Die Struktur des Gregorianischen Kalenders

anhand einer Verallgemeinerung der Gaußschen Osterformel dargestellt

Von Heiner Lichtenberg, Leonhard Gerhards, Alfons Graßl und Heinz Zemanek

In diesem Aufsatz wird dargelegt, was am Gregorianischen Kalender zeitlos und was zeitabhängig ist. Dies wird durch Verallgemeinerung der Gaußschen Osterformel erreicht. Erst eine verallgemeinerte Gaußsche Osterformel läßt beides, den invarianten Kern und die Flexibilität dieses vorzüglichen und mit Recht heute weltweit verbreiteten Zeitrechnungssystems, klar zum Vorschein kommen.

Pater Christophorus Clavius (1537 bis 1612) (Abb. 1 [3]), der herausragende Mathematiker des Jesuitenordens zu Beginn der Neuzeit, nannte sowohl in seinem grundlegenden Buch zur Kalenderreform [2] wie auch schon früher den Gregorianischen Kalender ein »calendarium perpetuum«, einen immerwährenden Kalender. Diese Bezeichnung fand sofortigen und energischen Widerspruch [11]. – Ist dieser Ausdruck eine vielleicht zeitübliche Übertreibung, eher zu verstehen als Werbespruch im geistigen und politischen Ringen um die Durchsetzung des reformierten Kalenders? – Sollte man den damaligen Kampf heute eher unter dem Aspekt der Gegenreformation sehen und als geschichtlich erledigt betrachten? – Hätte man nicht schon damals wissen können und müssen,

Abb. 1: Christophorus Clavius nach F. Villamena (1606).

daß früher oder später dauerhafte Abweichungen auch zwischen reformierten Kalenderzählungen und den Himmelserscheinungen auftreten müssen? – Wieso eine derartig extreme Bezeichnung? – Wir wollen hier zeigen, daß es sich tatsächlich nicht um eine Übertreibung handelt, sondern daß dies ein Ehrentitel ist, den der Gregorianische Kalender mit vollem Recht trägt. Clavius hat mit dieser Bezeichnung treffend etwas durchaus Richtiges bezeichnet, nämlich die von vorneherein geplante *Anpaßbarkeit an veränderte himmelsmechanische Bewegungsverhältnisse*, die diesem von Aloysius Lilius (gestorben 1576) (Abb. 2 [3]) erdachten und von ihm selbst ausgearbeiteten System der Zeitrechnung innewohnt.

Wir werden hier die *Anpaßbarkeit des Gregorianischen Kalenders an veränderte Bewegungsverhältnisse in der mathematischen Sprache unserer Zeit darstellen*. Damit werden wir einen Beitrag zur Würdigung des Kalenderalgorithmus geben, der in dieser Art noch ausstand, trotz der Würdigung, die der Kalenderalgorithmus 1982 anläßlich der 400-Jahr-Feier seiner Verkündung und Einführung durch Papst Gregor XIII (Abb. 3 [3]) von zuständiger Stelle gefunden hatte [3].

Vorgehensweise

Nachdem die globale Struktur des Gregorianischen Kalenders in [10] klargestellt worden war, d. h., nachdem die entscheidenden, die sogenannten charakteristischen Parameter des Kalenders herauspräpariert worden waren, mittels derer man auf unabsehbar lange Zeit das Geschehen am Himmel und die Kalenderzählungen auf Erden synchron halten kann, bleibt jetzt die Aufgabe zu lösen, die lokale Kalenderstruktur aus der globalen herzuleiten, d. h., den Weg zu zeigen, wie man nach einer Änderung der charakteristischen Parameter die neu angeordneten Feste und Zeiten tatsächlich berechnen kann. Der Lösung dieser von den Chronologen bisher beiseite gelassenen Aufgabe – sei es, daß sie als nicht akut, sei es, daß sie als zu schwer empfunden wurde – wollen wir den vorliegenden Aufsatz widmen. Wir werden die Lösung durch Umbau und Verallgemeinerung der Gaußschen Osterformel erhalten.

Die Gaußsche Osterformel

Die Gaußsche Osterformel liefert für jedes Jahr X des Gregorianischen Kalenders das Datum des Ostersonntags. Dazu hat man der Reihe nach die folgenden Größen zu berechnen (INT(r) bezeichnet dabei die größte in der rationalen Zahl r enthaltene ganze Zahl und MOD(g,n) den kleinsten nichtnegativen Rest, den die ganze Zahl g bei Teilung durch die natürliche Zahl n übrig läßt):

1. $K = \mathrm{INT}(X/100)$
2. $P = \mathrm{INT}((8K + 13)/25)$
3. $Q = \mathrm{INT}(K/4)$
4. $M = \mathrm{MOD}(15 + K - P - Q, 30)$
5. $N = \mathrm{MOD}(4 + K - Q, 7)$
6. $A = \mathrm{MOD}(X, 19)$
7. $B = \mathrm{MOD}(X, 4)$
8. $C = \mathrm{MOD}(X, 7)$
9. $D = \mathrm{MOD}(19A + M, 30)$
10. $E = \mathrm{MOD}(2B + 4C + 6D + N, 7)$
11. Der Ostersonntag des Jahres X fällt auf den $(22 + D + E)$ten März, wenn $D + E < 10$ ist, ansonsten auf den $(D + E - 9)$ten April.

Abb. 2: Aloysius Lilius nach C. Biendi (Anfang des 19. Jahrhunderts).

12. *Ausnahmen:*
   a.) Wenn D = 28 und E = 6 und MOD(11 M + 11,30) < 19, wird der 18. April der Ostersonntag (nicht der 25.).
   b.) Wenn D = 29 und E = 6, wird der 19. April der Ostersonntag (nicht der 26.).

Abb. 3: Papst Gregor XIII.

Der artifizielle Charakter der Gaußschen Osterformel

So bewundernswert diese knappe Zusammenfassung des Kalenderalgorithmus auch ist – Carl Friedrich Gauß (1777 bis 1855, Abb. 4) hat die nach ihm benannte Formel im Jahre 1800, also mit nur 23 Jahren, veröffentlicht [6], fast 200 Jahre nach dem Erscheinen des umfangreichen grundlegenden Buches von Clavius –, so muß man doch einräumen, daß die Formel einen in gewisser Hinsicht artifiziellen Charakter hat. D. h., sie ist alles andere als unmittelbar einfühlbar, geschweige denn leicht zu verstehen. Auch haben nicht alle ihre Zwischengrößen zwanglos interpretierbare kalendarische Bedeutungen, wenn auch bei einigen der kalendarische Bezug gegeben ist. So kann man aus den Bestimmungen 1, 3, 5 und 7 zwar die Schaltjahr-Regelung und damit den Sonnenbezug des Gregorianischen Kalenders erahnen, aber übersichtlich ist diese Notation nicht. Die Bestimmung 6 läßt durch die Zahl 19 auf den Metonischen Zyklus (19 Sonnenjahre = 235 Mondmonate) und damit auf den Mondbezug des Gregorianischen Kalenders schließen. Insgesamt muß man jedoch – bildlich gesprochen – die Formel leider »einen Tunnel« nennen; man kommt ans rechte Ziel, aber man weiß nicht genau, wie und warum. Dieser Umstand sowie ein anfänglicher Fehler, den Gauß erst 16 Jahre nach der Erstveröffentlichung der Formel korrigiert hat [7], mögen wohl bewirkt haben, daß die Gaußsche Osterformel auch heute noch mit einer gewissen Zurückhaltung aufgenommen wird, ja, daß sie gelegentlich sogar für falsch erklärt wird [12], als ob es die Korrektur nicht gegeben hätte. Letzteres hieße jedoch, das Kind mit dem Bade ausschütten, denn die Gaußsche Osterformel ist in korrigierter Form ein vollgültiger Repräsentant aus der (Äquivalenz-) Klasse der Kalenderalgorithmen, in der neben dem Clavius-Algorithmus selbst und der Gaußschen Osterformel auch noch andere, hier nicht näher betrachtete Formeln liegen (z. B. die in [12] angegebene Formel).

