HYPERBOLISCHE GEOMETRIE

Mathematik mit der Häkelnadel

Man rümpfe nicht die Nase über das biedere Werkzeug. Es verschafft uns Einblick in die abstrakteste nichteuklidische Geometrie.

Von Christoph Pöppe

DAVID HENDERSON, MIT FRDL. GEN. VON A. K. PETERS LTD.

Mit ihren selbst gehäkelten Visualisierungen der hyperbolischen Geometrie findet Daina Taimina ein zunehmend interessiertes Publikum.

Für eine aufrechte Feministin muss Daina Taimina, aufgewachsen und promoviert in Lettland, heute Professorin für Mathematik an der Cornell University in Ithaca (New York), ein echter Stein des Anstoßes sein. Da kämpft frau jahrelang gegen die üblichen Rollenklischees: Mathematik sei Männersache und die Frauen in dem Fach deswegen so krass unterrepräsentiert, weil ihnen die mathematiktypischen Denkfähigkeiten abgingen. Allmählich beginnt die Welt sich auf die Erkenntnis einzulassen, dass es in Wirklichkeit keine »männliche« oder »weibliche« Mathematik gibt und dass die Vorstellung, Frauen würden grundsätzlich anders oder gar schlechter denken als Männer, chauvinistischer Männerunfug ist, *bullshit* mit deutlicher Betonung auf *bull*.

Und dann kommt Daina Taimina. Sie sieht nicht nur so aus wie das klassische Hausmütterchen; sie leistet auch noch der Vorstellung Vorschub, es gebe so etwas wie weibliche Mathematik oder, schlimmer noch, Hausfrauenmathematik. Sie fertigt nämlich ihre mathematischen Modelle durch Häkeln, und das Ergebnis ihrer Bemühungen gleicht auf den ersten Blick einem ziemlich verkrumpelten Topflappen.

Aber eigentlich ist es ein Modell für etwas höchst unhausfraulich Abstraktes, nämlich ein Stück der hyperbolischen Ebene. Unversehens gerät man (und frau) damit von der biederen Häkelnadel zu einer der fundamentalsten Fragen der Geometrie: Muss die Winkelsumme im Dreieck stets 180 Grad betragen? Oder, was auf dasselbe hinausläuft: Gibt es wirklich zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb dieser Geraden genau eine Parallele?

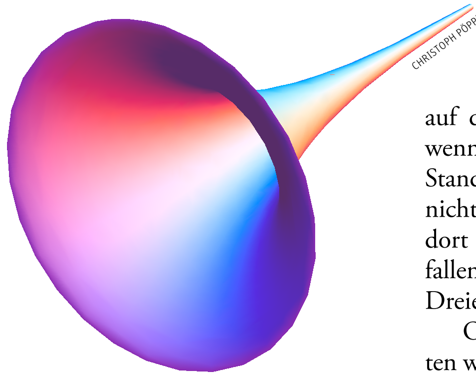
Der antike Mathematiker Euklid (um 360 – 280 v. Chr.), der das Wissen der damaligen Zeit in unübertrefflicher Weise systematisierte, war wie alle seine Zeitgenossen davon überzeugt, konnte es aber nicht beweisen. So blieb ihm nichts übrig, als diese Aussage unter die »Axiome« aufzunehmen, jene unbeweisbaren Grundannahmen, aus denen er die ganze Geometrie herleitete. Jahrhundertelang versuchten Euklids Nachfolger, diesen vermeintlichen Mangel im Werk des großen Meisters auszubessern und das merkwürdige Parallelenaxiom, das eben nicht so elementar und selbstverständlich aussah wie die anderen, aus diesen anderen herzuleiten.

Leben in einer gekrümmten Welt

Erst im 19. Jahrhundert wurde das Problem auf unerwartete Weise erledigt. Das Parallelenaxiom ist keineswegs denknotwendig. Vielmehr ist eine Geometrie widerspruchsfrei denkbar, in der es zu einer Geraden durch einen Punkt außerhalb von ihr mehr als eine Parallele gibt – es sind dann gleich unendlich viele – und in der die Winkelsumme im Dreieck stets kleiner ist als 180 Grad. Den Ruhm für diese Entdeckung teilen sich János Bolyai (1802 – 1860), Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski (1792 – 1856) und Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855), der sein Ergebnis jahrzehntelang unveröffentlicht hatte liegen lassen, bis Bolyai und Lobatschewski unabhängig von ihm auf dieselbe Idee gekommen waren.

