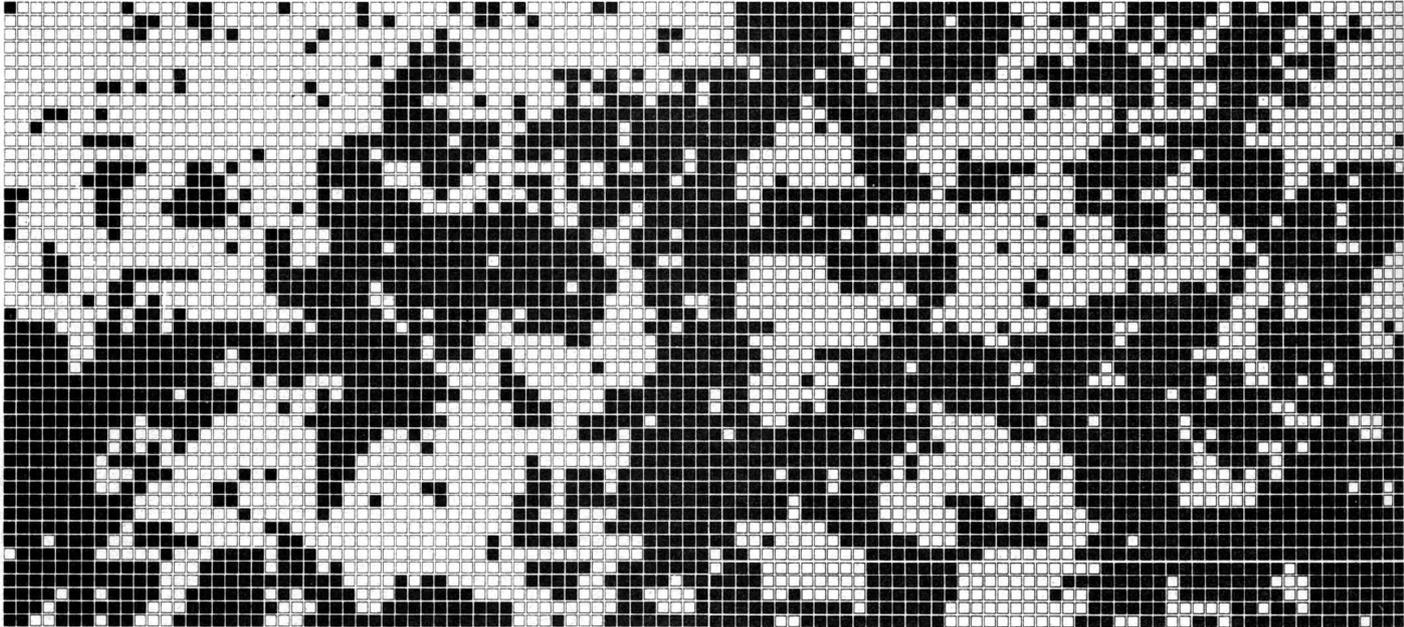


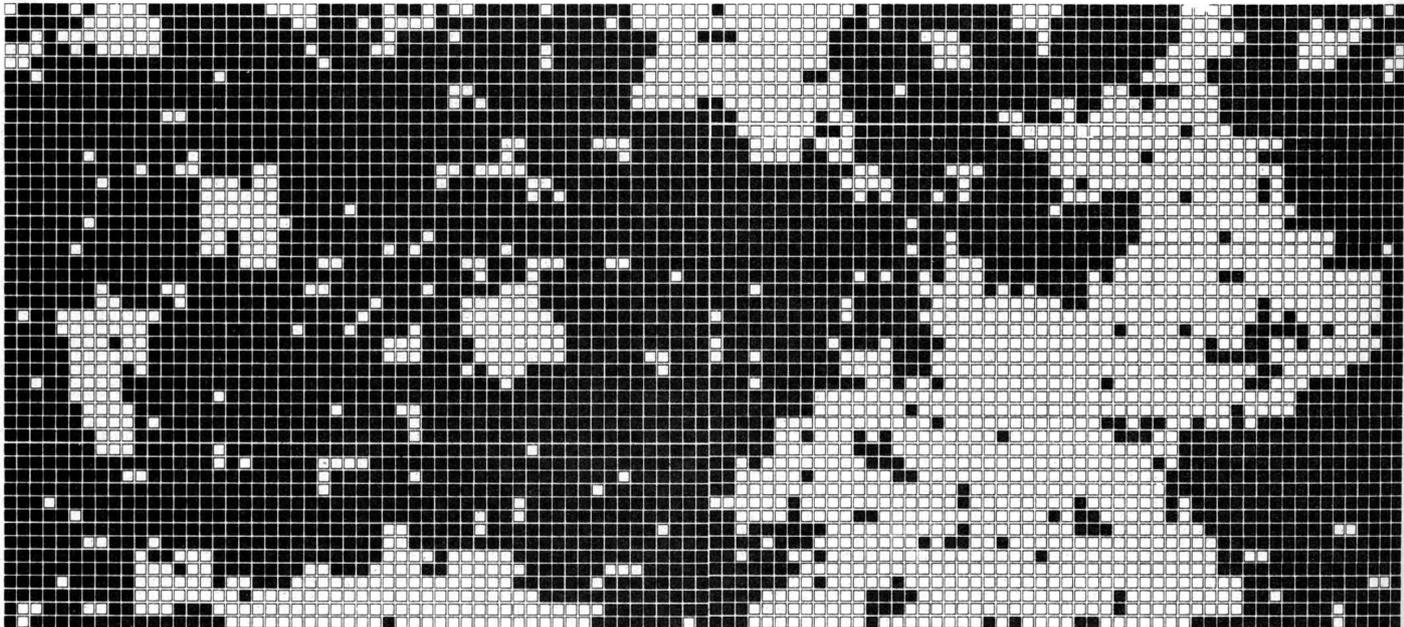
$$T = 2T_c$$



$$T = 1.05T_c$$



$$T = T_c$$



Die Renormierungsgruppe

Von Kenneth G. Wilson

Zu den bemerkenswerten Eigenschaften der Natur gehören die Größenunterschiede ihrer Erscheinungen. Beispielsweise erstrecken sich die Strömungen in den Ozeanen über Tausende von Kilometern, und auch die Gezeiten haben globale Ausmaße. Dagegen liegt die Größe der Wellen zwischen einigen Metern und einigen Millimetern. In noch kleinerem Maßstab betrachtet ist Seewasser eine Ansammlung von Molekülen, deren Durchmesser ungefähr zehn Millionstel eines Millimeters beträgt. Die größten und kleinsten Strukturen der Ozeane unterscheiden sich also um den Faktor 10^{17} (um siebzehn Größenordnungen).

Ereignisse, die sich in sehr verschiedenen Größenordnungen abspielen, beeinflussen sich im allgemeinen kaum, so daß sie unabhängig voneinander betrachtet werden können: Ob sich benachbarte Wasser-Moleküle im Pazifischen Ozean oder in einer Teekanne befinden, spielt für ihre Wechselwirkung untereinander so gut wie keine Rolle, und das Verhalten einer Welle im Meer läßt sich be-

schreiben, ohne daß man von der molekularen Struktur der Flüssigkeit Notiz zu nehmen hätte. Die meisten physikalischen Theorien sind nur deswegen praktikabel, weil man sich auf Vorgänge beschränkt, die gleiche Größenordnungen haben.

Allerdings gibt es Phänomene, bei denen man nicht so verfahren kann. Ein Beispiel ist das Verhalten von Wasser bei einem Druck von 217 Atmosphären und einer Temperatur von 647 Kelvin (374 Grad Celsius). Bei dieser Kombination von Druck und Temperatur – dem kritischen Punkt – verschwindet der Unterschied zwischen Flüssigkeit und Dampf. Bei höheren Drücken gibt es nur eine Phase, die den gesamten verfügbaren Raum ausfüllt. In der Nähe des kritischen Punktes treten im Wasser Dichteschwankungen (Fluktuationen) auf. Es entstehen Flüssigkeitstropfen, die mit Dampfblasen durchsetzt sind. Die kleinsten dieser Tropfen und Blasen haben die Größe einzelner Moleküle, die größten nehmen nahezu das gesamte Volumen ein. Befindet man sich genau am

Wird das Verhalten eines physikalischen Systems durch eine Kraft bestimmt, deren größte und kleinste Reichweiten sich um viele Größenordnungen unterscheiden, so ist die theoretische Behandlung des Systems schwierig. Ein als Renormierungsgruppen-Methode bezeichnetes Verfahren hilft, der Schwierigkeiten Herr zu werden.

kritischen Punkt, so werden die größten Fluktuationen unendlich, ohne daß die kleineren Fluktuationen verschwinden. Eine Theorie, die das Verhalten des Wassers in der Nähe des kritischen Punktes beschreiben will, muß also Fluktuationen aller Größenordnungen berücksichtigen.

Für Probleme der Physik und anderer Forschungsgebiete, die von dieser Art sind, hat man exakte Lösungen bisher nur in wenigen Fällen gefunden. Oft führt sogar die Anwendung bewährter Näherungsverfahren nicht zu befriedigenden Resultaten. In den letzten zehn Jahren wurde aber eine neue Methode, die diese Situation ändern könnte, entwickelt. Sie beruht auf der Anwendung der Renormierungsgruppe, und wir wollen sie hier am Beispiel ferromagnetischer Stoffe erläutern.

Ferromagnete

Ferromagnetische Stoffe sind magnetisch, wenn sie kälter als eine kritische Temperatur sind, die man zu Ehren des französischen Physikers Pierre Curie als Curie-Temperatur bezeichnet. Die Curie-Temperatur des Eisens liegt bei 1044 Kelvin (1317 Grad Celsius). Erhitzt man ein Stück Eisen über diese Temperatur, so verliert es seine Magnetisierung. Läßt man es wieder abkühlen, so bleibt die Magnetisierung Null, bis die Curie-Temperatur erreicht ist. Danach wird das Eisen plötzlich magnetisch, und mit weiter fallender Temperatur nimmt seine Magnetisierung gleichmäßig zu.

Die Magnetisierung ferromagnetischer Stoffe beruht auf der Tatsache, daß die Elektronen dieser Stoffe einen Eigendrehimpuls (einen Spin) haben. Bildlich gesprochen drehen sich die Elektronen ständig um ihre eigene Achse. Da sie elektrisch negativ geladen sind, induzieren sie ein kleines magnetisches Dipolmoment, das heißt, jedes Elektron wirkt

◀ **Bild 1:** Ferromagnete sind Festkörper, die unterhalb einer bestimmten Temperatur, der Curie-Temperatur T_C , magnetisch sind. Die Magnetisierung beruht auf der Tatsache, daß die elektrisch negativ geladenen Elektronen dieser Stoffe einen Eigendrehimpuls (einen Spin) haben und daher auch ein kleines magnetisches Moment besitzen. Weist die Mehrzahl dieser Momente in dieselbe Richtung, so macht sich das nach außen als Magnetismus bemerkbar. Die wesentlichen Eigenschaften eines Ferromagneten lassen sich mit einem Modell beschreiben, in dem die magnetischen Momente der Elektronen nur in zwei Richtungen weisen können (siehe Bild 2): nach oben oder nach unten. In den drei hier gezeigten Teilbildern wird das durch die kleinen schwarzen und weißen Quadrate symbolisiert: jedes schwarze Quadrat entspricht einem nach oben weisenden magnetischen Moment. Bei großen Temperaturen, beispielsweise der doppelten Curie-Temperatur

(oberes Bild), weisen die magnetischen Momente etwa ebenso oft in die eine wie in die andere Richtung. Ihre Wirkungen heben sich daher gegenseitig auf. Außerdem findet man nur kleine Gebiete, in denen benachbarte Magnete in die gleiche Richtung zeigen. In der Nähe der Curie-Temperatur (mittleres Bild) treten auch größere Gebiete mit gleichgerichteten magnetischen Momenten auf. Bei der Curie-Temperatur (unteres Bild) setzt dann die Magnetisierung ein. Jetzt haben die magnetischen Momente überwiegend eine der beiden möglichen Orientierungen, und der Festkörper weist große Gebiete auf, in denen die magnetischen Momente gleichartig orientiert sind. Daneben gibt es aber immer noch die kleinen Gebiete gleicher Orientierung, die für höhere Temperaturen charakteristisch sind. Bei der theoretischen Behandlung eines Ferromagneten muß man also Reichweiten sehr unterschiedlicher Größenordnung berücksichtigen. Das gelingt mit Hilfe der Renormierungsgruppen-Methode.

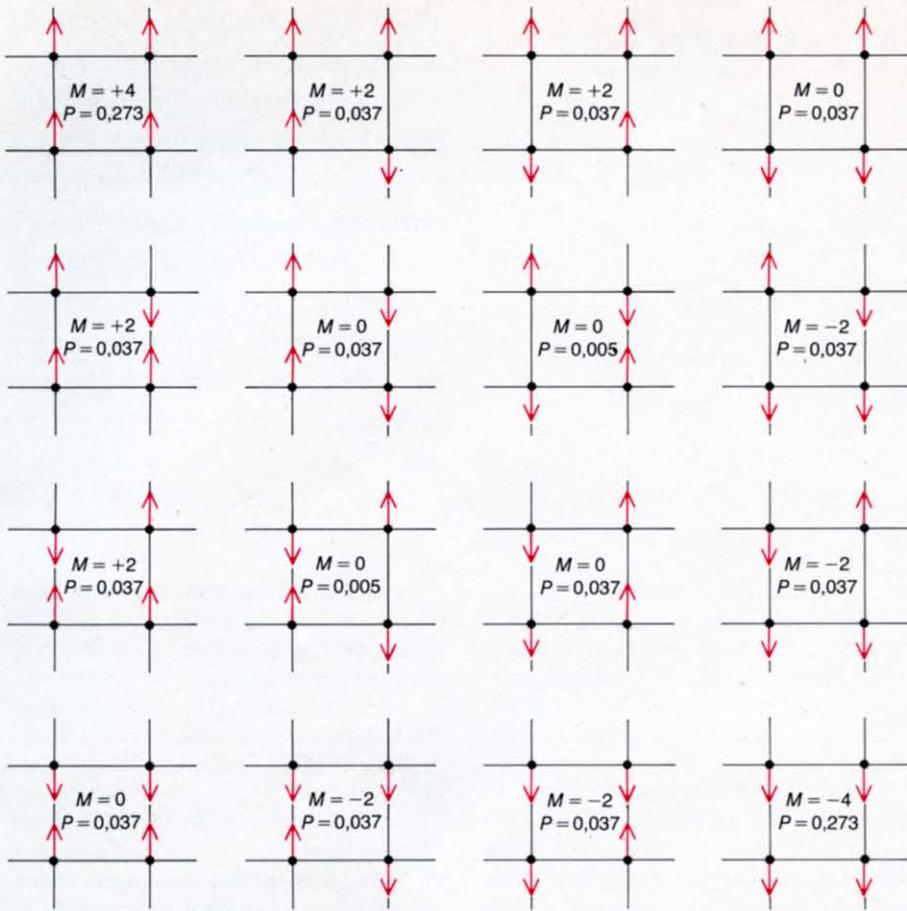


Bild 2: Als Modell eines Ferromagneten eignet sich ein zweidimensionales Gitter von Spin-Vektoren, deren jeder einem magnetischen Moment entspricht. Die an vier benachbarten Punkten des Gitters befindlichen Spins können die sechzehn hier gezeigten Konfigurationen bilden. Zwischen benachbarten Spins besteht eine Kopplung, das heißt, sie haben die Tendenz, sich parallel auszurichten, also in dieselbe Richtung zu weisen. Konfigurationen mit parallel stehenden Spins sind daher häufiger (sie haben eine größere Wahrscheinlichkeit P) als Konfigurationen mit antiparallelen, also in verschiedene Richtungen weisenden Spins. Die Stärke der Kopplung und folglich auch die Wahrscheinlichkeit P ändern sich mit der Temperatur. Die hier angegebenen P -Werte gelten für die Kopplungsstärke $1/2$, die einer Temperatur von 2 (in geeignet gewählten Einheiten) entspricht. Die Magnetisierung M einer Spin-Konfiguration ist gleich der Differenz zwischen den Anzahlen der nach oben und nach unten weisenden Spins. Die Magnetisierung des gesamten Systems erhält man, wenn man die Magnetisierungen der einzelnen Konfigurationen mit den zugehörigen Wahrscheinlichkeiten multipliziert und die Produkte addiert.

wie ein winziger Magnet mit einem Nord- und einem Südpol und erzeugt ein Magnetfeld. Den Spin und das magnetische Moment des Elektrons stellt man durch Vektoren dar und symbolisiert sie durch einen Pfeil, der vom Südpol zum Nordpol des Magnetfeldes weist.