Die Formel wird überdies dadurch kompliziert, daß die Größe E, die die Entfernung des Ostersonntags von der Ostergrenze regelt – das ist der dem Ostersonntag unmittelbar vorhergehende Vollmond-Termin –, durch einen undurchsichtigen Ausdruck beschrieben wird, der sich einem intuitiven Verständnis völlig entzieht.

Die Schaltvorschrift zur Abbildung der synodischen Monatslänge geht dagegen auf relativ klare Weise in die Gaußsche Osterformel ein. Die Größe M und ihre Parameter K, P und Q beschreiben das säkulare Wegdriften der Ostergrenze zu immer späteren Terminen hin, wie es aus dem kleinen Überschuß resultiert, den die 235 Mondumläufe über die 19 Sonnenumläufe im Metonischen Zyklus haben, und wie es der Kalenderalgorithmus durch die Sonnen- bzw. Mondangleichung seines Mondzeigers, der sogenannten Epakte, darzustellen sucht.

Die Ostergrenze ist aus der Gaußschen Osterformel auf einfache Weise ablesbar: Es ist die Größe 21 + D, wie Gauß angibt [6]. Der Ausdruck für D besagt anschaulich, daß die Ostergrenze beim Übergang von einem zum nächsten Jahr entweder um 19 Tage nach vorne springt oder um 11 Tage zurückfällt. Der Ostervollmond fällt demnach auf den (21 + D)ten März, wenn D < 11, ansonsten auf den (D – 10)ten April. Hierauf werden wir uns beim folgenden Umbau der Gaußschen Osterformel wesentlich stützen, obwohl diese Beziehung nicht durchgängig gültig ist. Ein 17. bzw. 18. April – dieser ist der äußerste Termin nach kirchlichem Osteralgorithmus – wird vom Gaußschen Ausdruck 21 + D gelegentlich, aber nicht selten, um 1 Tag überschritten (nächstgelegene Beispiele: die Jahre 1992 bzw. 2000). Wir werden uns mit dieser Erscheinung, die man einen »internen Fehler« der Gaußschen Osterformel nennen könnte und die zu den unschönen Ausnahmeregelungen führt, später noch genauer befassen.

Abb. 4: Carl Friedrich Gauß nach C. A. Schwarz (1803). (Die treffende Ähnlichkeit wurde von Olbers in einem Brief an Gauß bezeugt.)

Umbau der Gaußschen Osterformel

Es soll jetzt der Umbau der Gaußschen Osterformel durch Bearbeitung ihrer problematischsten Größe, nämlich der Größe E, angegangen werden. Statt E führen wir die Größe OE = E + 1 (Osterentfernung) ein. OE ist nach dieser Erklärung die Entfernung in Tagen, die der Ostersonntag von der Ostergrenze hat, mithin eine natürliche Zahl zwischen 1 und 7, die Grenzen eingeschlossen. Zur Berechnung von OE führen wir die kalendarisch leicht interpretierbare Hilfsgröße SZ ein, die sogenannte Sonntagszahl. SZ ist das Datum des ersten Sonntags im März des Jahres X, also ebenfalls eine natürliche Zahl zwischen 1 und 7, die Grenzen eingeschlossen. Das Osterdatum ergibt sich nun:

– einerseits aus SZ, vermehrt um ein Vielfaches v ($\geq$ 3) von 7, da zwischen den beiden Sonntagen, dem ersten Sonntag im März und dem Ostersonntag, eine volle Zahl von (mindestens drei) Wochen liegt;

– andererseits aus der Ostergrenze OG (meist 21 + D), vermehrt um die gesuchte Osterentfernung OE.

Die folgende Skizze (Abb. 5)[1] soll diese Situation veranschaulichen:

Der Bezug zu den Osterterminen im April ist natürlich ohne weiteres gegeben; man braucht den April nur als den um die Tage 32 bis 61 verlängerten März aufzufassen.

In Gleichungsform gebracht heißt dies:

$$SZ + v\,7 = OG + OE.$$

[1] Die elektronische Erstellung dieser Skizze verdanken wir Herrn Martin Derendorf, Köln.

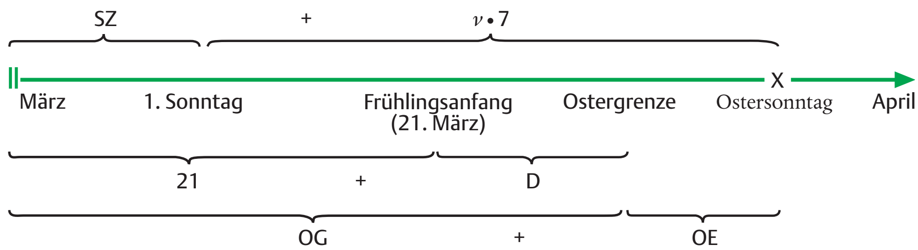

Abb. 5: Zusammenhang zwischen Sonntagszahl SZ, Ostergrenze OG (meist 21 + D) und Osterentfernung OE.

