merkwürdige Gleichung, die eigentlich nur $0=0$ sagt und trotzdem eine solche Fülle an Bildern produziert, macht sie »süchtig«. Ein Bild von ihr (»Aufbruch«) hat auch schon den vorhergehenden Wettbewerb von »Zeit online« gewonnen.

Torolf Sauermann (46) aus Hannover setzt sich hauptberuflich mit Vermessungstechnik sowie Rekonstruktionen und Flächenrückführungen auseinander. Schon vor dem Programm »Surfer« hat er beeindruckende dreidimensionale (visualisierte oder echte) mathematische Kunstwerke produziert.

Bianca Violet (33) schreibt an der TU Berlin ihre Diplomarbeit über »Immersionen der reellen projektiven Ebene in den dreidimensionalen euklidischen Raum«. Da trifft es sich günstig, dass etliche dieser Immersionen, zum Beispiel die Boy-Fläche und Jakob Steiners Römerfläche, sich als algebraische Flächen darstellen lassen. Auf der Suche nach einer algebraischen Darstellung eines Möbiusbandes stolperte sie über die Formel für die kleinsche Flasche, die sie zu weiteren Bildern anregte. Nach solch umfangreichen Vorarbeiten fiel es ihr nicht schwer, die Fußball-Europameisterschaft durch algebraische Spielereien mit den Landesflaggen zu begleiten. Für ihre Videos trifft es sich günstig, dass sie das Filmemachen zu ihrem Beruf machen will.

gen, da einen wegnehmen – auf alle Punkte der Fläche aus. Da hatte Gerhard Brunthaler Mühe, seinen Würfel durch kleine Vertiefungen zu einem Spielwürfel zu machen, weil die Terme für die eine Vertiefung die andere beeinflussten.

Eine andere Eigenschaft, die algebraischen Flächen überhaupt nicht liegt, ist Periodizität. Spiralen- oder schraubenförmige Flächen, die sich unendlich oft wiederholen, sind durch Polynome nicht darstellbar. Warum? Nehmen wir an, wir hätten eine solche Fläche. Dann könnten wir eine Gerade hineinlegen, welche die Fläche in immer gleichen Abständen durchstößt. Unser Polynom, nur auf dieser Geraden betrachtet, wäre damit ein Polynom in einer einzigen Variablen (welche die Gerade entlangläuft) mit unendlich vielen Nullstellen. Dann aber wäre es schon gleich null.

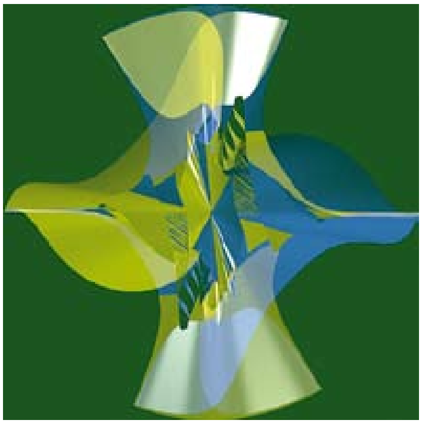
HERMANN BAUER

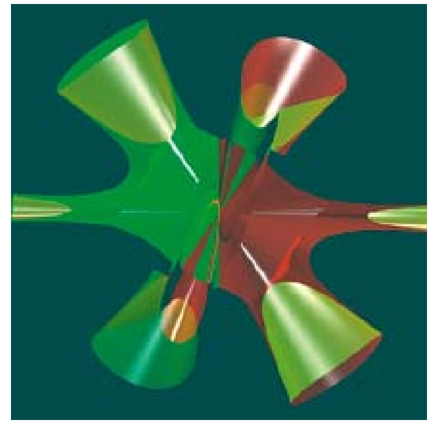
»Rechts- vereinigt mit linksdrehender Spiralfläche (Version I)« von Hermann Bauer. Die Formel besteht aus den beiden Faktoren $x(1-z^2/2+z^4/4!-z^6/6!\,\ldots\,-z^{14}/14!)$ $\pm\, y(z-z^3/3!+z^5/5!\,\ldots\,-z^{15}/15!)$ (man wähle einmal das Plus- und einmal das Minuszeichen).

Abhilfe schafft die aus der Analysis bekannte Taylorreihe. Man kann die Sinusfunktion mit ihren unendlich vielen Nullstellen zwar nicht durch ein Polynom darstellen, aber durch ein Polynom annähern. Das ist dann in einem begrenzten Bereich von der echten Sinusfunktion praktisch nicht zu unterscheiden; also beschränkt man die Darstellung auf diesen Bereich (Bild links).