Zwar besitzt ein Ferromagnet eine komplexe atomare Struktur, aber seine wesentlichen Eigenschaften lassen sich mit einem Modell beschreiben, in dem weder Atome noch irgendwelche anderen Teilchen, sondern nur Spin-Vektoren auftreten, die sich an den Kreuzungspunkten eines Gitters befinden (Bild 2). Der Einfachheit halber wählt man ein zweidimensionales, rechtwinkliges Gitter, dessen Kreuzungspunkte (Gitterpunkte) alle die gleichen Abstände voneinander haben. An jedem Gitterpunkt charakterisiert ein Spin-Vektor die Richtung eines magnetischen Momentes (Bild 2). Es gibt in diesem Modell nur zwei erlaubte Spin-Richtungen: die Spins können nur nach oben oder nach unten zeigen. Zeigt mehr als die Hälfte der Spin-Vektoren in dieselbe Richtung, so heben sich die magnetischen Momente gegenseitig nicht vollkommen auf, und das System ist magnetisiert. Man kann die Stärke der Magnetisierung also durch die Differenz zwischen den Anzahlen der Spin-Vektoren definieren, die nach oben und nach unten zeigen.

Ein Ferromagnet unterscheidet sich von anderen Materialien dadurch, daß zwischen benachbarten Spins eine Kopplung besteht: die Gesamtenergie zweier benachbarter Spins ist kleiner, wenn ihre Vektoren parallel stehen (in dieselbe Richtung weisen), als wenn sie antiparallel stehen (in entgegengesetzte Richtungen weisen). Benachbarte Spins haben also die Tendenz, sich gleichartig auszurichten. In unserem zweidimensionalen, rechtwinkligen Gitter wird jeder Spin von vier Nachbarn beeinflusst.

Die Kopplung zwischen benachbarten Spins sollte dazu führen, daß alle Spins in die gleiche Richtung weisen und ein Ferromagnet stets maximal magnetisiert ist, weil er sich dann im Zustand niedrigster Energie befindet. Tatsächlich verhindert jedoch die thermische Bewegung der Atome und Elektronen, daß alle Spins in die gleiche Richtung zeigen. Bei Temperaturen oberhalb des absoluten Nullpunktes ändern ständig einige Spins ihre Richtung (sie „klappen um“), und sie tun das selbst dann, wenn der Ferromagnet dadurch in einen Zustand höherer Energie gelangt. Mit steigender Temperatur nimmt die thermische Bewegung zu. Infolgedessen wird die Magnetisierung schwächer, und bei der Curie-Temperatur verschwindet sie ganz (Bild 3).

Der Widerstreit zwischen der Tendenz der Spins, sich parallel auszurichten, und

der durch thermische Anregung bedingten Unordnung läßt sich in unserem Modell berücksichtigen, indem man eine Größe K , die Stärke der Kopplung zwischen benachbarten Spins, einführt, die umgekehrt proportional zur Temperatur T ist. Wählt man geeignete Maßeinheiten, so kann K dem Kehrwert der Temperatur gleichgesetzt werden: $K = 1/T$.

Die Stärke der Kopplung ermittelt man aus der Wahrscheinlichkeit, mit der zwei benachbarte Spins parallel stehen (Bild 2). Ist die Temperatur Null, so gibt es keine thermische Anregung, und benachbarte Spins stehen mit Sicherheit parallel. Die Wahrscheinlichkeit ist Eins und die Stärke der Kopplung Unendlich. Bei hohen Temperaturen tritt fast keine Wechselwirkung zwischen den Spins auf. Jeder Spin kann so gut wie unabhängig von seinen Nachbarn nach oben oder nach unten zeigen. Die Wahrscheinlichkeit, daß zwei Spins parallel stehen, ist genau so groß wie die Wahrscheinlichkeit, daß sie antiparallel stehen, und beträgt $1/2$. Die Stärke der Kopplung nähert sich dem Wert Null. Bei Temperaturen zwischen diesen beiden Extremen muß die Wahrscheinlichkeit, daß zwei benachbarte Spins parallel stehen, zwischen $1/2$ und 1 und die Stärke der Kopplung zwischen Null und Unendlich liegen.

Wir wollen jetzt annehmen, daß in einem großen zweidimensionalen Gitter die Orientierung eines Spins festgehalten wird, so daß dieser Spin immer nach oben zeigt. Die Spins der vier benachbarten Gitterpunkte sind an den festgehaltenen Spin gekoppelt. Die Wahrscheinlichkeit, daß sie nach oben zeigen, ist daher größer als $1/2$.

Natürlich beeinflusst der festgehaltene Spin indirekt auch entferntere Spins: Da

die unmittelbar benachbarten Spins dazu tendieren, öfter nach oben zu zeigen als nach unten, bewirken sie bei ihren unmittelbaren Nachbarn eine ähnliche Tendenz. Die Spins, deren Richtungen durch den einen festgehaltenen Spin beeinflusst werden, bezeichnen wir als korreliert. Die größte Entfernung, für die eine Korrelation der Spins feststellbar ist, heißt Korrelationslänge. Zwei Spins, deren Abstand voneinander größer ist als die Korrelationslänge, sind in ihrem Verhalten unabhängig. Bei sehr hoher Temperatur gilt das für nahezu alle Spins, das heißt, die Korrelationslänge ist praktisch Null (Bild 1). Fällt die Temperatur, so nimmt die Kopplung zwischen den Spins zu. Es entstehen Korrelationen über größere Entfernungen. Sie bewirken Fluktuationen der Spin-Orientierung, das heißt, sie führen dazu, daß in kleinen Bereichen Spins mit überwiegend gleichen Richtungen auftreten. Zwar heben sich die Magnetisierungen solcher kleinen Bereiche zunächst immer noch gegenseitig auf, aber die Struktur des Gitters unterscheidet sich nennenswert von der Struktur bei sehr hoher Temperatur.

Nähert sich die fallende Temperatur dem Curie-Punkt, so wächst die Korrelationslänge rasch an, und die Spin-Fluktuationen gewinnen an Größe, doch werden kleinere Fluktuationen nicht unterdrückt, sondern bilden eine feinere Struktur innerhalb einer größeren (Bild 1). Mit anderen Worten: In einer großen Fluktuation stehen nicht alle Spins parallel. Sie umfaßt vielmehr mehrere kleinere Fluktuationen und wird nur dadurch erkennbar, daß insgesamt eine Spinrichtung überwiegt. So kann in einem „Meer“ von Spins, die größtenteils nach oben zeigen, eine „Insel“ von hauptsächlich nach unten gerichteten Spins liegen, auf der es einen „See“ von nach oben gerichteten Spins gibt, mit „Inselchen“, deren Spins nach unten zeigen. Die kleinste Fluktuation ist der einzelne Spin.

Ist die Temperatur genau gleich der Curie-Temperatur, wird die Korrelationslänge unendlich, das heißt, beliebig weit voneinander entfernte Spins sind jetzt korreliert. Gleichzeitig bestehen aber weiterhin kleinere Fluktuationen mit Reichweiten in allen Größenordnungen

Bild 4: Mit der Größe des Gitters (mit der Anzahl der Gitterpunkte) nimmt die Zahl der möglichen Spin-Konfigurationen exponentiell zu: Für n Spins, deren jeder zwei Werte (Orientierungen) annehmen kann, gibt es 2^n verschiedene Konfigurationen. Ein quadratisches Gitter aus 100×100 Spins hätte $2^{10\,000}$ oder 10^{3000} Konfigurationen. Selbst die schnellsten Rechenmaschinen könnten die Wahrscheinlichkeiten so vieler Konfigurationen nicht bestimmen. Die Aufgabe wäre viel zu umfangreich. Die Grenzen des praktisch Möglichen werden bereits mit einem (6×6) -Gitter erreicht.

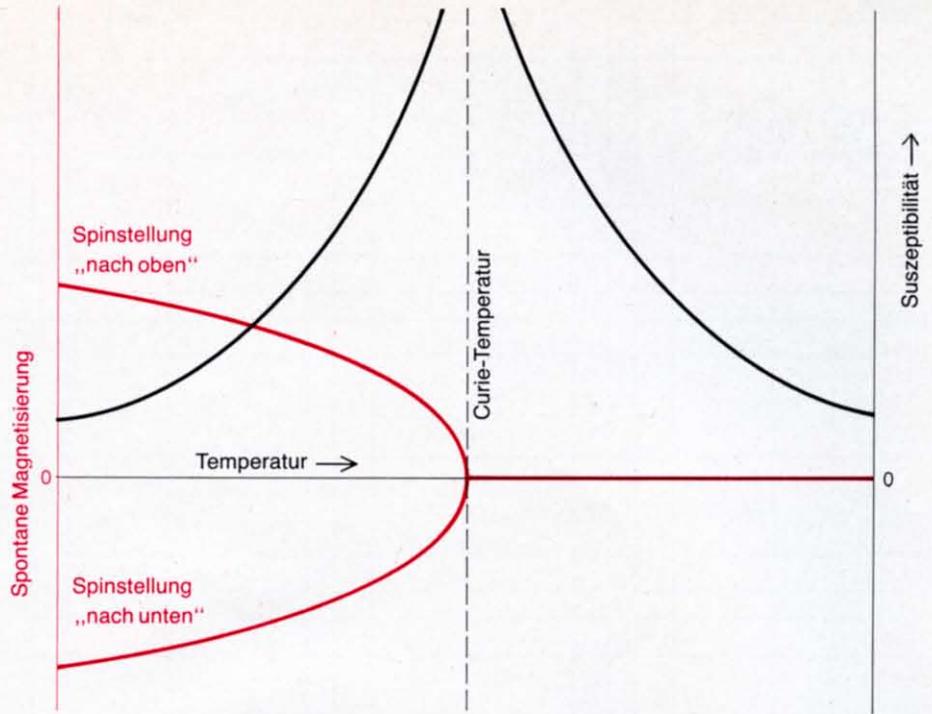
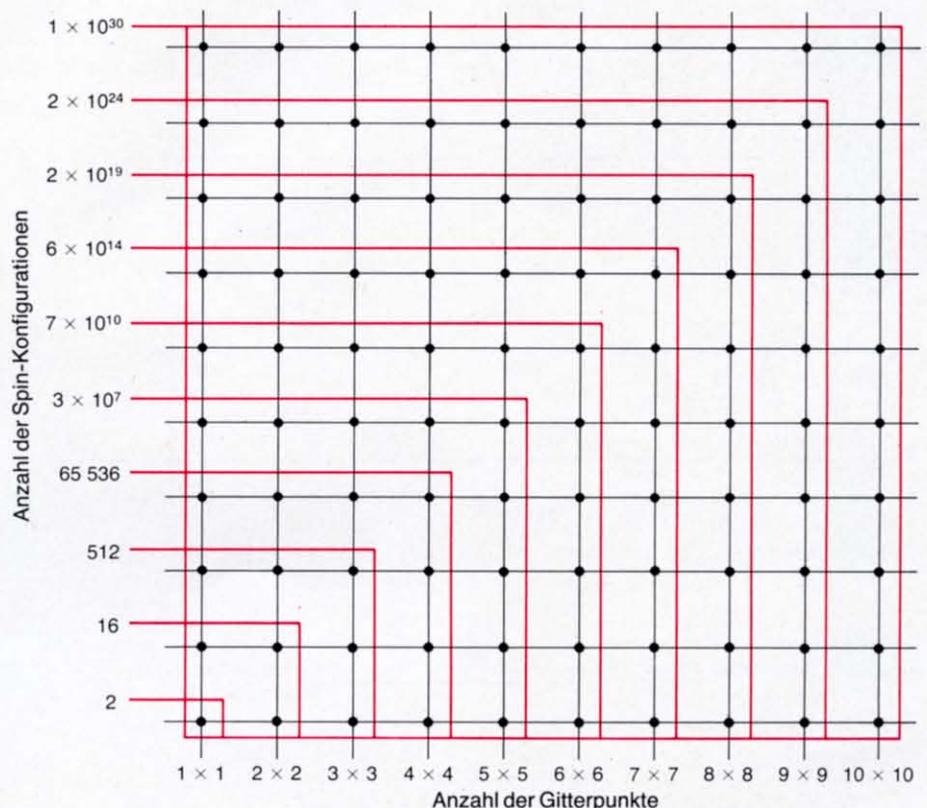
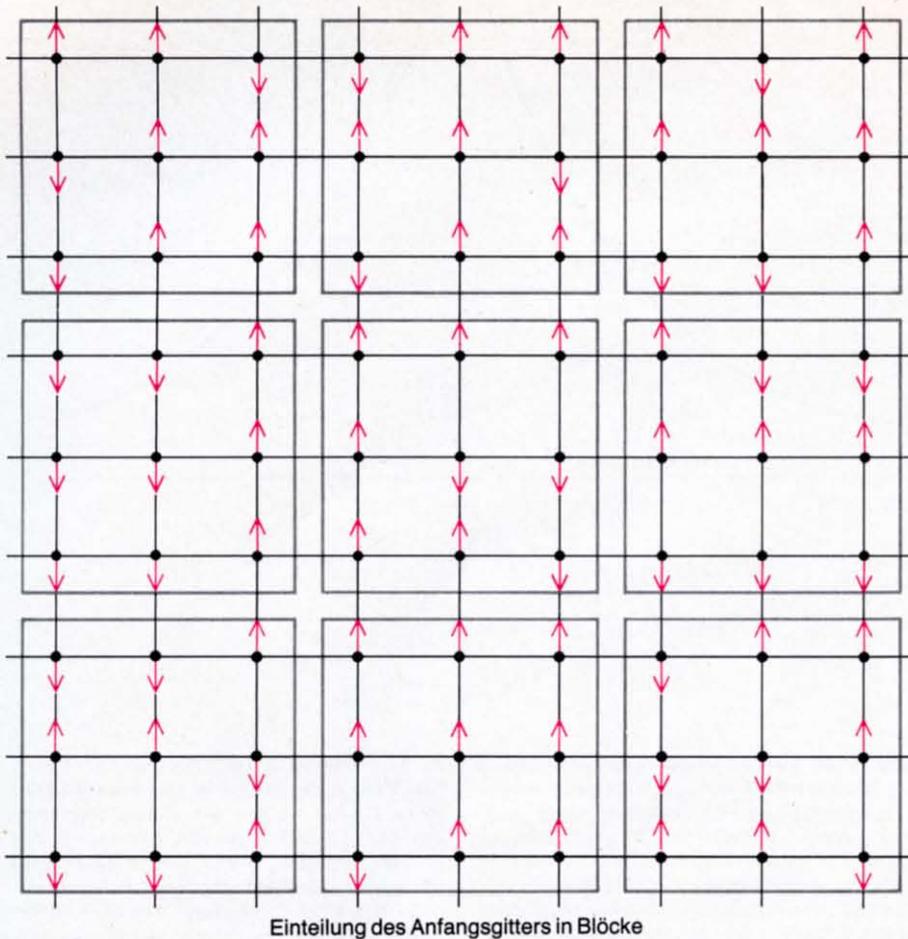