Nimmt man diese Gleichung nur hinsichtlich des Reste-Verhaltens bezüglich 7 der in ihr gebundenen Größen, so ergibt sich weiter:

$$\mathrm{SZ} = \mathrm{OG} + \mathrm{OE} \text{ modulo } 7$$

oder

$$\begin{aligned}\mathrm{OE} &= \mathrm{SZ} - \mathrm{OG}\\ &= -(\mathrm{OG} - \mathrm{SZ}) \text{ modulo } 7.\end{aligned}$$

Da OE eine natürliche Zahl zwischen 1 und 7 ist, ergibt sich aus dieser letzten Kongruenz wieder schärfer die Gleichung:

$$\mathrm{OE} = 7 - \mathrm{MOD}(\mathrm{OG} - \mathrm{SZ}, 7).$$

Die vorstehende Formel für OE ist allerdings nur dann nützlich, wenn sich SZ, das Datum des ersten Sonntags im März, als Funktion von X bestimmen läßt und wenn die Ostergrenze OG gegenüber dem Gaußschen Ausdruck präzisiert werden kann. Beides soll nun geschehen:

Im Jahre 1583 fiel der erste Sonntag im März auf den 6. März, wie man durch einfaches Auszählen bestätigen kann, wenn man von der bekannten Tatsache ausgeht, daß bei der Reform im Jahre 1582 auf Donnerstag, den 4. Oktober, sofort Freitag, der 15. Oktober, folgte [13]. Also gilt:

$$\mathrm{SZ}(1583) = 6.$$

Folgt auf ein bestimmtes Ausgangsjahr ein Gemeinjahr, so weicht die Sonntagszahl in diesem Jahr um 1 zurück; folgt ein Schaltjahr, weicht sie um 2 zurück. Für ein beliebiges Jahr X nach 1583 weicht also die Sonntagszahl um so viele Einheiten zurück, wie es der Summe aus den seit 1583 vergangenen Jahren und Schaltjahren modulo 7 entspricht. Wir können daher setzen:

SZ(1583) – SZ(X)
= Zahl der Jahre seit 1583 + Zahl der Schaltjahre seit 1583 modulo 7.

Die Zahl der Jahre seit 1583 ist sehr einfach X – 1583.

Zur Berechnung der Zahl der Schaltjahre seit 1583 bilden wir – modulo einer beliebigen Konstante – zunächst folgenden Ausdruck:

$$\mathrm{INT}(X/4) - \mathrm{INT}(X/100) + \mathrm{INT}(X/400);$$

er stellt die bekannte Schaltregel für den Gregorianischen Kalender mathematisch dar: Alle 4 Jahre wird geschaltet, alle vollen 100 Jahre nicht, volle 400 Jahre jedoch wieder. Damit sich später eine möglichst einfache Notation ergibt, spezialisieren wir die Konstante jetzt zu 2 und nennen den Ausdruck dann:

$$\begin{aligned}\mathrm{GS}(X) = 2 &+ \mathrm{INT}(X/4) - \mathrm{INT}(X/100)\\ &+ \mathrm{INT}(X/400).\end{aligned}$$

GS(X) liefert eine fiktive, kumulierte Zahl von Schalttagen, so, als ob die Schaltregel etwa schon seit dem Jahre X = 6 v. Chr. gültig gewesen wäre. Die Zahl der Schalttage von 1583 bis zum Jahr X ist dann natürlich GS(X) – GS(1583) = GS(X) – 385.

Setzen wir die Zwischenergebnisse in den anfänglichen Ausdruck für SZ(1583) – SZ(X) ein, so haben wir:

$$\begin{aligned}&\mathrm{SZ}(1583) - \mathrm{SZ}(X)\\ &= X - 1583 + \mathrm{GS}(X) - 385\\ &= X + \mathrm{GS}(X) - 1968 \text{ modulo } 7,\end{aligned}$$

und weiter, wenn man noch SZ(1583) = 6 berücksichtigt:

$$\begin{aligned}\mathrm{SZ}(X) &= 1974 - X - \mathrm{GS}(X)\\ &= -(X + \mathrm{GS}(X)) \text{ modulo } 7,\end{aligned}$$

woraus unter Beachtung von $1 \leq \mathrm{SZ}(X) \leq 7$ – jetzt wieder scharf – folgt:

$$\mathrm{SZ}(X) = 7 - \mathrm{MOD}(X + \mathrm{GS}(X), 7).$$

Diese Bestimmung für das Datum des ersten Sonntages im März des Jahres X ist allgemeingültig; sie gilt vom Beginn des Gregorianischen Kalenders an so lange, wie man dessen Schaltregel für die Jahreslänge nicht ändert.

Nun zur Rektifizierung der Ostergrenze: Die etwas unhandliche Prämisse in der Ausnahme 12a seiner Formel hat Gauß später durch eine handlichere Formulierung ersetzt [8], nämlich durch D = 28 und E = 6 und A > 10. Diese Bemerkung wird gleich von Nutzen sein.

Wir passen den Ausdruck 21 + D an die Ostergrenze OG nach kirchlichem Algorithmus an, indem wir eine geeignete Korrekturgröße R, die meist Null bleibt, nur in den wenigen Fällen des Differierens von 21 + D und OG gleich 1 wird, von 21 + D abziehen. Damit werden die vielkommentierten und irritierenden Ausnahmen aus der Gaußschen Osterformel verschwinden. Die Größe

$$\begin{aligned}R = {}&\mathrm{INT}(D/29)\\ &+ (\mathrm{INT}(D/28) - \mathrm{INT}(D/29))\,\mathrm{INT}(A/11)\end{aligned}$$

hat die gewünschte Eigenschaft: In den Fällen des Differierens, nämlich wenn D = 29 bzw. D = 28 und A > 10 ist, wird sie zu 1. Für alle kleineren Werte von D, wie auch für D = 28 und A < 11, verschwindet R.

Die Größe M bei Gauß fassen wir durch Zusammensetzen ihrer Bestandteile K, P und Q bei Umbenennung von M nach GM wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\mathrm{GM}(X) = 15 &+ \mathrm{INT}(X/100) - \mathrm{INT}(X/400)\\ &- \mathrm{INT}((8\,\mathrm{INT}(X/100) + 13)/25).\end{aligned}$$

Dabei unterlassen wir die Reduktion modulo 30 – sie erfolgt im späteren Rechengang ohnehin – und zwar deswegen, um das grosso modo lineare Wachstum dieser Schaltfunktion zur Korrektur des Metonischen Zyklus' – ebenso wie das grosso modo lineare Wachsen von GS(X) – deutlich hervortreten zu lassen. In dieser Gestalt kann GM(X) analog zu GS(X) als fiktive, kumulierte Zahl von Epaktenschaltungen ab einem hypothetischen Anfangsjahr aufgefaßt werden.

Die *umgebaute Gaußsche Osterformel* lautet nun so, wie in Kasten 1 dargestellt ist. Die Vorzüge der neuen Gestalt liegen darin, daß nun alle Zwischengrößen – A, GM, D, R, OG, GS, SZ und OE – kalendarisch zwanglos interpretiert werden können und die Schaltregeln herauspräpariert worden sind. Damit ist die Gaußsche Osterformel anschaulicher, insbesondere aber auch *erweiterungsfähig* im Hinblick auf einen weiteren Approximationsschritt im Rahmen des Gregorianischen Kalenders geworden. Darin sehen wir den Hauptvorzug der neuen Gestalt. Die intern präzisere Abbildung des kirchlichen Algorithmus sehen wir natürlich ebenfalls als einen Vorzug an: OG liefert jetzt stets exakt die kirchliche Ostergrenze.