An die abstrakte Entdeckung schließt sich alsbald die konkrete Frage an: Wie lebt es sich in einer solchen nichteuklidischen Welt? Wenn die Winkelsumme im Dreieck nicht kleiner, sondern stets größer als 180 Grad sein soll, ist die Antwort nicht schwer. Diese Verhältnisse herrschen auf der Oberfläche einer Kugel. Man nehme zwei Längengrade, die sich am Nordpol unter einem Winkel von 90 Grad treffen, und das Stück Äquator, das zwischen ihnen liegt, und schon hat man ein Dreieck mit drei rechten Winkeln und entsprechend einer Winkelsumme von 270 Grad. Man muss sich allerdings vorstellen, dass die Bewohner der Kugeloberfläche zweidimensionale Wesen sind. Alles, was außerhalb ihrer Lebensfläche liegt, existiert für sie einfach nicht. Gleichwohl können sie erkennen, dass sie auf einer Kugeloberfläche leben, indem sie große Dreiecke vermessen und deren Winkelsummen bestimmen.

Entsprechend könnte es sein, dass wir dreidimensionalen Wesen in Wirk-



CHRISTOPH PÖPPE

Die Pseudosphäre ist die Rotationsfläche einer Kurve namens Traktrix.

lichkeit auf der »Oberfläche« einer vierdimensionalen Kugel leben. Wir haben vielleicht nur deshalb noch nichts davon gemerkt, weil die Krümmung unserer Welt sehr gering ist. Darüber hinaus hätten wir die größten Schwierigkeiten, uns diese vierdimensionale Kugel anschaulich vorzustellen. Wir sind eben in allem auf drei Dimensionen beschränkt. Erst wenn man ein Dreieck aus unserem Standpunkt und zwei fernen Sternen nicht nur von hier, sondern auch von dort aus vermessen könnte, würde auffallen, dass die Winkelsumme in diesem Dreieck größer ist als 180 Grad.

Oder eben kleiner. In diesem Fall hätten wir noch größere Schwierigkeiten mit dem Vorstellungsvermögen. Selbst unsere gedachten zweidimensionalen Kollegen wären nicht auf einer so wohlgeformten Fläche wie der Kugeloberfläche anzusiedeln.

Hier entfalten Daina Taiminas Häkelarbeiten ihre segensreiche Wirkung. Gesucht ist eine Fläche, deren »intrinsische Krümmung« in jedem ihrer Punkte negativ ist und den gleichen Wert hat. Intrinsisch heißt, dass ein Einwohner der Fläche sie mit auf die Fläche beschränkten Mitteln messen kann, zum Beispiel anhand der Abhängigkeit des Kreisumfangs vom Radius. Für uns auswärtige Betrachter läuft das darauf hinaus, dass die gaußsche Krümmung der Fläche in jedem Punkt den gleichen negativen Wert haben muss. Die gaußsche Krümmung ist das Produkt der Hauptkrümmungen. Das heißt: Die Fläche muss in einer Richtung nach der einen Seite und in der dazu senkrechten Richtung nach der anderen Seite gekrümmt sein. (Man muss die beiden Richtungen wählen, in denen die Krümmung ihre Extremwerte annimmt.) Ist die Fläche in der einen Richtung sehr stark gekrümmt, darf sie in der anderen fast eben sein; nur das Produkt der Krümmungen muss stimmen. Und für

DAINA TAIMINA, MIT FRDL. GEN. VON A. K. PETERS LTD.

Ein und derselbe hyperbolische Topflappen bietet je nachdem, wie er gefaltet wird, die verschiedensten Anblicke.

Eine Landkarte der hyperbolischen Ebene

In der klassischen Darstellung von Henri Poincaré (1854 – 1912) wird die ganze unendliche hyperbolische Ebene ins Innere eines endlichen Kreises abgebildet. Das funktioniert, weil der Maßstab, mit dem Entfernungen gemessen werden, umso stärker schrumpft, je näher man dem Rand des Kreises kommt. Wir betrachten gleichsam die hyperbolische Ebene durch eine sehr merkwürdige Linse, die ferne Gebiete umso stärker verkleinert, je weiter entfernt sie sind. Die Linse deformiert Geraden zu Kreisbögen, die auf dem Rand des Poincaré-Kreises senkrecht stehen.