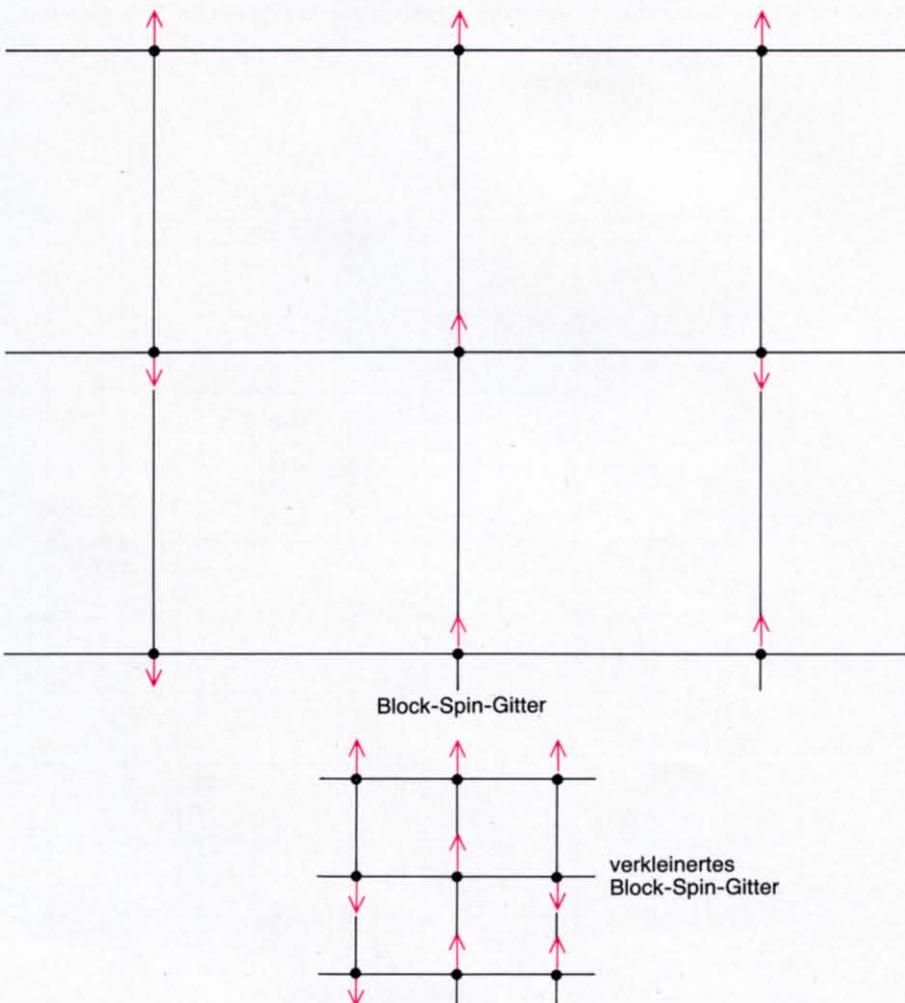
Bild 3: Die Magnetisierung eines Ferromagneten kann unterhalb der Curie-Temperatur zwei Werte annehmen, die entgegengesetzt gleich sind (farbige Kurve). Die Magnetisierungen entsprechen Zuständen, in denen die meisten Spins entweder nach oben oder nach unten zeigen und deren Auftreten in Abwesenheit eines äußeren Magnetfeldes gleich wahrscheinlich ist. Oberhalb der Curie-Temperatur verschwindet

die Magnetisierung. Die schwarze Kurve zeigt den Verlauf der magnetischen Suszeptibilität. Diese Größe, die bei der Curie-Temperatur den Wert Unendlich erreicht, gibt an, wie sich die Magnetisierung unter dem Einfluß eines schwachen äußeren Magnetfeldes ändert. In der Nähe der Curie-Temperatur bewirken kleine Änderungen der Temperatur oder des Magnetfeldes große Änderungen der Magnetisierung.



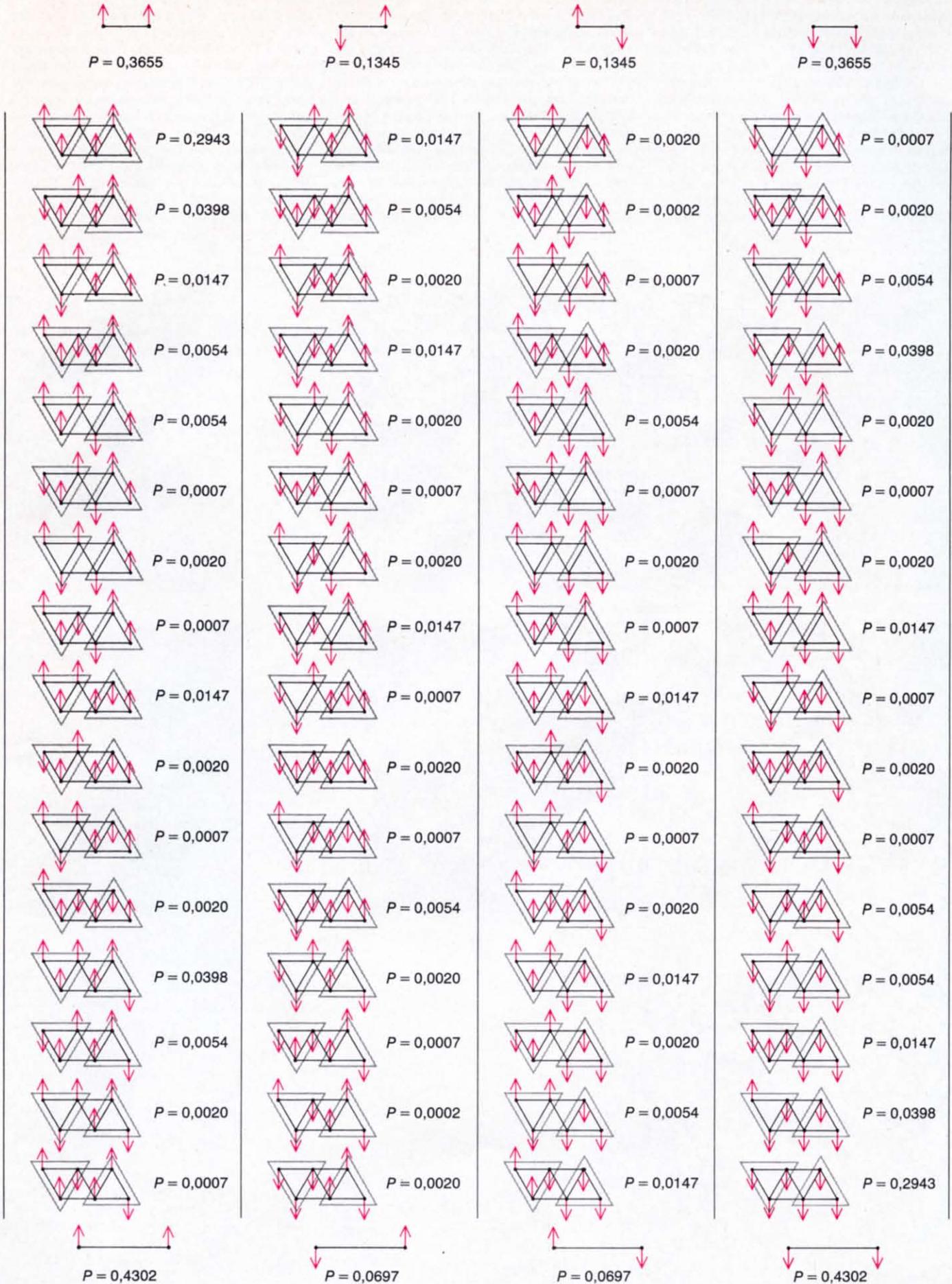


◀ **Bild 5:** Ein quadratisches Gitter mit 9×9 Spins läßt sich durch eine Block-Spin-Transformation in ein Gitter aus 3×3 Block-Spins umwandeln. Man bildet im Anfangsgitter (oben) Blöcke aus 3×3 Spins (graue Rahmen) und untersucht für jeden dieser Blöcke, wieviele Spins nach oben und wieviele nach unten zeigen. Ist die Mehrzahl der Spins in einem Block nach oben gerichtet, so ersetzt man den gesamten Block durch einen Block-Spin, der gleichfalls nach oben zeigt. Im Gitter der Block-Spins (Mitte) haben die Gitterpunkte einen dreimal so großen Abstand voneinander wie im Anfangsgitter. Man verkleinert das Gitter, so daß die Abstände zwischen den Block-Spins ebenso groß werden wie die Abstände im Anfangsgitter unten. Danach kann man die Block-Spin-Transformation auf das entstandene Block-Spin-Gitter anwenden und kommt so zu Block-Spins der zweiten Generation (siehe Bild 7).



► **Bild 6:** Um die Wahrscheinlichkeiten P der Spin-Konfigurationen eines Block-Spin-Gitters zu ermitteln, addiert man die Wahrscheinlichkeiten aller Spin-Konfigurationen des Anfangsgitters, die zu einer Spin-Konfiguration des Block-Spin-Gitters beitragen. Die Rechnung wird hier für ein System aus sechs Spins in einem dreieckigen Gitter gezeigt. Man bildet zwei Blöcke zu je drei Spins (graue Rahmen) und ersetzt jeden Block durch einen Block-Spin, dessen Orientierung nach dem Mehrheitsprinzip festgelegt wird (siehe Bild 5). Die sechs Spins der beiden Blöcke können 64 verschiedene Konfigurationen bilden, die im Hauptteil des Bildes so auf die vier Spalten verteilt worden sind, daß alle Konfigurationen einer Spalte die gleiche Block-Spin-Konfiguration (untere Zeile) ergeben. Für die Stärke der Kopplung im Anfangsgitter wird der Wert $1/2$ angenommen. Daraus ergeben sich die in der obersten Zeile gezeigten Wahrscheinlichkeiten für die vier möglichen Konfigurationen unmittelbar benachbarter Spins. Mit diesen Werten berechnet man die Wahrscheinlichkeiten aller Konfigurationen des Anfangsgitters. Diese werden addiert und ergeben so die in der untersten Zeile stehenden Wahrscheinlichkeiten der vier Block-Spin-Konfigurationen. Man sieht, daß die Block-Spin-Konfigurationen andere Wahrscheinlichkeiten haben als die vier Konfigurationen unmittelbar benachbarter Spins im Anfangsgitter. Das bedeutet, daß im Block-Spin-Gitter eine andere Stärke der Kopplung zwischen benachbarten Spins besteht oder, anders ausgedrückt, daß das Block-Spin-Gitter einem Zustand bei einer anderen Temperatur entspricht als das Anfangsgitter.

Wahrscheinlichkeiten der Konfigurationen benachbarter Spins im Anfangsgitter



Wahrscheinlichkeiten der Konfigurationen benachbarter Block-Spins

Bild 7: Hier wird die Block-Spin-Transformation viermal nacheinander auf ein Spin-Gitter angewandt, das sich etwas über der Curie-Temperatur T_C (links), etwas darunter (rechts) oder genau bei dieser Temperatur (Mitte) befindet. In jedem Fall besteht das Anfangsgitter aus 236 196 Spins, von denen die oberen Diagramme jeweils nur einen Teil zeigen. Bei jeder Block-Spin-Transformation wird ein Block aus neun Spins durch einen Block-Spin ersetzt. Die zweiten Diagramme von oben sind jeweils Ausschnitte aus Systemen mit 26 244 Block-Spins. Erst die dritten Diagramme von oben zeigen das nach der zweiten Block-Spin-Transformation auf 2916 Block-Spins geschrumpfte System

vollständig. Nach der vierten Block-Spin-Transformation sind nur noch 36 Block-Spins übrig, deren jeder 6561 Spins des Anfangsgitters repräsentiert. Die erste Transformation eliminiert alle Fluktuationen, deren Reichweite kleiner als drei Gittereinheiten ist. Bei der zweiten Transformation verschwinden auch die Fluktuationen mit Reichweiten zwischen drei und 9 Gittereinheiten, nach der dritten Transformation sind nur noch Fluktuationen mit Reichweiten über 27 Gittereinheiten übrig und so weiter. Man sieht, daß sich im linken Bildteil (also oberhalb der Curie-Temperatur) die Verteilung schwarzer und weißer Quadrate mit zunehmender Zahl der Transformationen immer

mehr einer statistischen Verteilung nähert und daß die schließlich übrig bleibenden Fluktuationen klein sind. Die statistische Verteilung der Spin-Orientierungen entspricht der Tatsache, daß das System oberhalb der Curie-Temperatur nicht magnetisch ist. Im rechten Bildteil dagegen wird die Spin-Orientierung immer einheitlicher, das heißt, eine Orientierung überwiegt, das System ist magnetisch. Im mittleren Bildteil ähneln sich die durch Block-Spin-Transformationen auseinander hervorgehenden Diagramme in der Größenverteilung der Fluktuationen. Das zeigt, daß sich das System auf der Temperaturskala an einem Fixpunkt befindet, in diesem Fall der Curie-Temperatur. ▼



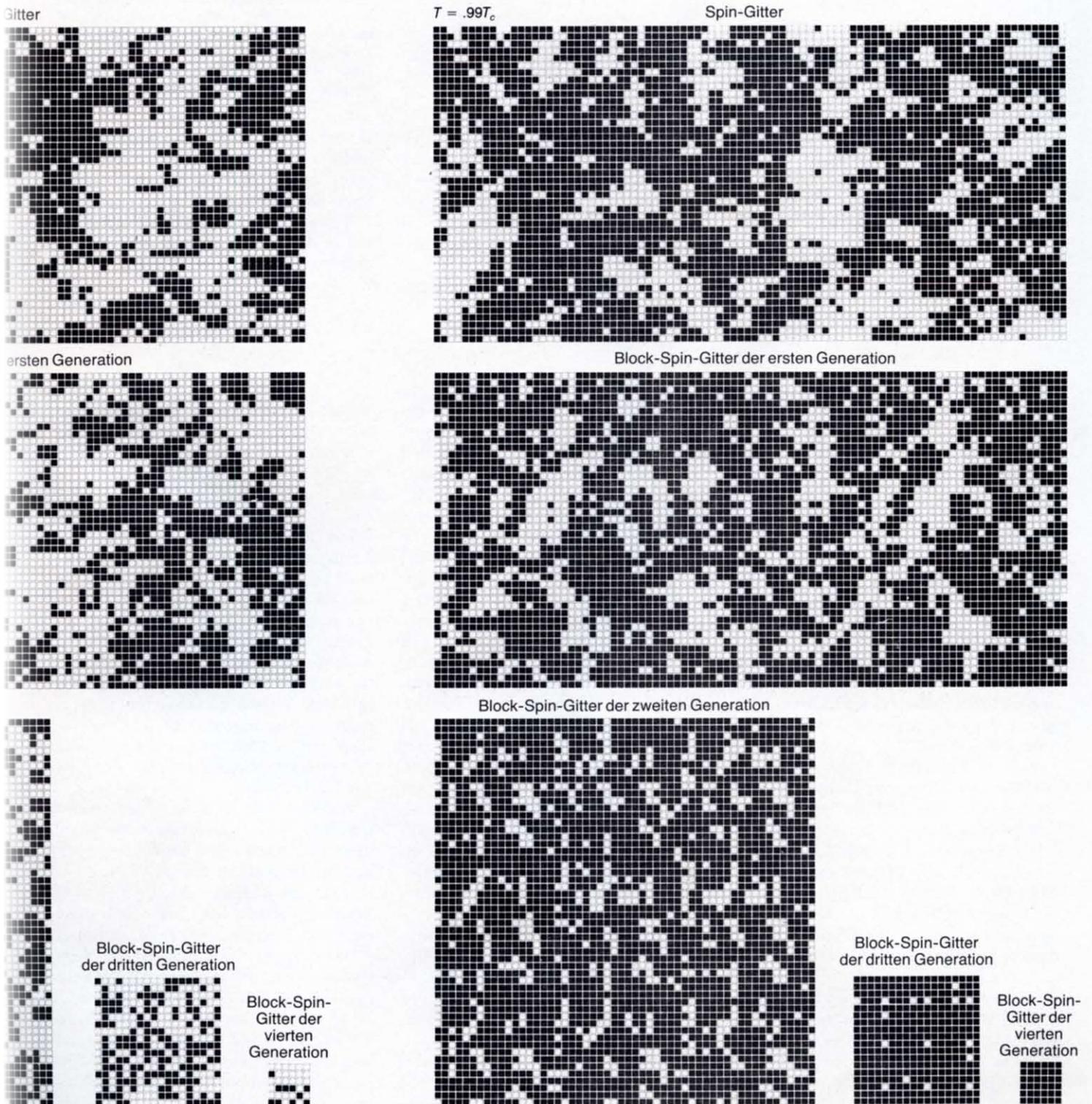
gen. Das System bleibt nach außen hin unmagnetisiert, ist aber schon gegen kleine Änderungen außerordentlich empfindlich. Wird beispielsweise ein Spin in Aufwärtsrichtung festgehalten, so pflanzt sich diese Störung über das Gitter fort, und das gesamte System wird magnetisiert.