Nutzanwendung

Bevor wir zur Verallgemeinerung der Gaußschen Osterformel kommen, wollen wir eine Nutzanwendung des bisher Erreichten geben. Wir machen uns nämlich die Tatsache zunutze, daß M in den 300 Jahren von 1900 bis 2199 konstant 24 bleibt. Gehen wir jetzt von der Größe A bei Gauß über zu L = A + 6 (L wie Luna) und lassen wir weiter die Korrektur R der Ostergrenze als »kirchlich« oder »kalendarisch«, jedenfalls als »nicht-astronomisch« außer Betracht, so vereinfacht sich OG zu VM (wie Vollmond):

$$VM = 21 + MOD(19\,L,30).$$

Mit dieser simplen Berechnung von VM beherrscht man schon *die Mondphasen für die 300 Jahre von 1900 bis 2199*. Ausgehend vom Vollmond am VMten März bzw. (VM–31)ten April kann man alle übrigen Vollmond-Termine des Jahres X durch Addition bzw. Subtraktion von 29.5 Tagen und deren ganzzahligen Vielfachen leicht bestimmen. Neu- bzw. Halbmonde stehen von den Vollmond-Terminen um 15 bzw. 7 Tage ab. Natürlich werden diese zyklisch berechneten Mondphasen von den astronomisch korrekt berechneten Mondphasen um 1 bis 2 Tage abweichen können; man wird sich aber wundern, wie oft schon die zyklisch berechneten Termine mit den nach allen Regeln astronomischer Kunst berechneten Terminen zusammenfallen! (Indiz für die hohe Qualität des heutigen Kalenders.)

Allgemeine Gaußsche Osterformel

Zur *allgemeinen Gaußschen Osterformel* (siehe Kasten 2) gelangt man, indem man die Funktionen GM und GS von X in der umgebauten Gaußschen Osterformel als allgemeine Ausdrücke auffaßt.

Die verbal mit »kumulierte Schalttage« und »kumulierte Epaktenschaltungen« umschriebenen Funktionen GS bzw. GM von X sind nach den Lagen, die im beliebigen, aber dann festen Jahr der Betrachtung X für den ersten Sonntag im März bzw. für die Ostergrenze bestehen, sowie nach den charakteristischen Kalenderparametern p_1, s bzw. p_2, e zu gestalten [10]. Was diese zunächst etwas dunkle Umschreibung genauer heißt, wird gleich noch deutlicher werden.

Kasten 2: Allgemeine Gaußsche Osterformel

Sei X die Jahreszahl des Jahres, für welches das Datum des Ostersonntags gefunden werden soll. Dann berechne man der Reihe nach die folgenden Größen:

A. Berechnung des Ostervollmonds (Ostergrenze)

1.	A =	MOD (X,19)	Mondparameter
2.	GM =	kumulierte Epaktenschaltungen	
3.	D =	MOD(19 A + GM,30)	Keim für die Ostergrenze
4.	R =	INT (D/29) + (INT (D/28) – INT (D/29)) INT (A/11)	Korrekturgröße
5.	OG =	21 + D – R	Ostergrenze

B. Berechnung des ersten Sonntags im März

1.	GS =	kumulierte Schalttage	
2.	SZ =	7 – MOD (X + GS,7)	erster Sonntag im März

C. Berechnung des Ostersonntags

1. OE = 7 – MOD (OG – SZ,7) — Osterentfernung
2. Der Ostersonntag des Jahres X fällt auf den (OG+OE)ten März, wenn OG+ OE < 32 ist, ansonsten auf den (OG+OE–31)ten April.

Deutung der allgemeinen Gaußschen Osterformel anhand der kalendarischen Bewegungsgleichungen

Setzt man in der allgemeinen Formel beide Funktionen GS(X) und GM(X) konstant, so ergibt sich die Osterverteilung so, als ob ein Jahr exakt 365 Tage hätte und 19 Jahre exakt 235 Mond-Monate wären. Diesen Annahmen entsprächen die folgenden kalendarischen Bewegungsgleichungen:

$$\upsilon_\odot = 2\,\pi/365$$
und
$$\upsilon_{☾} = 235/19\,\upsilon_\odot\,;$$

hierbei bedeuten $\upsilon_\odot$ die tägliche Bewegung der »Kalendersonne« gegen den Frühlingspunkt und $\upsilon_{☾}$ die tägliche Bewegung des »Kalendermonds« gegen die Kalendersonne [10]. Beide Größen werden in Radiant pro Tag gemessen. Bleiben die Funktionen GS(X) und GM(X) nicht konstant, so bedeutet das, daß zu den Größen auf den rechten Seiten der Bewegungsgleichungen die Korrekturfaktoren

$$(1 + s/(365\,p_1))^{-1}$$
und
$$(1 + 19\,e/(7050\,p_2))$$

hinzugesetzt werden; hierbei bedeuten s die (Netto-)Anzahl der in der Schaltperiode p_1 vorgenommenen Schaltungen zur Regulierung der Jahreslänge und e die (Netto-) Anzahl der in der Epaktenschaltperiode p_2 vorgenommenen Epaktenschaltungen zur Regulierung der synodischen Monatslänge. Dementsprechend werden durch die Funktionen GS(X) und GM(X) die Geschwindigkeiten von Kalendersonne und Kalendermond feinreguliert. Die Funktionen sind so einzurichten, daß GS(X) beim Übergang von beliebigen X zu X+p_1 um die (Netto-) Anzahl s von Schalttagen bzw. GM(X) beim Übergang von beliebigen X zu X+p_2 um die (Netto-)Anzahl – e von Epaktenschaltungen wächst.[2)]

Mit diesen Forderungen für die Differenzen GS(X+p_1) – GS(X) und GM(X+p_2) – GM(X) liegen die Schaltfunktionen im wesentlichen fest. Jetzt ist klar: Eine Oster-

Kasten 1: Umgebaute Gaußsche Osterformel

Sei X die Jahreszahl des Jahres, für welches das Datum des Ostersonntags gefunden werden soll. Dann berechne man der Reihe nach die folgenden Größen:

1.	A =	MOD (X, 19)	Mondparameter
2.	GM =	15 + INT (X/100) – INT (X/400) – INT ((8 INT (X/100) + 13)/25)	Kumulierte Epaktenschaltungen
3.	D =	MOD (19 A + GM, 30)	Keim für die Ostergrenze
4.	R =	INT (D/29) + (INT (D/28) – INT (D/29)) INT (A/11)	Korrekturgröße
5.	OG =	21 + D – R	Ostergrenze
6.	GS =	2 + INT (X/4) – INT (X/100) + INT (X/400)	kumulierte Schalttage
7.	SZ =	7 – MOD (X + GS, 7)	erster Sonntag im März
8.	OE =	7 – MOD (OG – SZ, 7)	Osterentfernung

9. Der Ostersonntag des Jahres X fällt auf den (OG+OE)ten März, wenn OG+OE < 32 ist, ansonsten auf den (OG + OE– 31)ten April.