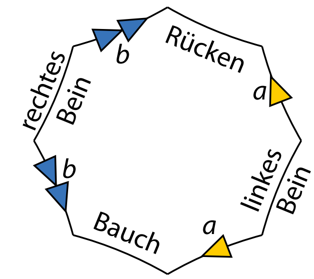
Die poincarésche Kreisscheibe erlaubt eindrucksvolle Darstellungen. So ist auf den ersten Blick zu sehen, wie die Ebene mit rechtwinkligen Fünfecken (jawohl, fünf rechte Winkel) zu pflastern ist (Spektrum der Wissenschaft 10/1990, S. 12, und 4/2008, S. 65). Entsprechend kann man den dreidimensionalen hyperbolischen Raum lückenlos mit rechtwinkligen Dodekaedern vollstapeln. Die Poincaré-Darstellung bildet diesen ganzen Raum in das Innere einer Vollkugel ab; das preisgekrönte Video »Not Knot« (deutsch: »Knoten ohne Knoten«) des Geometry Center in Minneapolis (Minnesota) zeigt einen spektakulären Flug durch den hyperbolischen Raum in dieser Darstellung, mit einem Gitter aus rechtwinkligen Dodekaedern (Bild). Die bekannten Werke namens »Kreislimit« des niederländischen Künstlers Maurits C. Escher (1898 – 1972) beruhen ebenfalls auf dem Poincaré-Modell der hyperbolischen Ebene.

CHARLIE GUNN, © 1990, THE GEOMETRY CENTER, UNIVERSITY OF MINNESOTA

Poincarés Linse ist winkeltreu. Sie bildet Gerades auf Krummes ab, gibt aber die Winkel zwischen zwei Linien (das heißt zwischen deren Tangenten im Schnittpunkt) korrekt wieder. Deswegen ist sie für die Sache mit der Winkelsumme ein geeignetes Darstellungsmittel. Andere Aspekte dagegen drohen durch die Linsenverzerrung unterzugehen. Wer würde in dieser Darstellung schon sehen, dass der Umfang eines Kreises vom Radius r stets größer ist als $2\pi r$? Gesellige Typen wissen diesen Aspekt des Lebens im hyperbolischen Raum zu schätzen: Die Anzahl der Bekannten, die in einer Entfernung von höchstens r zu erreichen sind, ist größer als im euklidischen Raum. Der Unterschied wird mit zunehmender Entfernung r immer ausgeprägter.

THOMAS HULL, MIT FRDL. GEN. VON A. K. PETERS LTD.

Ein Achteck in der hyperbolischen Ebene, bei dem gewisse Seiten identifiziert werden (unten), ergibt eine Strampelhose besonderer Art, gehäkelt von Sarah-Marie Belcastro.



C. PÖPPE, NACH: SARAH-MARIE BELCASTRO

den zweidimensionalen Einwohner der Fläche kommt es auf diese Feinheiten überhaupt nicht an. Seine Welt sieht an jeder Stelle gleich aus, einerlei, ob wir an dieser Stelle zwei bis aufs Vorzeichen gleiche oder um Größenordnungen verschiedene Krümmungen messen.

Die einfachste Fläche konstanter negativer gaußscher Krümmung ist die so genannte Pseudosphäre. Sie sieht aus wie ein unendlich langes Trompetenrohr, das in einen Schalltrichter endlicher Größe mündet (Bild links oben). Über dessen Rand hinaus ist sie nicht verlängerbar. Wollte man es trotzdem versuchen, so würde die Fläche sich kräuseln und selbst überschneiden.

Wenn aber die Fläche nicht starr ist, sondern aus gehäkeltem Stoff besteht, geht sie jeder Selbstüberschneidung aus dem Weg, indem sie sich geeignet verbiegt (Bilder links). Die intrinsische Geometrie wird dadurch nicht gestört: Was die zweidimensionalen Wesen an Winkeln und Entfernungen messen, bleibt bei derartigen Deformationen unverändert.

Wie häkelt man denn nun eine hyperbolische Fläche? Dem großen theoretischen Aufwand zum Trotz ist das Rezept verblüffend einfach. Man häkele eine ringförmig geschlossene Reihe aus einer gewissen Anzahl Maschen. An diese füge man weitere Reihen an; dabei enthält jede neue Reihe um einen konstanten Faktor mehr Maschen als ihre Vorgängerin. Soll dieser Faktor zum Beispiel 7/6 sein, häkelt man in jede sechste Masche der alten Reihe zwei Maschen der neuen ein statt nur eine.