Unterhalb der Curie-Temperatur wird das System sogar ohne eine äußere Störung magnetisch. Man kann die Magnetisierung messen, aber dem Gitter sähe man sie auf den ersten Blick nicht an

(Bild 7), denn weiterhin bestehen Fluktuationen verschiedener Größenordnungen. Erst wenn das System weiter abkühlt und durch die stärkere Kopplung immer mehr Spins in die bevorzugte Richtung zeigen, erkennt man, daß eine bevorzugte Richtung existiert. Beim absoluten Nullpunkt weisen dann alle Spins in diese Richtung.

Dichteschwankungen in Flüssigkeiten, die sich in der Nähe des kritischen Punktes befinden, ähneln den Spin-Fluktuationen im Gitter eines Ferromagneten,

haben aber den Vorteil, daß man sie direkt beobachten kann. Erreicht die Korrelationslänge wenige Tausendstel Millimeter, so beginnen die Fluktuationen Licht zu streuen, und die Flüssigkeit bekommt ein milchiges Aussehen. Man bezeichnet diese Erscheinung als kritische Opaleszenz. Die kritische Opaleszenz verschwindet nicht, wenn sich die Temperatur weiter dem kritischen Punkt nähert und Fluktuationen auftreten, die mehrere Millimeter oder Zentimeter groß sind. Die kleineren Fluktuationen



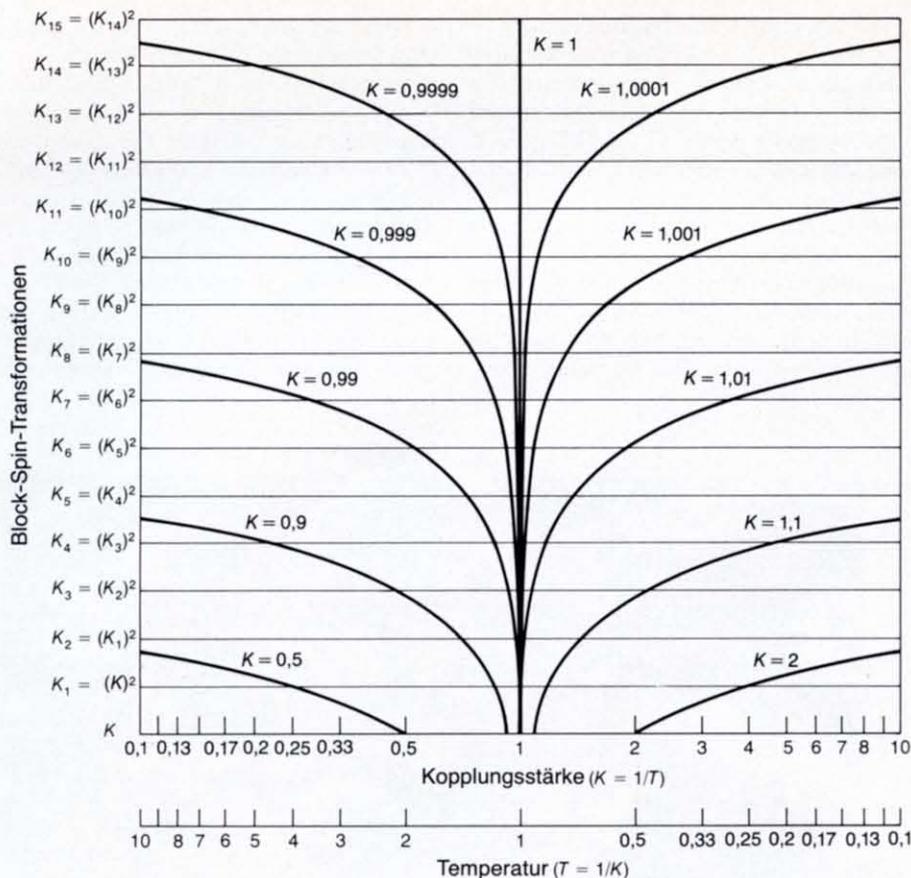


Bild 8: Bei einer Block-Spin-Transformation ändert sich die Kopplungsstärke zwischen den Spins. Die Art der Änderung kann verschieden sein. Wir betrachten hier das einfache Beispiel, daß die Kopplungsstärke K_1 des transformierten Gitters gleich dem Quadrat der ursprünglichen Kopplungsstärke K ist, also $K_1 = K^2$. Ist K größer als 1, so wird die Kopplungsstärke mit jeder Transformation größer und schließlich unendlich. Umgekehrt nähern sich die Kopplungsstärken dem Wert Null, wenn der anfängliche Wert K kleiner als 1 ist. Ist $K = 1$, so bleibt dieser Wert bei allen Transformationen erhalten, und das System befindet sich auf der Temperaturskala an einem Fixpunkt (bei der Curie-Temperatur). Da die Kopplungsstärke bei Wahl geeigneter Einheiten gleich dem Kehrwert der Temperatur ist, entspricht jedes Block-Spin-Gitter einem Zustand des ursprünglichen Systems bei anderer Temperatur. Lediglich mit $K = 1$ bleiben alle Block-Spin-Gitter bei derselben Temperatur wie das Ausgangsgitter: bei der Curie-Temperatur.

re benachbarter Spins miteinander zu multiplizieren und dabei für parallele Spins den Faktor p , für antiparallele Spins den Faktor $(1-p)$ zu verwenden.

Betrachten wir ein System, das nur aus vier an den Ecken eines Quadrates angeordneten Spins besteht (Bild 2). Sind alle vier Spins nach oben gerichtet, so ergibt sich die relative Wahrscheinlichkeit für diese Konfiguration zu

$$p \times p \times p \times p.$$

Stehen drei Spins nach oben und einer nach unten, so ist die relative Wahrscheinlichkeit

$$p \times p \times (1-p) \times (1-p).$$

Diese Rechnung muß für jede Spin-Konfiguration ausgeführt werden, das heißt bei einem System von vier Spins für sechzehn Konfigurationen. Die Summe der sechzehn relativen Wahrscheinlichkeiten ist nicht unbedingt Eins, da wir p unabhängig von der Zahl der Konfigurationen eingeführt haben. Man kann die relativen Wahrscheinlichkeiten so umrechnen (normieren), daß ihre Summe Eins wird, und erhält damit die absoluten Wahrscheinlichkeiten für die sechzehn Konfigurationen.

Praktisch läßt sich das Ising-Modell auf diese Weise allerdings nicht lösen, denn die Anzahl der denkbaren Spin-Konfigurationen ist riesig. Besteht ein System aus n Spins, deren jeder zwei Werte annehmen (das heißt nach oben oder nach unten weisen) kann, so gibt es 2^n mögliche Konfigurationen. Der Wert von 2^n wächst mit zunehmendem n sehr rasch an (Bild 4). Vier Spins ergeben $2^4 = 16$ Konfigurationen, bei neun Spins hat man $2^9 = 512$ Konfigurationen, und sechzehn Spins können in $2^{16} = 65536$ Kombinationen auftreten. Schon bei einem Block von 36 Spins, für den es nä-

bestehen also weiter. Auch bei Ferromagneten gibt es eine kritische Opaleszenz, doch macht sie sich nicht im sichtbaren Licht bemerkbar. Man erkennt sie, wenn man den Ferromagneten mit Neutronen durchstrahlt.

Das Ising-Modell

Das Modell des Spin-Gitters, das ich hier beschrieben habe, wurde in den zwanziger Jahren von den deutschen Physikern Wilhelm Lenz und Ernst Ising entwickelt. Man bezeichnet es heute als Ising-Modell. Seine Eigenschaften sind in allen Einzelheiten bekannt, denn 1944 gelang es Lars Onsager in Amerika, das Modell zu „lösen“.

Was versteht man unter der „Lösung“ des Modells eines physikalischen Systems? Die mikroskopischen Eigenschaften des Ising-Modells wurden bei seiner Konstruktion festgelegt. Die „Lösung“ des Modells bestand darin, Gleichungen zu entwickeln, mit denen sich die makroskopischen Eigenschaften des Systems aus seinen mikroskopischen Eigenschaften berechnen lassen.

Wir wollen im folgenden die Renormierungsgruppe benutzen, um das Ising-Modell eines Ferromagneten zu lösen, und wollen dabei zunächst so vorgehen, als gäbe es Onsagers Lösung noch nicht, werden unsere Resultate dann aber mit Onsagers Lösung vergleichen.

Es ist nicht besonders schwierig, die makroskopischen Eigenschaften zu berechnen, die sich aus *einer* Konfiguration der Spins im Ising-Modell ergeben. Beispielsweise erhält man die Magnetisierung, wenn man die Differenz aus den Anzahlen der nach oben und nach unten gerichteten Spins bildet (Bild 2). Die makroskopischen Eigenschaften eines Ferromagneten werden aber nicht nur durch *eine* Spin-Konfiguration bestimmt, sondern *alle* denkbaren Konfigurationen tragen zu den Eigenschaften bei, und zwar im Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten ihres Auftretens unter den jeweils gegebenen Bedingungen. Es sollte also möglich sein, die Magnetisierung eines Ferromagneten zu berechnen, indem man sie zunächst für jede denkbare Spin-Konfiguration ermittelt, die erhaltenen Werte mit den Wahrscheinlichkeiten des Auftretens der Konfigurationen multipliziert und die Produkte addiert. Voraussetzung dafür ist, daß man die Wahrscheinlichkeiten aller denkbaren Spin-Konfigurationen kennt.

Bezeichnet man die Wahrscheinlichkeit, daß zwei benachbarte Spins parallel stehen, mit p , so muß die Wahrscheinlichkeit, daß sie antiparallel stehen, $1-p$ sein. Mit diesen Werten läßt sich die relative Wahrscheinlichkeit jeder Spin-Konfiguration im zweidimensionalen Gitter berechnen. Man braucht nur die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Paa-

herungsweise 7×10^{10} Konfigurationen gibt, stieße der Rechenaufwand, den das skizzierte Lösungsverfahren verlangt, an die Grenzen des Möglichen.

Wie groß müßte das Gitter sein, um die Eigenschaften des zweidimensionalen Ising-Modells bei einer kritischen Temperatur zu berechnen? Es müßte mindestens so groß sein wie die größte Fluktuation, die bei dieser Temperatur auftreten kann. Nimmt man an, daß die Korrelationslänge eines Ferromagneten in der Nähe des Curie-Punktes hundertmal so groß ist wie der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten, so würde sich die größte Fluktuation über $100^2 = 10\,000$ Gitterpunkte erstrecken. In einem Block dieser Größe gibt es $2^{10\,000}$ mögliche Spin-Konfigurationen. Das sind mehr als 10^{3000} . Selbst der größte und schnellste Computer, den man sich vorstellen kann, wäre damit überfordert: Hätte er seit der Entstehung des Universums ununterbrochen gerechnet, so stünde er heute immer noch am Anfang seiner Aufgabe.

In zwei Fällen läßt sich das Ising-Modell auf die beschriebene Weise lösen, ohne daß man eine nahezu unbegrenzte Zahl von Spin-Konfigurationen bewerten muß: beim absoluten Nullpunkt der Temperatur und bei der Temperatur Unendlich. Beim absoluten Nullpunkt treten nur zwei Konfigurationen auf, denn die Spins sind vollständig gekoppelt, und die Wahrscheinlichkeit, daß benachbarte Spins entgegengesetzt gerichtet sind, ist Null. Konfigurationen, in denen antiparallele Spins vorkommen, sind ausgeschlossen, das heißt, es gibt nur die

beiden Konfigurationen mit parallelen Spins: alle Spins weisen entweder nach oben oder nach unten.

Bei unendlicher Temperatur ist die Stärke der Kopplung praktisch Null. Jeder Spin ist von seinen Nachbarn unabhängig und kann seine Richtung zu jedem Zeitpunkt beliebig ändern. Jede denkbare Konfiguration ist also gleich wahrscheinlich.

Am absoluten Nullpunkt und bei der Temperatur Unendlich kann man die makroskopischen Eigenschaften des Ising-Modells ohne Schwierigkeiten berechnen. Außerdem gibt es Näherungsmethoden für Temperaturen, die in der Nähe des absoluten Nullpunktes liegen oder so hoch sind, daß man sie als so gut wie unendlich bezeichnen kann. Für den in der Praxis wichtigen Bereich zwischen diesen Extremen gab es bis vor kurzem keine praktikable Methode zur direkten Berechnung der Eigenschaften eines Spin-Systems. Die Anwendung der Renormierungsgruppe hat diese Situation geändert.