2) e erhält das negative Vorzeichen, weil eine Vermehrung der Epakte eine Verminderung der Mondumlaufzeit nach sich zieht, gerade andersherum, als es bei der analogen Größe s für die Sonnenumlaufzeit der Fall ist.

formel, wie oben angegeben, mit den Schaltfunktionen GS(X) und GM(X) und den Parametern p_1, s, p_2, e liefert eine lokale Zeitverteilung mit der durchschnittlichen tropischen Jahreslänge von:

$$2\pi/\upsilon_{\odot} = (365 + s/p_1) \text{ Tagen}$$

und der durchschnittlichen synodischen Monatslänge von

$$2\pi/\upsilon_{☾} = 570\,(365\,p_1 + s)\,p_2/(p_1(7050\,p_2 + 19\,e)) \text{ Tagen.}$$

Das ist der präzisierte Ausdruck für den Begriff der Anpaßbarkeit des Kalenderalgorithmus an seine Leitgestirne und Taktgeber Sonne und Mond. *Die Schaltfunktionen GS(X) und GM(X) repräsentieren* mithin *die entscheidenden (Korrektur-)Faktoren,* mittels derer der Kalender in einem viele Jahrhunderte umfassenden Prozeß von seinen starren Ursprüngen im altägyptisch-babylonischen Kulturkreis *zu einem modernen, anpaßbaren Zeitrechnungssystem* weiterentwickelt worden ist.

Ein Vergleich

Vergleicht man den Kalenderalgorithmus mit einer Pendeluhr, so kann man die Funktionen GS(X) und GM(X) als die »Vor-und-zurück-Schrauben« ansehen, mit denen die Pendeluhr zur angestrebten Ganggeschwindigkeit hin feinreguliert werden kann. Damit wird, so hoffen wir[3], anschaulich, daß und wie der Kalenderalgorithmus in seiner Ganggeschwindigkeit an die Leitgestirne Sonne und Mond angepaßt und auf unabsehbar lange Zeit, d. h. *immerwährend,* in diesem Gleichlauf gehalten werden kann. Sollten sich irgendwann größere Abweichungen angesammelt haben, so können nicht nur die Geschwindigkeiten geändert, sondern auch die »Zeiger« stets wieder in die »richtigen« Stellen gesetzt werden, zum Beispiel so, daß die reale Sonne im Mittel stets am 21. März durch den Frühlingspunkt geht, wie es die Väter des Konzils von Nicäa vermutlich wollten.[4] Der Gregorianische Kalender trägt mithin den Ehrentitel *calendarium perpetuum, immerwährender Kalender,* mit vollem Recht.

Das Kalenderproblem

Das Kalenderproblem ergibt sich daraus, daß die astronomischen *Meßgrößen* Umlaufdauer der Sonne bzw. des Mondes als *Zählmaße* für die Tage verwendet werden (müssen), obwohl sie keine ganzzahligen Vielfache der Tagesdauer sind. Die Lösung des Problems besteht darin, eine geeignete Zahl von Schalttagen, jeweils innerhalb geeigneter Perioden, und einen überschaubaren, klaren Schaltrhythmus zu finden, so daß die mittlere Dauer der verschieden langen Jahre (365 bzw. 366 Tage) und verschieden langen Monate (29 bzw. 30 Tage) die astronomischen Meßwerte jeweils bestmöglich annähert.

Die nicht weiter unterteilte Basiszeiteinheit des Kalenders ist der Tag, ob stets gleich oder veränderlich, läßt der Kalender offen. Geregelt werden die größeren Einheiten Monat (Mondumlauf von Neumond zu Neumond) und Jahr (Sonnenumlauf von Frühlingspunkt zu Frühlingspunkt), beide relativ zum Tag. Deshalb bleiben auch die gelegentlich in die Zeitzählung eingefügten Schaltsekunden kalendarisch irrelevant. Sie betreffen vielmehr das Verhältnis des Tages zu einer gewissen außerkalendarischen, periodischen Bewegung im atomaren Bereich.

Für einen Kalender im allgemeinen sind nur Zeit*verhältnisse* zwischen Tag, Monat und Jahr relevant. Für einen Lunisolarkalender im speziellen sind es die Zeitverhältnisse: Tag:Monat, Tag:Jahr und Monat:Jahr. Zum algorithmischen Aufbau eines derartigen Kalenders braucht man jedoch nur zwei der drei genannten Verhältnisse heranzuziehen, da sich das jeweils dritte als Quotient der beiden anderen ergibt. Daß im Falle des Julianisch-Gregorianischen Kalenders gerade die beiden Verhältnisse Tag:Jahr und Monat:Jahr ausgewählt wurden, ist kein geschichtlicher Zufall, sondern geschah wohlüberlegt. Liegen die genannten Verhältnisse doch nahe bzw. sehr nahe an rationalen Zahlen mit relativ kleinen Zählern und Nennern, nämlich an 1:365 bzw. 19:235.

Ein gut eingerichteter Lunisolarkalender liefert durch pures Zählen und listenmäßiges Gruppieren der Tage (Hell-Dunkel-Folgen) gemäß dem in ihm hinterlegten Algorithmus auf lange Zeit im Mittel zutreffende Informationen über die Stellungen der großen Leuchten Sonne und Mond am Himmelsgewölbe. Da die tatsächlichen Bewegungen der großen Leuchten alles andere als glatt und einfach sind, kann auch der Kalenderalgorithmus kein völlig einfacher sein. Die Reduktion der Kompliziertheit gelingt zunächst weitgehend durch die Anwendung von zwei Zyklen, für jede Leuchte einen, die ihrerseits aber natürlich nur angenähert gültig sind.[5] Die jederzeitige Revidierbarkeit der Näherungsannahmen über die Zyklen läßt dann jedoch die Kompliziertheit des Kalenderalgorithmus wieder auf ein grundsätzlich nicht unterschreitbares Maß anwachsen.

Das vorstehend beschriebene, vertrackte Problem wurde von Lilius und Clavius im Gregorianischen Kalender glänzend gelöst.

Was ist an Ostern Sache der Theologie, was Sache der Astronomie?[6]

Die allgemeine Gaußsche Osterformel läßt nun auch deutlicher hervortreten, was an Ostern Sache der Theologie und was Sache der Astronomie ist. Natürlich ist die Zuständigkeit der Theologie für das Osterfest als Ganzes stets gegeben. Solange die Kirche den Ostertermin an astronomische Gegebenheiten (Frühlingsanfang, Vollmond) bindet, wofür es gute Gründe geben mag, wie Papst Johannes Paul II in seinem Grußwort an die vatikanische Konferenz im Jahre 1982 aus Anlaß des 400jährigen Bestehens des Gregorianischen Kalenders angedeutet hat [3], solange bleibt die Astronomie gefordert, die nötigen Daten zu liefern, d. h., die durchschnittliche Jahreslänge und die durchschnittliche Mondmonatslänge festzustellen, auf denen die Berechnung des Ostertermins dann zwangsläufig basiert. Beim Begriff des Sonntags dagegen beginnt wieder das »Ressort« der Theologie. Dazu kann die Astronomie nichts sagen, wie beispielsweise auch nichts zu den – im übrigen bewundernswert behutsamen – Korrekturen der Ostergrenze. Diese haben einen geschichtlich-theologischen Hintergrund, nämlich das Bestreben der gregorianischen Kalenderordner, den äußersten Termin des 25. April für den Ostersonntag, der nach einer jahrhundertealten Praxis im sogenannten alexandrinischen Osterkanon unantastbar geworden

---

[3] Wir übersehen nicht, daß der Vergleich insofern hinkt, als bei der Pendeluhr nur eine Ganggeschwindigkeit anzupassen ist, während es beim Kalenderalgorithmus deren zwei sind.