Rundungsfehler sind unvermeidlich: Wenn die Maschenzahl einer Reihe kein Vielfaches von 6 ist, dann müsste ihre Nachfolgerin eine nichtganze Anzahl von Maschen haben. Solange die Reihen kurz sind, fallen diese Fehler noch auf, lassen sich aber auf die Dauer gut ausgleichen. Beginnt man mit sehr kleinen Maschenzahlen, so entsteht zunächst das Trompetenrohr der Pseudosphäre. Aber man kann eben über die Grenze der Selbstüberschneidung hinaushäkeln.

Allerdings ist gerade dieses enge Rohr keine korrekte Wiedergabe der hyperbolischen Ebene. Dort kommt es nämlich nicht vor, dass man ein kurzes Stück »geradeaus« (in der Wahrnehmung des Flächenbewohners) laufen kann und bereits nach kurzer Strecke in den eigenen Fußstapfen steht, was auf dem kurzen Weg rund ums Trompetenrohr der Fall ist. Vielmehr muss man sich die hyperbolische Ebene, genauer: ein Stück derselben, unendlich oft ums Trompetenrohr gewickelt vorstellen.

Hyperbolische Strampler

Die klassische Darstellung der hyperbolischen Ebene ist die poincarésche Kreisscheibe (Kasten links). Mit ihrer Hilfe kann man nachvollziehen, dass die Pseudosphäre nur einen Ausschnitt der kompletten hyperbolischen Ebene wiedergibt – und Daina Taiminas Häkelwerk einen etwas größeren Ausschnitt.

Andererseits: Die hyperbolische Geometrie ist nicht auf die hyperbolische Ebene beschränkt (Spektrum der Wissenschaft 5/2009, S. 74). Nehmen wir ein regelmäßiges Achteck in der hyperbolischen Ebene, das so bemessen ist, dass seine Innenwinkel 120 Grad betragen. Mit diesen Kacheln kann man, drei um jeden Eckpunkt, die ganze hyperbolische Ebene lückenlos pflastern. Indem man nun gegenüberliegende Seiten dieses Achtecks miteinander identifiziert, schafft man ein neues, geschlossenes Gebilde mit endlichem Flächeninhalt, ebenso wie aus einem euklidischen Rechteck durch Identifizieren gegenüberliegender Seiten ein Torus wird.

In beiden Fällen erbt das neue Gebilde seine Geometrie, insbesondere die intrinsische Krümmung, vom alten.

Hier findet auch die unvermeidliche Frage »Hat denn die ganze Häkelei einen praktischen Nutzwert?« eine überzeugende Antwort. Man identifiziere in einem hyperbolischen Achteck nicht gegenüberliegende Seiten, sondern gewisse andere Paare von Seiten, während andere frei bleiben (Bild oben). Das Resultat ist ein Strampelhöschen! Taiminas Fachkolleginnen Sarah-Marie Belcastro und Carolyn Yackel geben detaillierte Häkelanleitungen für verschiedene Größen vom Neugeborenen bis zum Fünfjährigen.

Damit nicht genug: Eine Gruppe, die sich bei der gemeinsamen Jahrestagung der amerikanischen Mathematikerverbände AMS und MAA 2005 konstituierte, pflegt noch weitere Spielarten der »Fadenkunst« *(fiber arts)*, von positiv gekrümmten Flächen, sprich Häkelmützen, über algebraische Socken bis hin zu Stickarbeiten, die naheliegenderweise die Symmetriegruppen der Ebene zum Thema haben. ◁

Christoph Pöppe ist Redakteur bei »Spektrum der Wissenschaft«.

Belcastro, S.-M., Yackel, C. (Hg.): Making Mathematics with Needlework. Ten Papers and Ten Projects. A K Peters, Wellesley (Massachusetts) 2008.

Henderson, D., Taimina, D.: Crocheting the Hyperbolic Plane. The Mathematical Intelligencer 23(2), S. 17–28, 2001.

Taimina, D.: Crocheting Adventures with Hyperbolic Planes. A K Peters, Wellesley (Massachusetts) 2009.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/1017412.