Die Block-Spin-Transformation

Die Methode der Renormierungsgruppe unterscheidet sich von herkömmlichen Methoden im wesentlichen darin, daß sie ein umfangreiches Problem in eine Folge überschaubarer Probleme zerlegt. Um das Verfahren zu illustrieren, beschreibe ich hier die Block-Spin-Technik. Leo P. Kadanoff an der Universität Chicago hat sie erdacht, und Th. Niemeijer und J. M. J. van Leeuwen an der

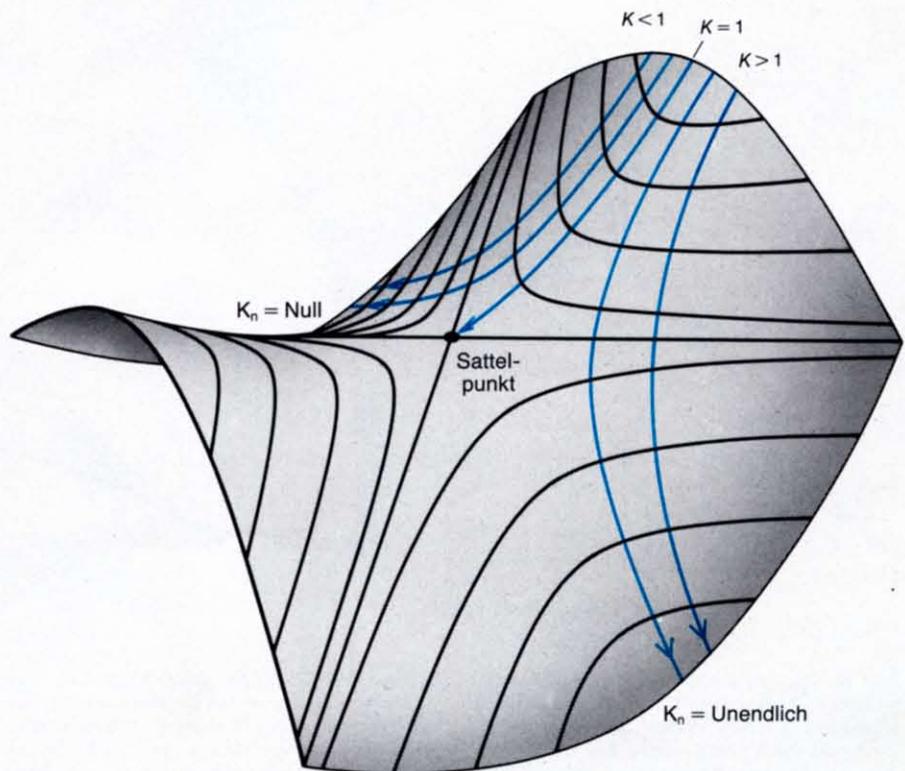
Technischen Universität Delft haben sie zu einer praktisch brauchbaren Methode entwickelt.

Die Block-Spin-Technik besteht darin, das Gitter in drei Schritten, die mehrmals wiederholt werden (Bild 5), in eine andere Form zu transformieren. Im ersten Schritt zerlegt man das Spin-Gitter in Blöcke, die nur wenige Spins enthalten, beispielsweise in quadratische Blöcke mit $3 \times 3 = 9$ Spins. Im zweiten Schritt bildet man den Mittelwert aller Spins eines Blocks und ersetzt den gesamten Block durch einen Spin (den Block-Spin), der dem Mittelwert entspricht. Den Mittelwert kann man beispielsweise nach dem Mehrheitsprinzip bilden: Zeigen fünf oder mehr Spins eines Blocks nach oben, so weist der neue Spin ebenfalls nach oben, anderenfalls nach unten. Man erhält auf diese Weise ein neues Gitter, in dem der Abstand zwischen zwei Gitterpunkten dreimal so groß ist wie im ursprünglichen Gitter. Im dritten Schritt verkleinert man den Maßstab um den Faktor 3 und erhält so wieder den alten Abstand zwischen zwei Gitterpunkten.

Zusammen bilden diese drei Schritte eine Block-Spin-Transformation. Sie eliminieren alle Spin-Fluktuationen, die kleiner sind als die gewählte Blockgröße. In unserem Beispiel sind das alle Spin-Fluktuationen, deren Reichweite kleiner ist als der dreifache Abstand zwischen zwei Gitterpunkten.

Hat man für jede Spin-Konfiguration des ursprünglichen Gitters eine Block-Spin-Transformation ausgeführt, so muß

Bild 9: Die durch Block-Spin-Transformationen hervorgerufenen Änderungen der Kopplungsstärken lassen sich als Kurven (farbige Linien) auf einer sattelförmigen Fläche darstellen, die sich ergibt, wenn man alle denkbaren Zustände eines zweidimensionalen Spin-Systems im Parameterraum darstellt: Man faßt die Größen, von denen die Eigenschaften des Systems abhängen, als Koordinaten eines hypothetischen Raumes auf und beschreibt jeden Zustand durch diese Größen als einen Punkt im Raum. Alle Punkte zusammen ergeben die (graue) Parameterfläche. Ein Punkt, der einem Spin-Gitter mit einer bestimmten Kopplungsstärke entspricht, verschiebt sich bei Block-Spin-Transformationen längs einer Kurve, deren Verlauf durch die Lage des Anfangspunktes und die Gestalt der Fläche vollständig bestimmt ist. Man erhielte die gleiche Bahn, wenn man eine Murmel über die Fläche rollen ließe. Für ein System bei der Curie-Temperatur, also mit der Kopplungsstärke 1, bleibt die Kopplungsstärke unverändert. Ihm entspricht die Kurve, die auf der Gratlinie durch den Sattelpunkt der Fläche läuft. Unterscheidet sich die Kopplungsstärke K des Anfangsgitters nur wenig von 1, so nähern sich die Kurven zwar dem Sattelpunkt, erreichen ihn aber nicht und streben schließlich zu K_n gleich Null oder Unendlich. Die Gestalt der Fläche in der Umgebung des Sattelpunktes legt fest, wie sich das System in der Nähe der Curie-Temperatur verhält.



man die Wahrscheinlichkeiten der neuen Konfigurationen bestimmen. Wir wollen einen kleinen Bereich des ursprünglichen Gitters betrachten, der aus 36 Spins besteht. Hier gibt es 2^{36} oder etwa siebenzig Millionen Spin-Konfigurationen. Zerlegt man den Block aus 36 Spins in vier Blöcke mit je neun Spins, so erhält man nach der Block-Spin-Transformation vier Block-Spins, für die insgesamt nur noch 16 Konfigurationen möglich sind. Nun könnte man die Wahrscheinlichkeiten dieser 16 Konfigurationen ermitteln, indem man die Wahrscheinlichkeiten der 2^{36} Konfigurationen der 36 ursprünglichen Spins bestimmt. Das läge rechnerisch zwar im Bereich des Möglichen, würde aber bedeuten, daß uns die Block-Spin-Transformation gar keinen Vorteil bringt.

Es gibt jedoch noch eine andere Möglichkeit. Sie besteht darin, das Gitter der Block-Spins wie ein eigenständiges Spin-Gitter, das heißt ebenso wie das ursprüngliche Spin-System zu behandeln: Man macht die Annahme, daß auch zwischen benachbarten Block-Spins Kopplungen bestehen, die von der Temperatur abhängen und die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Spin-Konfigurationen bestimmen. Möglicherweise unterscheiden sich diese Kopplungen nicht einmal von denen des ursprünglichen Spin-Systems und sind gleichfalls durch den Kehrwert der Temperatur gegeben? Diese Vermutung trifft nicht zu. Sie läßt sich prüfen, indem man die Wahrscheinlichkeiten der Spin-Konfigurationen in

einem kleinen Ausschnitt des ursprünglichen Gitters und daraus die Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Block-Spin-Konfigurationen errechnet (Bild 6). Der erhaltene Wert stimmt nicht mit dem überein, der sich ergibt, wenn man für die Block-Spins die gleiche Kopplung annimmt wie für die Spins des ursprünglichen Gitters.

Die Kopplungen zwischen den Block-Spins unterscheiden sich nicht nur in der Stärke, sondern unter Umständen auch in der Reichweite. Block-Spins an diagonal gegenüberliegenden Gitterpunkten können einander beeinflussen. Kopplungen über größere Entfernungen sind möglich, und es kann vorkommen, daß mehr als zwei Block-Spins miteinander gekoppelt sind. In jedem Fall müssen alle diese Kopplungen zusammengefasst eine Bedingung erfüllen: Sie müssen für die einzelnen Block-Spin-Konfigurationen Wahrscheinlichkeiten liefern, aus denen sich für die makroskopischen Eigenschaften diejenigen Werte errechnen lassen, die experimentell beobachtet werden.

Ist man in der Lage, die Kopplungen zwischen den Block-Spins zu beschreiben, so kann man auf das Block-Spin-Gitter erneut die Schritte der Block-Spin-Transformation anwenden und erhält so eine zweite Generation von Block-Spins. Es zeigt sich, daß die Kopplungen zwischen den Block-Spins der zweiten Generation wieder von anderer Art sind. Hat man sie ermittelt, so kann man zur dritten Generation der Block-

Spins fortschreiten und so fort, das heißt, man kann die Transformation beliebig oft wiederholen.

Mit jeder Transformation erhält man ein neues Block-Spin-Gitter, das größere Fluktuationen des ursprünglichen Spin-Systems beschreibt (Bild 7). Die erste Transformation eliminiert die Fluktuationen der kleinsten Größenordnung und läßt die etwas größeren deutlicher sichtbar werden. Nach der zweiten Transformation repräsentiert jeder Block-Spin 81 Spins des ursprünglichen Gitters (wenn bei jeder Transformation neun Spins zu einem Block-Spin zusammengefasst werden), und alle Fluktuationen, die kleiner als neun Abstände zwischen den Punkten des ursprünglichen Gitters sind, fallen weg. Bei der nächsten Transformation verschwinden Fluktuationen, deren Ausdehnung zwischen neun und 27 Einheiten des ursprünglichen Gitters liegt, und bei der vierten werden auch die Fluktuationen zwischen 27 und 81 Einheiten eliminiert. Man kann auf diese Weise ein Stadium erreichen, in dem keine Fluktuationen mehr vorkommen, deren Ausdehnung kleiner ist als die Korrelationslänge des ursprünglichen Gitters. In diesem Stadium zeigt das Block-Spin-Gitter nur noch die Eigenschaften des ursprünglichen Gitters, die eine große Reichweite haben.

Bild 7 läßt den Nutzen der Block-Spin-Technik am Beispiel des Spin-Gitters eines Ferromagneten erkennen. Betrachtet man eine Spin-Konfiguration des Gitters knapp unterhalb der Curie-

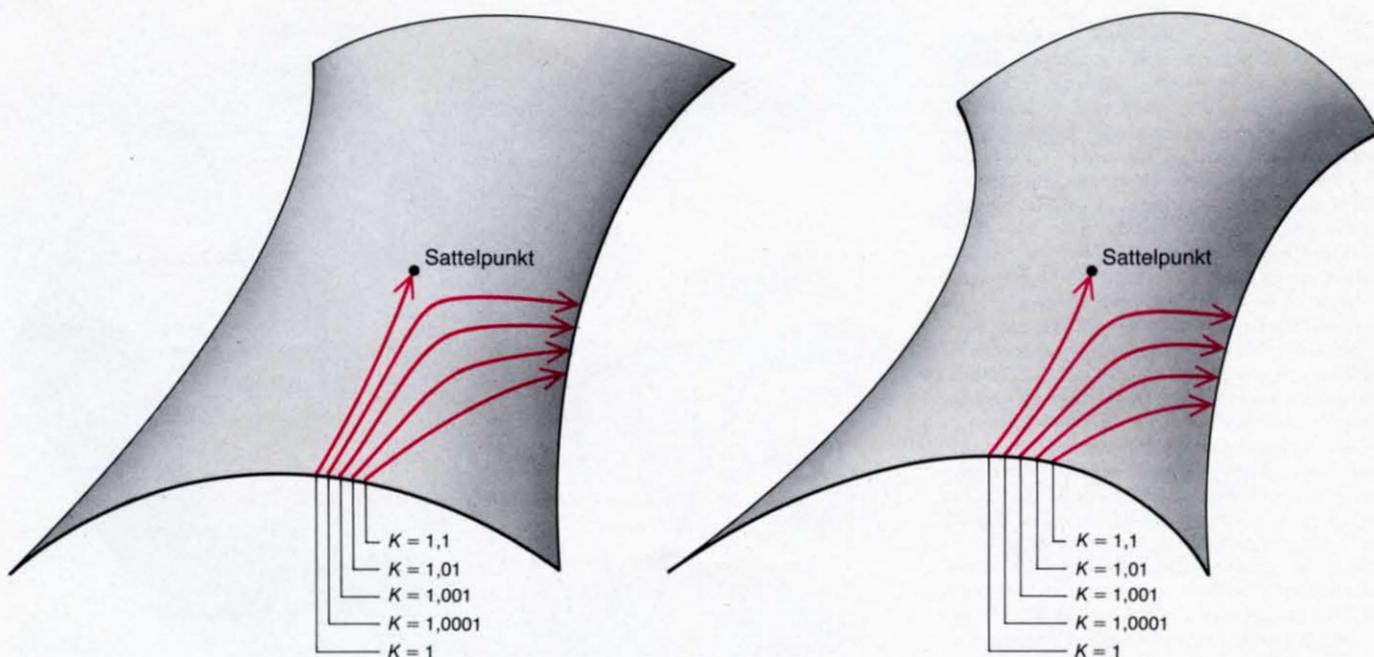


Bild 10: Wie sich die Neigung der in Bild 9 vorgestellten Fläche in der Nachbarschaft des Sattelpunktes auf den Verlauf der Kurven auswirkt, die die Veränderungen bei Block-Spin-Transformationen beschreiben, zeigen diese

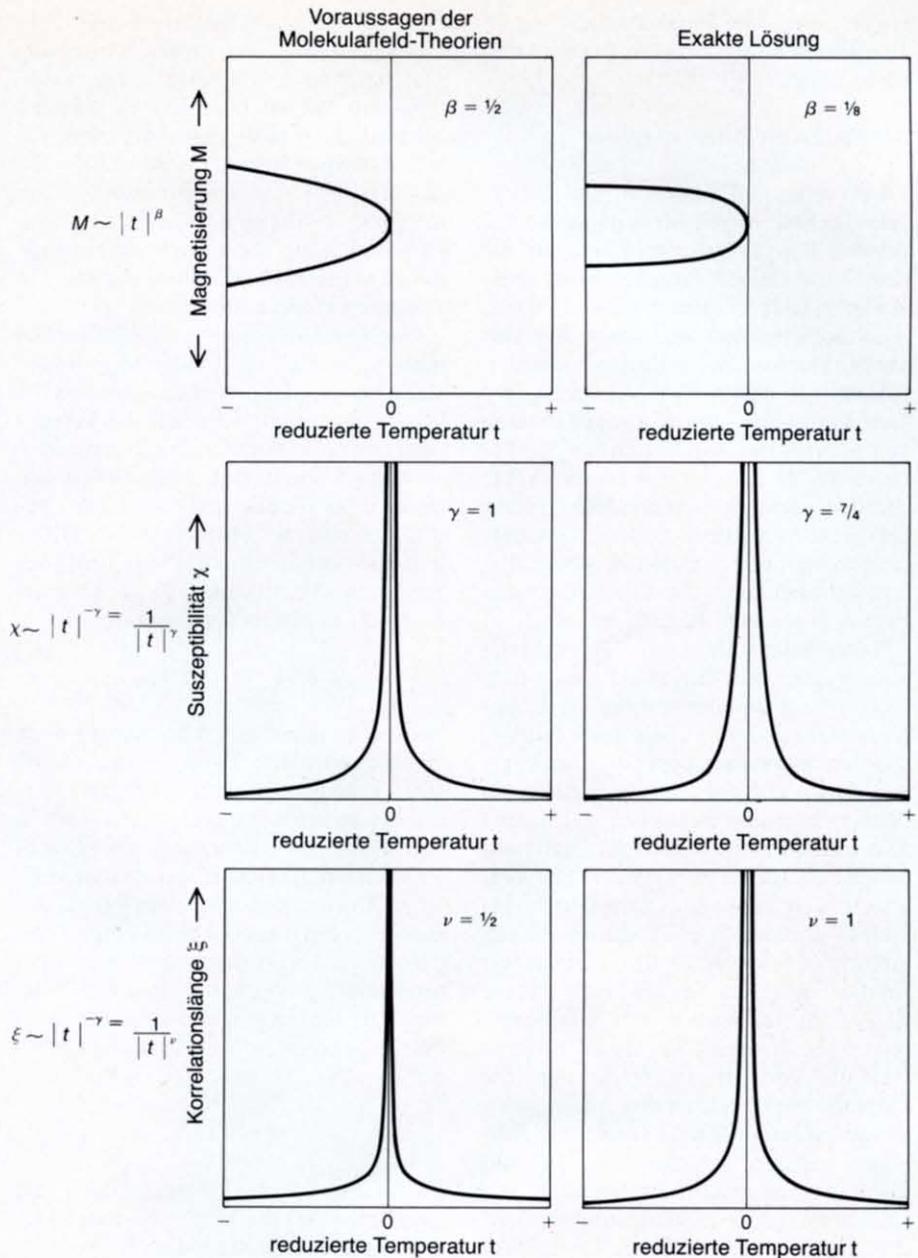
beiden Beispiele. Die linke Fläche ist vergleichsweise flach, so daß die Kurven für Systeme mit anfänglichen Kopplungsstärken K nahe dem Wert 1 näher an den Sattelpunkt herankommen als bei der stärker geneigten rechten

Fläche. Da die Temperatur der Kehrwert von K ist, läßt sich aus den Neigungen der Flächen in der Nähe des Sattelpunktes die entsprechenden Systeme im Bereich der kritischen Temperatur besitzen.