[4] Papst Gregor XIII. beruft sich zwar in seinem Einführungserlaß zum reformierten Kalender, der Bulle »Inter gravissimas curas« vom 24. 2. 1582, vgl. [2], S. 13, hinsichtlich des »Setzens der Zeiger« ausdrücklich auf die Väter des Konzils von Nicäa, aber in den überlieferten Dokumenten des Konzils von Nicäa aus dem Jahre 325 findet sich unseres Wissens kein direkter oder indirekter Hinweis darauf, daß der 21. März als Frühlingsanfang angesehen werden sollte.

[5] Dem Grundgerüst des Kalenders liegen die beiden folgenden Zyklen zugrunde: 365 Tage = 1 Jahr (altägyptisches Sonnenjahr) und 235 Monate = 19 Jahre (Metonischer Zyklus, Babylon). Der erste Zyklus wird gegenüber der Realität um etwa 0.66 ‰ zu früh geschlossen, der zweite Zyklus um etwa 0.012 ‰ zu spät (bei Lesung der Zyklus-Gleichungen von links nach rechts).

[6] Diese Fragestellung soll keine Dichotomie der Zuständigkeiten zwischen Astronomie und christlicher Theologie für Ostern suggerieren. Natürlich gibt es auch eine Zuständigkeit der Kulturgeschichte sowie der jüdischen Theologie, weil das Frühlingsfest zum Vollmond weit zurück ins Babylonische geht und auch beim Passah-Fest in Überhöhung wiedererscheint.

war, auch nicht um einen einzigen Tag zu überschreiten, selbst wenn der Algorithmus zu einem 26. April als letztmöglichem Ostertermin aus astronomischen Grund drängte. Der gefundene Kompromiß achtet und versöhnt alle Sphären: die religiöse, die traditionelle und die astronomische. Man darf ihn daher einen tiefsinnigen, weisen und *mente catholica gefaßten Kompromiß* nennen.

Kasten 3: Osterformel für den Julianischen Kalender

1.	A = MOD X(19)	Mondparameter
2.	OG = 21 + MOD (19 A + 15,30)	Ostervollmond
3.	SZ = 7 – MOD (X + INT (X/4), 7)	erster Sonntag im März
4.	OE = 7 – MOD (OG – SZ, 7)	Osterentfernung
5.	Der Ostersonntag fällt auf den (OG + OE)ten März, wenn OG + OE < 32 ist, ansonsten auf den (OG + OE – 31)ten April.	

Die Flexibilität des Kalenderalgorithmus

Erst in der allgemeinen Gestalt spiegelt die Gaußsche Osterformel die volle Flexibilität wider, die dem von Lilius und Clavius genial konzipierten Algorithmus des Gregorianischen Kalenders innewohnt. Die Genialität des Konzepts liegt nicht zuletzt in seiner kosmologischen Voraussetzungslosigkeit. Daß gerade ein solches Konzept zustande kam, hat vielleicht mit der Gunst der Stunde zu tun, in der die Kalenderreform durchgeführt wurde, die freilich von den Akteuren eher als Ungunst empfunden worden sein mag. Es war die Phase des Umbruchs vom ptolemäischen zum kopernikanischen Weltsystem. In dieser Phase des Zweifels und der Desorientierung mögen sich die Kalenderreformer zu besonderer Zurückhaltung genötigt gefühlt haben. Sie wollten ganz bewußt ein *ad numeros scharfes* (Clavius), aber im übrigen fast voraussetzungsloses und jedenfalls anpaßbares Werk zustande bringen. Dieses ist voll gelungen. Die wichtige Voraussetzung freilich, daß man ein System der Zeitrechnung auf *Mittelwerten* der Bewegungen von Sonne und Mond verläßlich aufbauen kann, wurde bisher glänzend bestätigt. Wenn es jedoch nötig wird, kann der Algorithmus auch neuen Mittelwerten angepaßt werden; nach einer Anpassung läuft er zyklisch weiter. Man kann den Kalenderalgorithmus daher mit vollem Recht einen anpaßbaren, stückweise zyklischen Algorithmus nennen.

Wir wollen zur Untermauerung des Gesagten die allgemeine Gaußsche Osterformel an zwei historische und eine zukünftige Situation anpassen; außerdem wollen wir für das Jahr 1582 des Übergangs vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender eine Nahtstellenanalyse durchführen.

Anpassung der allgemeinen Gaußschen Osterformel an den heute gültigen Gregorianischen Kalender

Die Anpassung an den heute gültigen Gregorianischen Kalender liest man aus der umgebauten Gaußschen Osterformel – siehe oben – ohne weiteres wie folgt ab:

$$GS(X) = 2 + INT(X/4) - INT(X/100) + INT(X/400)$$

und

$$GM(X) = 15 + INT(X/100) - INT(X/400) - INT((8\,INT(X/100) + 13)/25).$$

Das entspricht folgendem Satz charakteristischer Parameter: $p_1 = 400$, $s = 97$, $p_2 = 10000$ und $e = -43$.

Anpassung der allgemeinen Gaußschen Osterformel an den Julianischen Kalender

Für die Anpassung an den Julianischen Kalender wählen wir das Betrachtungsjahr 513 und zwar deswegen, weil es eine Osterliste von Dionysius Exiguus (ca. 500 bis ca. 550) gibt[7)], die mit diesem Jahr beginnt [4]. (Dionysius läßt seine eigene Tafel genau genommen erst mit dem Jahr 532 beginnen; er stellt ihr aber den letzten Zyklus (513 bis 531 n. Chr.) einer älteren Tafel des Patriarchen Cyrill von Alexandria (gestorben 444) voran.)

Aus ihr entnehmen wir für das genannte Jahr 513 sowohl die Lage der Ostergrenze (5. April) wie auch das Datum des ersten Sonntags im März (3. März).

Epaktenschaltungen kennt der Julianische Kalender nicht, d. h., GM(X) bleibt konstant. Die Schaltregel für die Jahreslänge lautet im Julianischen Kalender bekanntlich so: Alle vier Jahre wird ein Schalttag in den Februar eingefügt. Mit diesen Informationen sind wir in der Lage, GM(X) und GS(X) für den Julianischen Kalender zu berechnen.