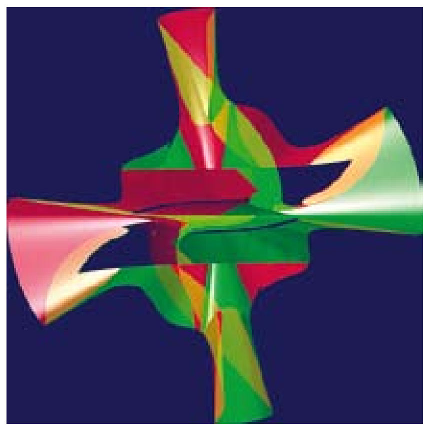
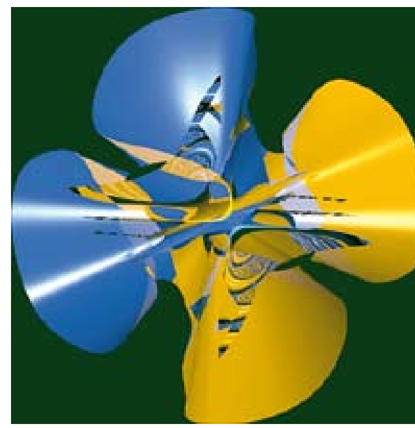
Kunstvolle Rundungsfehler

Eine schier unerschöpfliche Quelle von Bildern ist eine Formel, die rein mathematisch gesehen völlig langweilig und unergiebig ist: $xy \cdot yz \cdot xz - x^2y^2z^2$. Wenn man das ausrechnet, kommt 0 heraus. Also beschreibt die Formel die Punkte, für die $0=0$ gilt. Aber das sind alle Punkte des Raums, und demnach sollte das Programm »Surfer« allenfalls eine dicke schwarze Kugel produzieren (»Sur-





»Unmögliche Figuren« von Hiltrud Heinrich

HILTRUD HEINRICH

fer« zeigt vom ganzen Raum ohnehin nur das, was in einer Kugel um den Nullpunkt enthalten ist). Statt dessen findet Hiltrud Heinrich eine erstaunliche Vielfalt an »unmöglichen Figuren« (Bilder oben und rechts).

Was ist da passiert? Das, was man beim Rechnen mit gerundeten reellen Zahlen (»Gleitkommazahlen«) stets fürchten muss: Rundungsfehler. Der Benutzer darf außer der Formel noch die Perspektive wählen. Für ihn liegt also das »Dreibein« aus den drei sich rechtwinklig kreuzenden Koordinatenachsen irgendwie schräg im Raum. Da das für die Visualisierung ungeeignet ist, rechnet »Surfer« die Koordinaten x, y und z in neue Koordinaten u, v und w um, die parallel zu den Bildkanten beziehungsweise senkrecht zur Bildebene verlaufen. Die Umrechnungsfaktoren werden nur mit einer begrenzten Anzahl von Dezimalstellen

»xx« von Bianca Violet. Die Formel $x=0$ ergibt eigentlich eine Ebene, aber mit spezieller Setzung der Programmparameter sieht sie merkwürdig gebürstet aus.

BIANCA VIOLET

berechnet. Deswegen arbeitet das Programm nicht mit $0=0$, sondern mit $8{,}673617 \cdot 10^{-19} z^6 + 1{,}387779 \cdot 10^{-17} yz^5 - 2{,}428613 \cdot 10^{-17} x^2 z^4 + 2{,}775558 \cdot 10^{-17} xyz^4 - 8{,}326673 \cdot 10^{-17} x^2 yz^3 + \ldots$ (19 weitere Terme dieser Bauart) $=0$. (Henning Meyer von der Technischen Universität Kaiserslautern hat das für die Formel von Hiltrud Heinrich am Beispiel einer speziellen Perspektive durchgerechnet.) Das ist die Formel einer algebraischen Fläche! Und wenn man die ganze Gleichung mit, sagen wir, 10^{17} multipliziert, was an der Fläche überhaupt nichts ändert, sieht sie sogar einigermaßen normal aus. Aber jede kleine Änderung der Perspektive ergibt eine neue Koordinatenumrechnung, neue Rundungsfehler und damit ein völlig neues Bild.

Es gibt weitere Möglichkeiten, das Programm zu narren. Schließlich muss es innerhalb der Darstellungskugel die Nullstellen des Polynoms finden. Da ist es keine gute Idee, ein Gitter über den Bereich zu legen und in jedem Gitterpunkt nachzusehen, ob der Funktionswert dort gleich null ist. Erstens wären es viel zu viele Punkte, und zweitens liegt eine Nullstelle praktisch nie auf einem Gitterpunkt. Also muss das Programm Paare von Gitterpunkten auswählen, zwischen denen es nach Nullstellen sucht. Dabei muss es gewisse Kriterien anwenden, und in Extremfällen führt das zu bizarren Ergebnissen (Bild links unten).

Die dreiköpfige Jury hat in einem mehrstufigen, streng demokratischen und naturgemäß nicht objektiven Prozess die Gewinner des Wettbewerbs gekürt. Es erstaunt nicht, dass alle drei unter den produktivsten Einsendern (Kasten S. 96) zu finden sind. Da hat sich langes, intensives Experimentieren ausgezahlt.

Wir gratulieren den Gewinnern – und freuen uns ankündigen zu dürfen, dass der Wettbewerb eine Fortsetzung finden wird. Den Stab, den wir von der »Zeit« übernommen haben, reichen wir weiter an die Kasseler Sparkasse, die ab dem 29. Juli einen Wettbewerb nach gleichem Muster veranstaltet. ◁

Christoph Pöppe ist Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/960485.