Bild 11: Für das Verhalten eines Ferromagneten sind drei Größen kennzeichnend: die Magnetisierung M , die Suszeptibilität χ und die Korrelationslänge ξ seines Spin-Systems, die angibt, bis zu welcher Entfernung Spins einander beeinflussen können. Alle drei Größen sind proportional zu einer Potenz des Betrages $|t|$ der reduzierten Temperatur. Die reduzierte Temperatur erhält man, wenn man die Differenz zwischen Temperatur und Curie-Temperatur durch die Curie-Temperatur dividiert: $t = (T - T_c)/T_c$. Diese Proportionalität wurde schon in älteren Theorien über das Verhalten von Spin-Systemen im kritischen Zustand abgeleitet (linke Bildhälfte), doch sagten diese Theorien für die kritischen Exponenten β , γ und ν , durch die M , χ und ξ mit $|t|$ verknüpft sind, Werte voraus, die nicht unter allen Umständen zutreffen: Die Magnetisierung wird in Wirklichkeit nicht so groß, während die Suszeptibilität und die Korrelationslänge in der Nachbarschaft des kritischen Punktes (also in der Nähe von $t = 0$) größere Werte haben. 1944 gelang Lars Onsager die exakte Lösung des zweidimensionalen Ising-Modells. Die Kurven, die sich mit den dabei ermittelten kritischen Exponenten für M , χ und ξ ergeben, sind in der rechten Hälfte des Bildes dargestellt. Sie lassen sich auch aus der Neigung der in den Bildern 9 und 10 gezeigten Parameterflächen in der Nähe des Sattelpunktes ableiten.

Temperatur (rechtes Drittel des Bildes), so wird man auf den ersten Blick kaum feststellen können, daß das Modell magnetisiert ist, denn es weisen nahezu gleich viele Spins nach oben und nach unten, und die vielen kleinen Fluktuationen machen das Bild unübersichtlich. Wendet man vier Block-Spin-Transformationen an, so verschwinden die kleinen Fluktuationen, und die Magnetisierung wird sichtbar.

Die physikalische Bedeutung der Block-Spin-Transformation ergibt sich unter anderem aus der Art, in der sich die Kopplungen zwischen den Spins ändern. Oft sind die Regeln, nach denen man die neuen Kopplungen aus den alten ableitet, sehr kompliziert. Wir wollen die Änderungen der Kopplungen an einem einfachen Modell veranschaulichen, das allerdings keinem realen physikalischen System entspricht. In diesem Modell sollen Kopplungen immer nur zwischen unmittelbar benachbarten Spins auftreten, so daß sich nur die Stärke der Kopplung ändern kann. Für die Stärke der Kopplung hatten wir das Symbol K eingeführt. Da K gleich dem Kehrwert der Temperatur T ist ($K = 1/T$), entspricht eine Änderung von K einer Änderung der Temperatur. In unserem Modell soll weiterhin die Stärke der Kopplung zwischen Block-Spins gleich dem Quadrat der Kopplungsstärke in dem Gitter sein, aus dem das Block-Spin-Gitter hervorgegangen ist. Bezeichnet man die Stärke der Kopplung zwischen der ersten Generation von Block-Spins mit K_1 , so gilt demnach: $K_1 = K^2$. Wir nehmen nun an, daß K den Wert $1/2$ hat.



Das bedeutet, daß sich das ursprüngliche Spin-Gitter bei einer Temperatur befindet, die (in willkürlich festgelegten Einheiten) den Wert 2 hat. In dem Gitter, das durch die erste Block-Spin-Transformation entsteht, ist dann $K_1 = (1/2)^2 = 1/4$ (Bild 8). Für die nächsten Transformationen erhält man die Kopplungsstärken $K_2 = 1/16$, $K_3 = 1/256$ und so weiter. Diese Folge konvergiert rasch gegen Null, das heißt, mit jeder Transformation wird die Kopplung des Spins schwächer. Da K gleich $1/T$ ist, entsprechen die abfallenden Kopplungsstärken zunehmenden Temperaturen, bis bei der Temperatur Unendlich ($K = 0$) alle Spins unabhängig sind.

Nimmt man andererseits an, daß K im ursprünglichen Spin-System den Wert 2 hat, was der Anfangstemperatur $1/2$ entspricht, so wächst die Kopplungsstärke mit jeder Transformation an (Bild 8). Sie

beträgt nach der ersten Transformation 4, dann 16, dann 156 und wird schließlich Unendlich. Diese Folge entspricht sinkenden Temperaturen, das heißt, das System nähert sich dem Zustand, in dem alle Spins in die gleiche Richtung weisen.

Wenn wir hier von zunehmenden und abfallenden Temperaturen sprechen, so bedeutet das natürlich nicht, daß sich das Spin-System (der Ferromagnet) erhitzt oder abkühlt. Vielmehr entsteht bei jeder Transformation ein neues Spin-Gitter, das sich so verhält, wie sich das ursprüngliche System bei einer anderen Temperatur verhalten würde.

Es gibt drei Werte von K (Null, Eins, Unendlich), für die sich in unserem Modell die Kopplungsstärke bei den Transformationen nicht ändert. Man sagt in solchen Fällen, das System befinde sich an einem Fixpunkt. Zwei dieser Fixpunkte ($K = 0$ und $K = \text{Unendlich}$) gel-

ten als trivial. Der Fixpunkt mit $K = 1$ ist dagegen wichtig: Er entspricht dem kritischen Punkt.

Die Fläche im Parameterraum

Bei unserer Diskussion der Block-Spin-Technik haben wir unterstellt, daß sich bei den Transformationen nur die Kopplungsstärke K zwischen benachbarten Spins ändert. Tatsächlich ändern sich gleichzeitig weitere Parameter, was sich durch Flächen in mehrdimensionalen Räumen darstellen läßt: Man ordnet jedem Parameter eine Koordinatenachse zu und stellt die jeweilige Größe des Parameters als Strecke auf dieser Achse dar. Jedes Spin-System und jedes daraus hervorgehende Block-Spin-System entspricht dann einem Punkt in diesem Parameterraum, und die Gesamtheit der Punkte ergibt eine Parameterfläche.

Beschränken wir unsere Betrachtung jetzt wieder auf das zweidimensionale Ising-System, in dem sich nur die Kopplungsstärke ändert, so liegen alle Punkte, die diesem System entsprechen, im Parameterraum auf der im Bild 9 gezeigten Fläche mit zwei Erhebungen (rechts und links), zwei Tälern (vorn und hinten) und einem Sattelpunkt in der Mitte. Die Veränderungen, die ein Spin-Gitter bei mehreren Block-Spin-Transformationen erfährt, stellen sich als Kurve auf dieser Fläche dar. Der Verlauf einer Kurve hängt vom Anfangswert der Kopplungsstärke ab. Ist dieser kleiner als Eins, so läuft die Kurve in das Tal, in dem der Fixpunkt Null liegt. Ist der Anfangswert von K größer als Eins, so endet die Kurve im anderen Tal, das dem Fixpunkt Unendlich entspricht. Nur wenn $K = 1$ ist, bewegt sich das System auf dem Grat, der die beiden Erhebungen verbindet und durch den Sattelpunkt geht. Der Sattelpunkt selbst entspricht dem kritischen Punkt.

Uns interessiert vor allem das Verhalten eines Spin-Systems in der Nähe des kritischen Punktes, also dann, wenn die durch Block-Spin-Transformationen bewirkten Veränderungen durch Kurven wiedergegeben werden, die in der Nähe des Sattelpunktes verlaufen. Wählt man für die Kopplungsstärke beispielsweise den Anfangswert $K = 0,9999$, so hat man nach wenigen Transformationen einen nur wenig veränderten Wert (Bild 8), da sich K , $K_1 = K^2$, $K_2 = K_1^2$, $K_3 = K_2^2$ und so weiter nur geringfügig unterscheiden. Entsprechendes gilt für den Anfangswert $K = 1,0001$. Man kann nun untersuchen, wie sich die Bahnen ändern, wenn die Kopplungsstärke zunehmend vom kritischen Wert ($K = 1$) abweicht. Ist die Fläche in der Nähe des Sattelpunktes flach, so liegen die Kurven für Kopplungsstärken, die nur wenig von

Eins abweichen, näher am Sattelpunkt als bei Flächen, die in der Umgebung des Sattelpunktes stärker geneigt sind (Bild 10). Kennt man also die Gestalt der Fläche, so kann man berechnen, wie sich das System verhält, wenn sich die Anfangswerte der Temperatur und der Kopplungsstärke ändern. Das ist genau die Information, die man braucht, um die Erscheinungen zu verstehen, die man am kritischen Punkt beobachtet.

Die makroskopischen Eigenschaften eines Spin-Systems – oder allgemeiner eines thermodynamischen Systems – hängen davon ab, wie stark die Temperatur vom kritischen Wert abweicht. Man führt daher eine neue Größe ein, die man als reduzierte Temperatur t bezeichnet und die definiert ist als Differenz zwischen der Temperatur T und der kritischen Temperatur T_{krit} , dividiert durch die kritische Temperatur:

$$t = (T - T_{\text{krit}})/T_{\text{krit}}$$

Man sieht aus dieser Gleichung sofort, daß die reduzierte Temperatur am kritischen Punkt den Wert Null hat. Der Nutzen der reduzierten Temperatur besteht unter anderem darin, daß alle Eigenschaften eines Systems, das sich im kritischen Zustand befindet, einer Potenz des absoluten Betrages der reduzierten Temperatur (den man durch das Symbol $|t|$ beschreibt) proportional sind. Beispielsweise gilt für die Magnetisierung M eines Ferromagneten bei der Curie-Temperatur

$$M \sim |t|^\beta,$$

für die magnetische Suszeptibilität χ (die angibt, wie sich die Magnetisierung in einem äußeren Magnetfeld ändert)

$$\chi \sim 1/|t|^\gamma$$

und für die Korrelationslänge ξ (das heißt für die maximale Reichweite der Kopplung in einem Spin-System)

$$\xi \sim 1/|t|^\nu.$$

Die ersten Versuche, das Verhalten von Systemen an einem kritischen Punkt zu beschreiben, ergaben Theorien, die man heute als Molekularfeld-Theorien bezeichnen würde. Sie machten die Annahme, daß man den Zustand eines einzelnen Teilchens in einem System aus den makroskopischen Eigenschaften des Systems ableiten könne. Man stellte sich vor, daß zu der Kraft, die an einem Gitterpunkt wirkt, alle Teilchen des Gitters beitragen, oder, anders ausgedrückt, daß die Teilchen über beliebig große Entfernungen aufeinander einwirken können.

Die Molekularfeld-Theorien sind qua-

litativ nützlich, aber ihre quantitativen Voraussagen stimmen nicht unter allen Umständen. Beispielsweise folgen aus einer solchen Theorie für die Exponenten β , γ und ν in den drei angeführten Gleichungen die Werte $1/2$, 1 und $1/2$, während sie nach Onsagers genauer Lösung des Ising-Modells $\beta = 1/8$, $\gamma = 7/4$ und $\nu = 1$ betragen (Bild 11).

Der Grund für die Ungenauigkeit der Molekularfeld-Theorien ist leicht einzusehen: Die Annahme, die Teilchen eines Systems könnten über beliebig große Entfernungen aufeinander einwirken, ist nicht einmal näherungsweise richtig. Unmittelbar benachbarte Teilchen sind bei weitem wichtiger als alle anderen. Die Renormierungsgruppen-Methode berücksichtigt diese Tatsache. Berechnet man mit ihrer Hilfe die kritischen Exponenten β , γ und ν aus der Gestalt der Parameterfläche in der Nähe des Sattelpunktes, so erhält man Ergebnisse, die mit den von Onsager errechneten auf etwa 0,2 Prozent genau übereinstimmen.

Universalität des kritischen Punktes

Für das zweidimensionale Ising-Modell gibt es Onsagers genaue Lösung. Dagegen ist für ein dreidimensionales Spin-Gitter keine exakte Lösung bekannt. Man kann die kritischen Exponenten für ein solches Gitter jedoch näherungsweise berechnen: Man bestimmt die Eigenschaften des Systems bei hohen Temperaturen mit großer Genauigkeit und schließt daraus, wie sich die Eigenschaften ändern, wenn sich die Temperatur dem kritischen Punkt nähert. So erhält man die Werte $\beta = 0,33$, $\gamma = 1,25$ und $\nu = 0,63$. Die kritischen Exponenten im dreidimensionalen Ising-Modell sind also andere als im zweidimensionalen Modell, was bedeutet, daß die Zahl der Dimensionen die Eigenschaften des Systems beeinflusst. Umso bemerkenswerter ist es, daß sie nicht von der geometrischen Struktur des Gitters abhängen. Auch beim zweidimensionalen Ising-Modell ist es gleichgültig, ob das Gitter rechteckig oder dreieckig ist. In die Praxis übertragen heißt das: Ferromagnete mit verschiedenen Kristallstrukturen zeigen bei der kritischen Temperatur das gleiche Verhalten.

Neben der Gitterstruktur gibt es andere mikroskopische Eigenschaften, die für die kritischen Exponenten ohne Bedeutung sind. Das läßt sich anschaulich begründen: Die Form des Gitters hat einen großen Einfluß auf Ereignisse von der Größenordnung des Abstandes zwischen zwei Gitterpunkten. Je größer jedoch der Maßstab wird, für den man sich interessiert, umso mehr muß dieser Einfluß abnehmen. In der Renormierungsgruppen-Methode werden Fluktuationen von der

Bild 12: Die Hypothese von der Universalität des kritischen Punktes besagt, daß sich physikalische Systeme, die der gleichen Universalitätsklasse angehören, in der Nähe des kritischen Punktes gleichartig verhalten und daß die kritischen Exponenten solcher Systeme gleiche Werte haben. Die Universalitätsklassen sind durch die Dimensionalität d des Raumes und die Dimensionalität n des Ordnungsparameters bestimmt. Für das zweidimensionale Ising-Modell ist $d = 2$ (das System existiert nur in zwei räumlichen Dimensionen) und $n = 1$ (die Spins können sich nur längs einer Achse nach oben oder nach unten orientieren). Für Ferromagnete, Flüssigkeiten, Mischungen von Flüssigkeiten und Legierungen, deren Verhalten sich mit dem dreidimensionalen Ising-Modell beschreiben läßt, ist $d = 3$ und $n = 1$. In einigen Fällen sind die Werte für d und n nicht so einfach zu interpretieren. Beispielsweise kann eine Universalitätsklasse mit $n = -2$ mathematisch sinnvoll sein, aber sie entspricht keinem bekannten physikalischen System. Die XY- und Heisenberg-Modelle entsprechen dem Ising-Modell, enthalten aber Spin-Vektoren, die nicht nur einen Freiheitsgrad, sondern zwei oder drei Freiheitsgrade haben.