Die Ostergrenze des 5. April ist der 36. März, d. h., es gilt:

$$36 = 21 + MOD(19\,A + GM, 30).$$

Da der Mondparameter A für 513 den Wert 0 annimmt, ergibt sich weiter:

$$15 = MOD(GM, 30).$$

Hieraus folgt:

$$GM(X) = 15.$$

Die Funktion GS(X) der kumulierten Schalttage im Julianischen Kalender lautet:

$$GS(X) = t + INT(X/4),$$

mit einer noch zu bestimmenden Konstanten t. Aus der Gleichung für das Datum des ersten Sonntags im März

$$\begin{aligned} 3 &= 7 - MOD(513 + GS(513), 7) \\ &= 7 - MOD(513 + t + 128, 7) \\ &= 7 - MOD(t + 4, 7) \end{aligned}$$

ergibt sich:

$$t = 0,$$

d. h.,

$$GS(X) = INT(X/4).$$

Zu den Funktionen GS(X) und GM(X) gehört folgender Satz charakteristischer Parameter: $p_1 = 4$, $s = 1$, $p_2 = 1$ und $e = 0$.

Wir notieren nun die *Osterformel für den Julianischen Kalender* im Zusammenhang, wie im Kasten 3 beschrieben ist.

Die Korrekturgröße R kann weggelassen werden, da sie konstant 0 bleibt. D = 29 kommt nämlich für die 19 möglichen Werte 0, 2, ... , 18 von A nicht vor. D = 28 kommt zwar vor, nämlich für den Mondparameter 7, würde aber nur dann zu einem Vorziehen der Ostergrenze führen, wenn D = 29 im gleichen 19er-Zyklus des Mondparameters vorkäme [9], was nach dem eben Gesagten jedoch nicht der Fall ist.

Die Richtigkeit der Anpassung ergibt sich aus einem Vergleich mit der als richtig bekannten Formel von Gauß für den Julianischen Kalender [6] in der Osterperiode von 532 Jahren. Diese Periode für den Julianischen Kalender hatte schon Victor von Aquitanien im Jahre 457 auf Grund von historisierenden, fast mystischen Überlegungen gefunden; später hat sie dann Beda Venerabilis (672/73 bis 735) erstmals bewußt als Folge der beiden Zyklen von 19 und 28 (= 4 × 7) Jahren dargestellt (532 = 19 × 28) [1].

---

7) Den Hinweis hierauf verdanken wir Herrn Prof. Dr. Josef Wohlmuth, Universität Bonn. Vgl. auch dessen Buch: Jesu Weg – unser Weg, Würzburg 1992, S. 72, Fußn. 4.

Aus der obigen Formel für den Julianischen Kalender entnimmt man zum Beispiel, daß das Ur-Ereignis »Ostern«, von dem angenommen wird, daß es im Jahre 30 n. Chr. stattfand, auf Sonntag, den 9. April, fiel. Dies stünde in Übereinstimmung mit dem Datum: Freitag, dem 7. April 30, welches heute als das wahrscheinlichste Kreuzigungsdatum angesehen wird [5].

Nahtstellenanalyse für das Jahr 1582

Die Reform von 1582 bietet eine weitere Möglichkeit, die Flexibilität des Kalenderalgorithmus darzulegen. Wir berechnen dazu die ruckartige Verstellung des Kalendermonats beim Übergang vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender.

1582 war das letzte Jahr des Julianischen Kalenders. Für 1582 lautet der Mondparameter: A = 5. Daraus ergibt sich OG zu 21 + MOD(19 × 5 + 15, 30) = 21 + MOD(95 + 15, 30) = 21 + MOD(110, 30) = 21 + 20 = 41. Demnach fiel die Ostergrenze auf den (41 – 31)ten = 10. April. Durch Zurückweichen um 11 Tage wäre sie 1583 auf den 30. März gefallen, wenn man den Julianischen Kalender beibehalten hätte. Die Herausnahme der 10 Tage im Oktober 1582 hätte die Datumsbezeichnung »9. April 1583« für die Ostergrenze am 30. März zur Folge haben müssen, wenn man den Kalendermond beim Übergang vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender nicht verstellt hätte. Tatsächlich hat man ihn verstellt. Wohin, sagt uns die Berechnung der Ostergrenze für das erste volle Jahr des Gregorianischen Kalenders. Der Mondparameter A für 1583 ist 6. Mit GM(1583) = 22 wird D = MOD(19 × 6 + 22, 30) = MOD(136, 30) = 16 und R = 0, d. h., die Ostergrenze OG = 21 + 16 – 0 = 37 fällt auf den (37 – 31)ten = 6. April. Daraus erhellt, daß der Kalendermond beim Übergang vom Julianischen zum Gregorianischen Kalender ruckartig um 3 Tage vorgestellt wurde. Dies steht in Übereinstimmung mit dem Clavius-Algorithmus: Am 4. Oktober 1582 hatte der Kalendermond das Alter von 14 Tagen; am darauffolgenden Tag, dem 15. Oktober 1582, hatte er das Alter von 18 Tagen; mithin war das Mondalter ruckartig um 3 Tage gewachsen, vergleiche [2], S. 111, 116.

Der dargestellte Ruck des Kalendermondes ist so gut wie unbekannt. Viel bekannter ist dagegen das ruckartige Vorstellen der Kalendersonne um 10 Tage, das durch den oben erwähnten Ausfall der 10 Datumsberechnungen vom 5. bis zum 14. Oktober 1582 bewirkt wurde. Auch diesen Ruck könnte man aus unseren Formeln herauslesen. Wir wollen das hier aber im einzelnen nicht mehr tun.

Die Nahtstellenanalyse hat auch gezeigt, daß die allgemeine Gaußsche Osterformel »rauhes« Schalten beim Übergang von einem Zeitrechnungssystem zum anderen nicht zu scheuen braucht, sofern sich die Systeme an den allgemeinen Rahmen des Gregorianischen Kalenders – eben das calendarium perpetuum – halten. Unter rauhen Schaltungen verstehen wir dabei solche, die nicht an den vorgesehenen Stellen (für Mond: Anfang Januar, für die Sonne: Ende Februar) oder nicht in der vorgesehenen Größe (–1 oder +1) erfolgen. Nicht-rauhe Schaltungen wollen wir »sanfte« Schaltungen nennen. Ergebnis: *Die allgemeine Gaußsche Osterformel beschreibt sowohl den invarianten Kern wie auch die variablen Teile des heutigen Zeitrechnungssystems, einschließlich eventueller rauher Schaltungen.*

Anpassung der allgemeinen Gaußschen Osterformel an eine denkbare Situation im Jahre 4800 n. Chr.

Mit Hilfe der allgemeinen Gaußschen Osterformel können wir jetzt *zukünftige Kalenderanpassungen*, gleich, ob sanft oder rauh geschaltet, vornehmen. Klar ist, daß bei der letzlich chaotischen Natur aller tatsächlichen Bewegungen der Sonne, Erde und Mond jede Annahme über Zyklen irgendwann hinfällig wird. Man muß »nur« lange genug bis zur offenkundigen Unhaltbarkeit der Annahme warten.