Größenordnung des Gitterabstandes schon bei den ersten Transformationen „herausgemittelt“, so daß sich für Modelle mit verschiedenen Gittern schließlich dasselbe kritische Verhalten ergibt.

Man kann die Tatsache, daß die Form des Gitters keinen Einfluß auf die kritischen Exponenten hat, auch als Folge der Gestalt der Fläche im Parameterraum verstehen: Jede Gitterstruktur entspricht einem anderen Punkt im Parameterraum. Bei der kritischen Temperatur wird jedes Gitter durch einen Punkt auf der Gratlinie dargestellt, und nach mehreren Transformationen streben diese Punkte zum Sattelpunkt.

Die Vorstellung, daß einige Variable für die kritischen Phänomene unwichtig sind, gilt nicht nur für Ferromagnete. Eine Flüssigkeit am kritischen Punkt verhält sich ähnlich wie ein Ferromagnet bei der Curie-Temperatur. Der Magnetisierung, die gleich der Differenz zwischen den nach oben und den nach unten weisenden Spins ist, entspricht in der Flüssigkeit eine Dichtedifferenz: Der Unterschied zwischen den Dichten der flüssigen und der gasförmigen Phase. Wie die Magnetisierung, die oberhalb der Curie-Temperatur verschwindet, erreicht die Dichtedifferenz am kritischen Punkt der Flüssigkeit den Wert Null.

Der Suszeptibilität des Ferromagneten, die angibt, wie sich die Magnetisierung bei kleinen Änderungen eines äußeren Magnetfeldes ändert, entspricht die Kompressibilität der Flüssigkeit, die erkennen läßt, wie kleine Änderungen des äußeren Druckes die Dichte beeinflussen. Die Kompressibilität geht wie die Suszeptibilität am kritischen Punkt gegen Unendlich.

Die Ähnlichkeit zwischen Flüssigkei-

Universalitätsklasse		Theoretisches Modell	Physikalisches System	Ordnungsparameter
$d = 2$	$n = 1$	zweidimensionales Ising-System	adsorbierte Schichten	Oberflächendichte
	$n = 2$	zweidimensionales XY-Modell	Filme aus flüssigem Helium-4	Amplitude der supraflüssigen Phase
	$n = 3$	zweidimensionales Heisenberg-Modell		Magnetisierung
$d > 2$	$n = \infty$	Kugelmodell	keines	
$d = 3$	$n = 0$	Modell disjunkter Zufallswege	langkettige Makromoleküle	Abstand zwischen den Enden der Molekülketten
	$n = 1$	dreidimensionales Ising-Modell	einachsige Ferromagnete	Magnetisierung
			Flüssigkeiten am kritischen Punkt	Differenz der Dichten beider Phasen
			Flüssigkeitsmischungen am Mischungspunkt	Differenz der Konzentrationen
			Legierung am Entmischungspunkt	Differenz der Konzentrationen
	$n = 2$	dreidimensionales XY-Modell	ebener Ferromagnet	Magnetisierung
			Helium-4 am λ -Punkt	Amplitude der supraflüssigen Phase
	$n = 3$	dreidimensionales Heisenberg-Modell	isotrope Ferromagnete	Magnetisierung
$d \leq 4$	$n = -2$		keines	
	$n = 32$	Quantenchromodynamik	Quarks in Protonen und Neutronen	

ten und Ferromagneten im kritischen Zustand ist ein Beispiel für die Hypothese von der Universalität des kritischen Punktes. Danach hängt das kritische Verhalten der meisten Systeme nur von zwei Größen ab: Von der Dimensionalität d des Raumes und von der Dimensionalität n des Ordnungsparameters. Als Ordnungsparameter bezeichnet man eine physikalische Größe, die – wie die Magnetisierung oder die Dichtedifferenz – oberhalb eines kritischen Punktes Null wird. Alle Systeme mit gleichen Werten für d und n haben die gleiche Fläche im Parameterraum und damit die gleichen kritischen Exponenten. Sie bilden eine Klasse von Systemen, die Universalitätsklasse (Bild 12).

Die Dimensionalität des Raumes ist gewöhnlich leicht zu bestimmen. Dagegen bedarf die Dimensionalität des Ordnungsparameters einer Erklärung. Wir geben sie am Beispiel der Magnetisierung. Die Dimensionalität n dieses Ordnungsparameters ist gleich der Zahl der Komponenten, die man braucht, um die Richtung eines Spin-Vektors anzugeben. Im Ising-Modell ist $n = 1$, denn der Spin kann nur längs einer Achse nach oben oder nach unten weisen. Um die Richtung eines Spin-Vektors zu charakterisieren, der sich in einer Ebene frei bewegen kann, braucht man zwei Komponenten. Gewöhnlich wählt man Abschnitte auf den beiden Achsen, die die Ebene

aufspannen. Entsprechend braucht man für einen im dreidimensionalen Raum frei beweglichen Vektor drei Komponenten.

Für das dreidimensionale Ising-Modell ist also $d = 3$ und $n = 1$ (auch im dreidimensionalen Ising-Modell können sich die Spins nur längs einer Achse orientieren). Flüssigkeiten gehören zur selben Universalitätsklasse, denn sie existieren im dreidimensionalen Raum, und der Ordnungsparameter, der der Magnetisierung entspricht, – die Dichtedifferenz zwischen der flüssigen und der gasförmigen Phase – kann nur einen Wert annehmen. Gleiches gilt für ein Gemisch zweier Flüssigkeiten. Beispielsweise befindet sich ein Gemisch aus Öl und Wasser am Mischungspunkt in einem kritischen Zustand. Der Mischungspunkt ist die Temperatur, bei der die beiden Flüssigkeiten vollständig mischbar werden. Kühlt man die Mischung ab, so trennt sie sich in zwei Phasen. Der Ordnungsparameter ist das Mischungsverhältnis der beiden Phasen. Es läßt sich durch eine Zahl ausdrücken, das heißt n ist Eins.

Messing besteht bei tiefer Temperatur aus einer geordneten Phase, in der Atome der Metalle Kupfer und Zink in einem Gitter regelmäßig angeordnet sind. Beim Erwärmen geht die regelmäßige Anordnung allmählich verloren. Als Ordnungsparameter dieses Systems kann

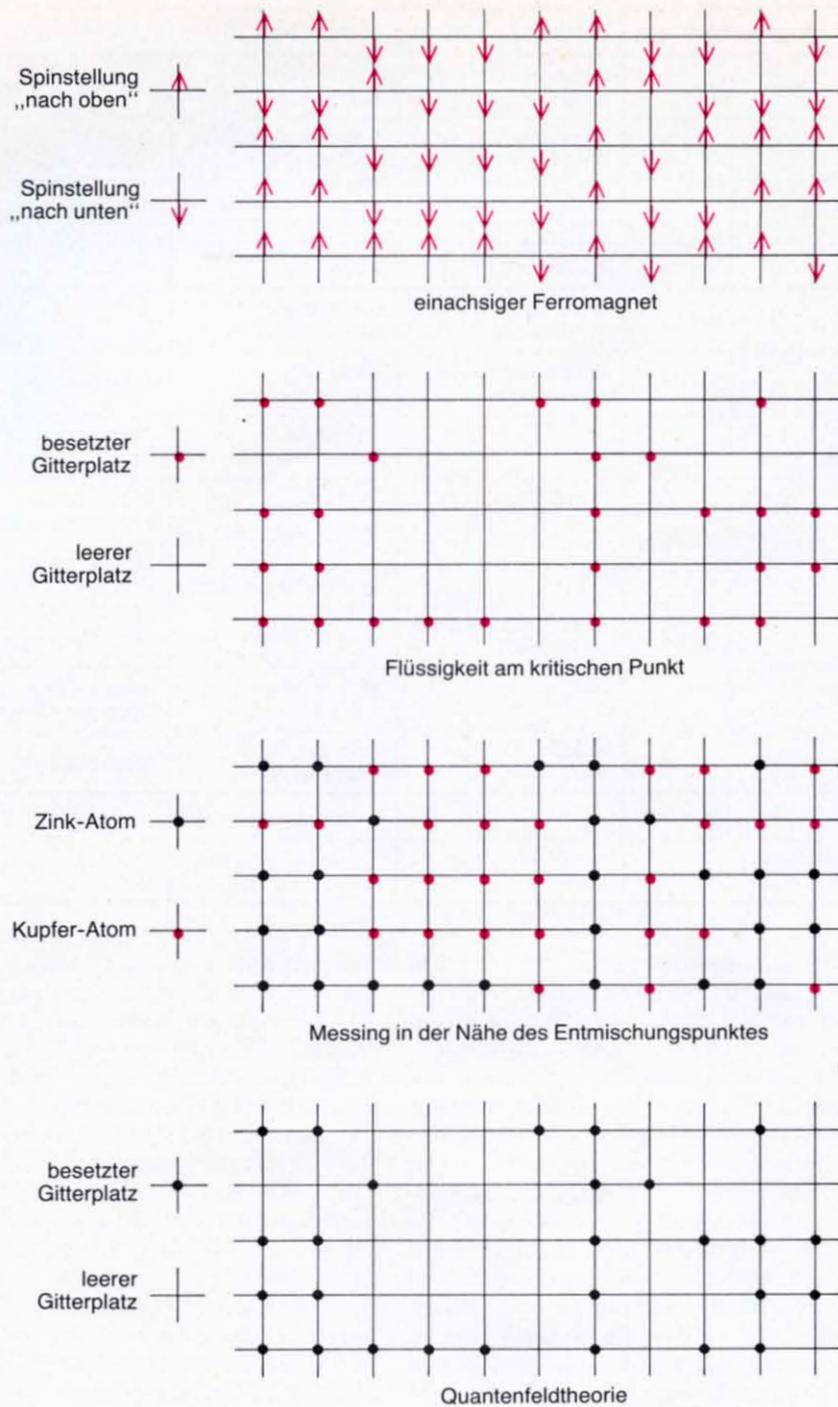


Bild 13: Das Gitter des Ising-Modells eignet sich nicht nur zur Beschreibung ferromagnetischer Stoffe (oberstes Diagramm). Es läßt sich auch auf Flüssigkeiten in der Nähe des kritischen Punktes anwenden (zweites Diagramm von oben). Ein Gitterpunkt ist dann entweder von einem Flüssigkeitsteilchen (farbiger Punkt) besetzt oder leer, so daß Dichte-Fluktuationen erkennbar werden. Das dritte Diagramm von oben zeigt die Anwendung des Ising-Modells auf eine Legierung (Messing) in der Nähe des Entmischungspunktes. In Quantenfeldtheorien, die die Wechselwirkungen zwischen Elementarteilchen beschreiben, spielen Fluktuationen eine Rolle, die zur spontanen Erzeugung oder Vernichtung von Teilchen und Antiteilchen führen. Eine einfache Theorie dieser Art läßt sich so formulieren, daß Teilchen und Antiteilchen immer nur an Gitterpunkten entstehen oder verschwinden können.

eine zeitliche Dimension. Ein Ordnungsparameter unendlicher Dimensionalität ($n = \text{Unendlich}$) tritt in einem als Kugelmodell bezeichneten theoretischen Spingitter auf, in dem jeder Spin eine beliebige Größe haben darf und nur die Summe der Spins begrenzt ist. Ein sehr langes, kettenförmiges Molekül (ein Makromolekül) hat normalerweise die Gestalt eines regellosen, dreidimensionalen Knäuels. Es gehört zu einer Universalitätsklasse, für die $n = 0$ ist. Schließlich gibt es theoretische Systeme, die zu $n = -2$ führen, wengleich unklar ist, was das bedeutet.

Die einzigen Werte von d und n , deren physikalische Bedeutung unmittelbar verständlich ist, sind positive ganzzahlige Werte. Das ist besonders im Fall von d offensichtlich, denn einen Raum nicht-ganzzahliger Dimensionalität kann man sich nicht vorstellen. Gleichwohl können d und n in Rechnungen nach der Methode der Renormierungsgruppe als Variable auftreten, die sich kontinuierlich ändern. In Bild 14 sind die Werte der kritischen Exponenten als Funktionen von d und n aufgetragen. Wie man sieht, sind die Exponenten nicht nur für ganzzahlige Werte von d und n definiert, sondern auch für alle Zwischenwerte.

Das Bild zeigt auch, daß die kritischen Exponenten ab $d = 4$ die Werte haben, die man aufgrund der Molekularfeld-Theorien errechnet. Diese Beobachtung hat zu einer wichtigen Methode für Renormierungsgruppen-Rechnungen geführt: Man gibt die Dimensionalität des Raumes als $d = 4 - \epsilon$ an. Die kritischen Exponenten ergeben sich dann als Summen unendlicher Reihen, deren Glieder Potenzen von ϵ mit wachsenden Exponenten enthalten. Ist ϵ kleiner als Eins, so sind Potenzen von ϵ mit großen Exponenten so klein, daß man sie vernachlässigen kann und schon durch Addieren der ersten Glieder der Reihe genügend genaue Werte erhält. Dieses als Epsilon-Entwicklung bezeichnete Rechenverfah-

der Konzentrationsunterschied der beiden Atomarten dienen, und wieder ist n gleich 1. Für alle genannten Systeme erwartet man also die gleichen kritischen Exponenten wie beim dreidimensionalen Ising-Modell (Bild 13). Für einige Ferromagnete, die sich nur längs einer Achse leicht magnetisieren lassen, konnte experimentell gezeigt werden, daß diese Erwartung erfüllt ist.

Das zweidimensionale Ising-Modell $d = 2, n = 1$ charakterisiert die Universalitätsklasse solcher Systeme, die auf den zweidimensionalen Raum beschränkt sind. Hierher gehören beispielsweise dünne Flüssigkeitsfilme oder Gase, die an einer festen Oberfläche adsorbiert

sind. Die meisten Ferromagnete fallen in die Klasse mit $d = 3$ und $n = 3$, denn ihre Gitter sind dreidimensional, und jeder Spin kann in jede Richtung des Raumes zeigen. Beschränkt man die Spinrichtungen auf eine Ebene, so gehört das System zur Klasse mit $d = 3$ und $n = 2$, in die auch Helium-4 beim Übergang vom flüssigen in den suprafluiden Zustand sowie Metalle beim Übergang zur Supraleitung fallen.

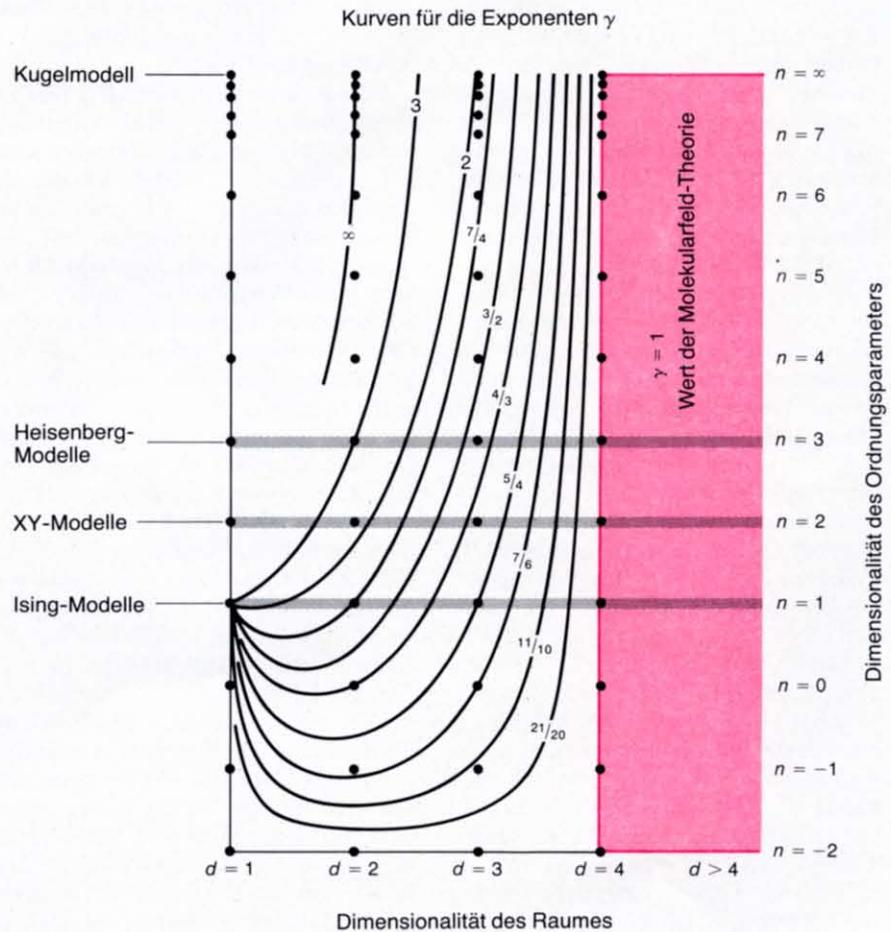
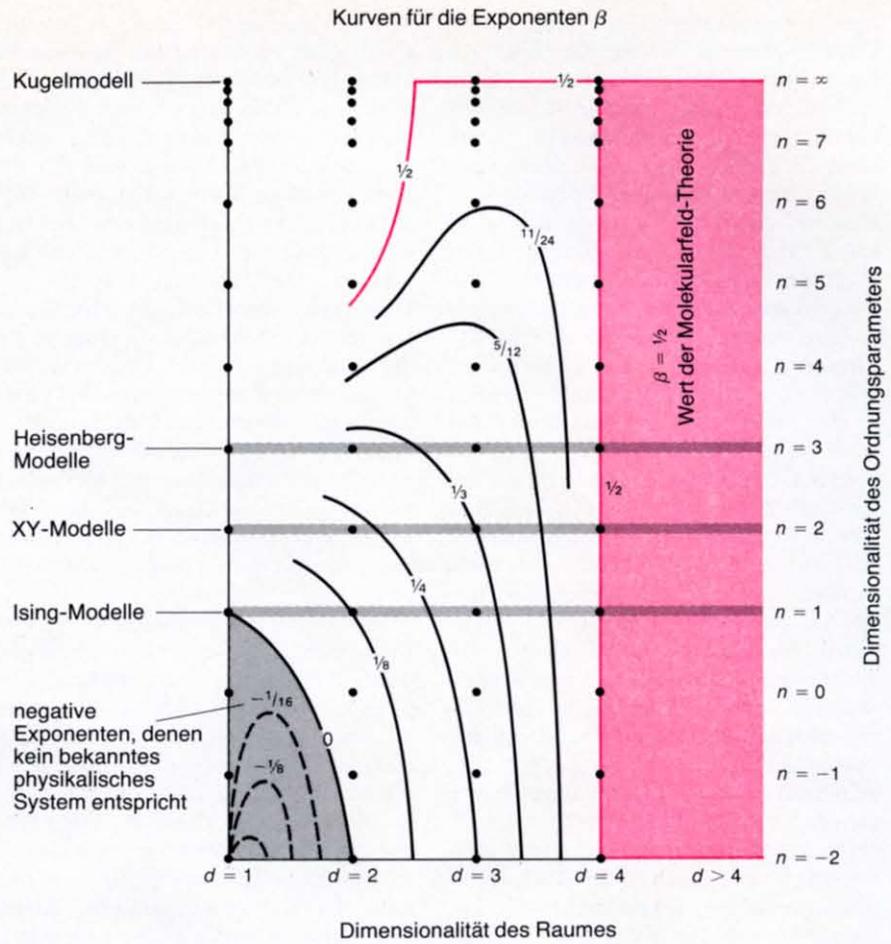
Andere Universalitätsklassen haben Werte für d und n , die nicht so einfach zu interpretieren sind (Bild 12). Der vierdimensionale Raum ($d = 4$) ist in der Physik der Elementarteilchen von Interesse. Er hat drei räumliche Dimensionen und

ren ist weniger anschaulich als die Block-Spin-Methode, aber es ist leistungsfähiger. Mit ihm läßt sich ermitteln, wie die mit einer Theorie des gemittelten Feldes errechneten Werte korrigiert werden müssen, um den tatsächlichen Verhältnissen zu entsprechen.

Die Beobachtung, daß sich die Werte der kritischen Exponenten mit steigendem d den Werten nähern, zu denen man mit einer Molekularfeld-Theorie gelangt, kommt nicht gänzlich unerwartet. Den Molekularfeld-Theorien liegt die Annahme zugrunde, daß die in einem Gitterpunkt wirkende Kraft von den Verhältnissen an vielen anderen Gitterpunkten abhängt. Mit zunehmender Dimensionalität d wächst die Zahl der unmittelbaren Nachbarn eines Gitterpunktes. In einem eindimensionalen Gitter hat jeder Gitterpunkt zwei nächste Nachbarn, in einem zweidimensionalen Gitter vier, in einem dreidimensionalen Gitter sechs und in einem vierdimensionalen Gitter acht. Mit steigender Dimensionalität kommt ein System also dem Zustand immer näher, den die Molekularfeld-Theorien voraussetzen. Gleichwohl bleibt rätselhaft, warum die kritischen Exponenten der verschiedenen Theorien ausgerechnet ab $d = 4$ übereinstimmen.

Die Renormierungsgruppen-Methode läßt sich nicht nur auf kritische Phänomene anwenden und wurde zunächst auch gar nicht dafür entwickelt. Ein als Renormierung bezeichnetes Verfahren tauchte zuerst in den vierziger Jahren im Rahmen der Quantenelektrodynamik auf, die die Wechselwirkung zwischen atomaren und subatomaren elektrisch geladenen Teilchen und einem elektromagnetischen Feld beschreibt. Nach dieser Theorie hat das Elektron eine unendliche Ladung, was im Widerspruch zu den Messungen steht. Durch Renormierung ließ sich der Widerspruch beseitigen: Das Elektron wird als punktförmiges Teilchen betrachtet, dessen „nackte“ Ladung unendlich ist. Diese Ladung in-

Bild 14: Magnetisierung und Suszeptibilität eines Ferromagneten hängen mit unterschiedlichen Exponenten (β und γ) von der reduzierten Temperatur t ab. Im zweidimensionalen Ising-Modell ($d = 2, n = 1$) haben diese Exponenten die Werte $1/8$ und $7/4$. Die Diagramme zeigen das, denn die schwarzen Punkte bei $d = 2, n = 1$ liegen auf Kurven, die mit diesen Brüchen markiert sind. Für andere Modelle (andere Kombinationen von d und n) gelten andere Werte der kritischen Exponenten. Beispielsweise hat γ (unteres Diagramm) für das zweidimensionale Heisenberg-Modell ($d = 2, n = 3$) den Wert 3, während sein Wert für das dreidimensionale Heisenberg-Modell ($d = 3, n = 3$) zwischen $3/2$ und $4/3$ liegt. Ab $d = 4$ haben die beiden kritischen Exponenten die Werte, die von den Molekularfeld-Theorien vorausgesagt werden (farbige Flächen).



duziert im umgebenden Vakuum eine entgegengesetzte Ladung, die die nackte Ladung so weit kompensiert, daß sich die Ladung ergibt, die man experimentell beobachtet. Wir wollen uns eine Sonde vorstellen, mit der sich die Ladung auch noch in beliebig kleinen Abständen vom Elektron messen läßt. In großem Abstand fände man damit den endlichen Wert, der sich als Differenz zwischen der nackten und der induzierten Ladung ergibt. Je weiter sich die Sonde dem punktförmigen Elektron nähert, umso größer würde die Ladung, die die Sonde „sieht“. Beim Abstand Null schließlich wäre die Ladung unendlich.

In den fünfziger Jahren schlugen Murray Gell-Mann und Francis E. Low eine Verallgemeinerung der Renormierung vor und entwickelten damit die erste Formulierung der Renormierungsgruppe. Sie konstruierten einen mathematischen Ausdruck, der die Größe der Elektronenladung in einem bestimmten Abstand vom Elektron angibt, und untersuchten, wie sich dieser Ausdruck ändert, wenn man den Abstand gegen Null gehen läßt. Dabei kommt man immer zum gleichen Ergebnis, einerlei von welchem Abstand man ausgeht. Es gibt also unendlich viele gleichwertige Renormierungsprozeduren, die zusammen die Renormierungsgruppe bilden.

Das Renormierungsverfahren von Gell-Mann und Low war allerdings auf Probleme beschränkt, die auch mit Hilfe der Störungsrechnung zu lösen sind. Außerdem ließ es nur eine Variable – die Ladung – zu. Die heutige Form der Renormierungsgruppe, die ich 1971 einführte, gestattet die Behandlung einer wesentlich größeren Zahl physikalischer Probleme, und sie gibt dem zunächst nur formalen Renormierungsverfahren eine physikalische Bedeutung.

In den letzten Jahren habe ich versucht, die allgemeinere Form der Renormierungsgruppe auf ein Problem der Elementarteilchenphysik anzuwenden: Auf die Wechselwirkungen zwischen den Quarks, aus denen sich vermutlich Protonen, Neutronen und viele andere Elementarteilchen zusammensetzen.

Die Quarks verhalten sich in vieler Hinsicht ähnlich wie elektrisch geladene Teilchen: Sie besitzen eine Eigenschaft, die der elektrischen Ladung entspricht und als Farbe oder Farbladung bezeichnet wird (siehe „Sind Quarks in Blasen eingeschlossen?“ in Spektrum der Wissenschaft, September 1979). Ähnlich wie eine elektrische Ladung erzeugen Farbladungen ein Feld. Könnte man mit einer Sonde die Farbladung eines Quarks in verschiedenen Abständen vom Quark messen, so würde man finden, daß sie sich – anders als die elektrische Ladung des Elektrons – mit kürzer werdendem

Abstand verringert. Daher zeigen zwei Quarks bei sehr kleinem Abstand fast keine Wechselwirkung: Die Kopplung zwischen ihnen ist schwach. Entfernt man die Quarks voneinander, so wächst die effektive Farbladung, und die Bindung zwischen ihnen wird fester. Während ein Elektron im umgebenden Raum eine Ladung induziert, die die „nackte“ Ladung kompensiert, scheint beim Quark die induzierte Ladung die Quarkladung zu erhöhen. Man vermutet, daß die Kopplung zweier Quarks nahezu unendlich wird, wenn ihr Abstand größer ist als der Durchmesser eines Protons, der ungefähr 10^{-13} Zentimeter beträgt. Es wäre dann unendlich viel Energie erforderlich, um ein Quark aus einem Proton zu lösen, das heißt, das Quark müßte für immer im Proton eingeschlossen bleiben.

Die Bindung zwischen zwei Quarks kann man mit Kraftlinien anschaulich darstellen. Die Kopplungsstärke ist dann proportional zur Anzahl der Kraftlinien in einem Raumgebiet. Entfernt man elektrische Ladungen voneinander, so nimmt die Dichte der Linien mit dem Quadrat der Entfernung ab. Die Dichte der Kraftlinien zwischen zwei Quarks scheint dagegen unabhängig vom Abstand der Teilchen zu sein. Die Kraftlinien verhalten sich, als wären sie in einer dünnen Röhre eingeschlossen. Auch dieses Modell erklärt, warum es bisher nicht gelungen ist, Quarks einzeln zu beobachten, aber es bietet gleichfalls nur eine qualitative Erklärung.

Da wir es hier mit einer Kraft zu tun haben, deren größte und kleinste Reichweiten sich um mehrere Größenordnungen unterscheiden, bietet sich die Behandlung dieses Problems mit der Renormierungsgruppen-Methode an. Ich habe eine Version des Problems formuliert, in der sich die Quarks an den Punkten eines vierdimensionalen Raum-Zeit-Gitters befinden und durch „Fäden“ miteinander verbunden sind. Wendet man auf dieses Gitter Renormierungsgruppen-Transformationen an, so kann man die Wechselwirkung zwischen den Quarks bei immer größeren Abständen betrachten. Die Frage ist, ob die Kraftlinien auch bei sehr großen Abständen noch in dünnen Röhren eingeschlossen bleiben. Um die Antwort zu finden, muß man Rechnungen ausführen, die die Grenze der Möglichkeiten heutiger Computer erreichen.

Viele andere Probleme lassen sich mit der Methode der Renormierungsgruppe behandeln, aber man hat sie noch nicht so formuliert, daß die Methode anwendbar wäre. Dazu gehört das Verhalten einer Flüssigkeit, die wie Wasser im Erdboden oder in einem mit Kaffeepulver gefüllten Filter durch poröses Material

sickert. Turbulenzen in Flüssigkeiten oder Gasen entziehen sich seit mehr als einem Jahrhundert der mathematischen Beschreibung. In der Atmosphäre können sie in allen Größen vom kleinen Staubwirbel bis zum Hurrikan auftreten. Ein weniger bekanntes Problem ist der nach dem japanischen Physiker Jun Kondo benannte Kondo-Effekt: Baut man in ein nichtmagnetisches Metall, beispielsweise in Kupfer, magnetische Atome ein, so sollte der elektrische Widerstand des so verunreinigten Metalls stetig abnehmen, wenn die Temperatur sinkt. Tatsächlich beobachtet man, daß der Widerstand zunächst abnimmt, von einer bestimmten Temperatur an aber wieder zunimmt, wenn man die Temperatur weiter reduziert. Diese Anomalie ist nicht von brennender Bedeutung, aber sie ließ sich mit keiner bekannten Methode erklären. Man hat es hier wieder mit einem Problem zu tun, bei dem unterschiedliche Größenordnungen eine Rolle spielen: Die Leitungselektronen im Metall besitzen Energien im Bereich einiger Elektronenvolt, aber Änderungen dieser Energie, die nur 10^{-4} Elektronenvolt ausmachen, sind noch von Bedeutung. Durch eine Renormierungsgruppen-Berechnung konnte ich die Energie der Elektronen für alle Temperaturen bis zum absoluten Nullpunkt bestimmen und den Kondo-Effekt erklären.

Andere Renormierungsgruppen-Rechnungen führten zu neuen Vorhersagen, die später experimentell bestätigt wurden. Ein Beispiel ist ein zweidimensionales Gitter ($d = 2$) von zweikomponentigen Spins ($n = 2$). Älteren Theorien zufolge ist in einem solchen System keine Phase mit Fluktuationen großen Ausmaßes möglich. Renormierungsgruppen-Rechnungen haben dagegen gezeigt, daß sich das Verhalten des Systems bei einer kritischen Temperatur ändern sollte. Tatsächlich hat man bei dünnen Filmen von supraflüssigem Helium-4, die in die Universalitätsklasse mit $d = 2$ und $n = 2$ gehören, bei einer kritischen Temperatur eine sprunghafte Änderung der Dichte beobachtet.

In Anbetracht der vielen Arbeit, die in die Renormierungsgruppe investiert worden ist, mögen die bisher erzielten Resultate gering erscheinen. Man darf aber nicht vergessen, daß man sich hier mit Problemen beschäftigt, die zu den schwierigsten in der Physik gehören, so daß rasche Erfolge in keinem Fall zu erwarten sind. Immerhin ist es ein bedeutender Fortschritt, daß es mit der Renormierungsgruppen-Methode jetzt überhaupt ein Verfahren gibt, mit dem sich diese Probleme angehen lassen.

*Übersetzt von Ingrid und Iring Bender.
Aus: Scientific American, August 1979.*