Die jetzige Einrichtung des Kalenders zählt in 10000 Jahren rund 3 Tage zuviel, d. h., die tatsächliche Sonne wird 3200 Jahre nach 1600, also gegen 4800 n. Chr., den Frühlingspunkt anhaltend um den 20., nicht mehr um den 21. März passieren. Um diesen »Mißstand« zu beseitigen, könnte man den Schalttag im Jahre 4800 n. Chr. ausfallen lassen. Dann fiele der 1. Sonntag im März nicht mehr auf den 5., sondern auf den 6. März 4800. Die Ostergrenze des 14. April würde durch den ausfallenden Schalttag die Bezeichnung 15. April erhalten. Würden weiter die heute bekannten Bestwerte von 365.2422 bzw. 29.530588 Tagen für die mittlere Jahres- bzw. Monatslänge noch gelten, so könnte man sie mittels der charakteristischen Parameter p_1 = 10000, s = 2422, p_2 = 160000, e = –739 in folgende Schaltregeln umsetzen:

$$\begin{aligned} GS(X) = {} & 2 + INT(X/4) - INT(X/100) \\ & + INT(X/400) \\ & - INT((3\,INT(X/400) - 10)/25), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} GM(X) = {} & 15 + INT(X/100) - INT(X/400) \\ & + INT((3\,INT(X/400) - 10)/25) \\ & + INT((3\,INT(X/4000) + 2)/40) \\ & - INT((8\,INT(X/100) + 13)/25). \end{aligned}$$

Auf diese Weise wäre sowohl der oben genannte »Mißstand« mittels sanfter Schaltung behoben, als auch dafür gesorgt, daß sich so schnell kein neuer Mißstand einschliche.

Durch Angabe einer neuen, ab dem Jahre 4800 n. Chr. einsetzenden Osterformel haben wir die Richtung angedeutet, wie einer geänderten Kalenderdynamik durch Herunterbrechen der globalen Parameter auf die lokale Zeitebene Rechnung getragen werden kann. Die durchaus interessante Frage, ob und wie die oben angegebenen Regeln eventuell noch weiter verbessert werden könnten, wollen wir hier nicht mehr untersuchen. Sie soll einer späteren Erörterung vorbehalten bleiben. □

Literatur

[1] Beda Venerabilis: De temporum ratione, cap. LXV, De circulo magno paschae, CChr, Ser. Lat., Bd. 123 b, S. 460, Turnhout 1977.

[2] Clavius, Ch.: Romani Calendarii a Gregorio XIII. P.M. restituti Explicatio, Rom 1595 und 1603 (in der Universitäts- und Stadtbibliothek Köln unter der Signatur G27 1580) (= Opera Mathematica, Tom. V., Mainz 1612).

[3] Coyne, G. V., Hoskin, M. A., Pedersen, O. (Hrsg.): The Gregorian Reform of the Calendar, Proceedings of the Vatican Conference to commemorate its 400th anniversary 1582–1982, Vatikan-Stadt 1983.

[4] Dionysius Exiguus: Liber de Paschate, Migne, PL, Bd. 67, Spalte 493, Turnhout o. J.

[5] Ferrari d'Occhieppo, K.: Der Stern von Bethlehem – aus der Sicht der Astronomie beschrieben und erklärt, Stuttgart 1991.

[6] Gauß, C. F.: Berechnung des Osterfestes, Monatl. Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde, Aug. 1800, S. 121–130, (= Werke, Bd. VI, S. 73–79, Göttingen 1874).

[7] Gauß, C. F.: Berichtigung zu dem Aufsatze: Berechnung des Osterfestes. Mon. Corr. 1800 Aug. S. 121, Zeitschrift f. Astronomie u. verwandte Wissenschaften, Bd. I, Jan./Febr. 1816, S. 158 (= Werke, Bd. XI/1, S. 201, Göttingen 1927).

[8] Gauß, C. F.: Noch etwas über die Bestimmung des Osterfestes, Braunschweigisches Magazin vom 12. Sept. 1807 (= Werke Bd. VI, S. 82–86, a.a.O.u.J.).

[9] Graßl, A.: Die Gaußsche Osterregel und ihre Grundlagen, SuW **32**, 274 [4/1993].

[10] Lichtenberg, H.: Die Struktur des Gregorianischen Kalenders, anhand der Schwankungen des Osterdatums entschlüsselt, SuW **33**, 194 [3/1994].

[11] Mästlin, M.: Ausführlicher und Gründtlicher Bericht von der allgemeinen / und nunmehr bey sechzehen Hundert Jaren / ... gebrauchter Jarrechnung oder Kalender / ... . Sambt erklärung der newen Reformation / ... / Und was darvon zuhalten seye. Heidelberg 1583 (in der dortigen UB unter der Signatur 89 A 3735).

[12] O'Beirne, T. H.: Puzzles und Paradoxes, chp. 10, Ten Divisions lead to Easter, Oxford 1965.

[13] Zemanek, H.: Kalender und Chronologie, Bekanntes und Unbekanntes aus der Kalenderwissenschaft, 5., verb. Aufl., München/Wien 1990.

Der Wert der Hubble-Konstante

Wie schnell expandiert das Universum? Teil 1: Entfernungsindikatoren für die extragalaktische Distanzskala

Von Martin Federspiel, Lukas Labhardt und Andreas Tammann

Edwin Hubble entdeckte 1929 das Rotverschiebungs-Entfernungsgesetz, das schon bald als Expansion des Universums gedeutet wurde. Bis heute ist der genaue Wert der Expansionsrate – der sogenannten Hubble-Konstante H_0, eines der fundamentalen kosmologischen Parameter – umstritten, weil keine Einigkeit in der extragalaktischen Entfernungsskala besteht. Im ersten Teil wollen wir einen Überblick über die Methoden der extragalaktischen Entfernungsmessung und ihre Ergebnisse im Hinblick auf H_0 geben; im zweiten Teil werden neuere Basler Arbeiten zur Bestimmung H_0 von und deren Ergebnisse beschrieben.

Es ist Aufgabe der Astronomen, das Universum im Großen wie im Kleinen, vom Urknall bis in die Zukunft zu erforschen. Auf großen Skalen wird die Entwicklung des Universums als Ganzem durch die Allgemeine Relativitätstheorie – genauer, durch die Lösungen der Feldgleichungen – beschrieben. Unter der Annahme des kosmologischen Prinzips, d. h., daß das Universum auf großen Skalen homogen und isotrop ist, reduzieren sich die Feldgleichungen im einfachsten Fall zur sogenannten Friedmann-Gleichung. In ihr treten nur zwei freie Parameter auf, der Hubble-Parameter H und der Bremsparameter q, auf den wir in diesem Aufsatz nicht näher eingehen können. Wenn man die heutigen Werte dieser Parameter durch Beobachtungen bestimmt, können für jeden Zeitpunkt der Krümmungsradius (die »Größe«), die mittlere Dichte und die Temperatur des Universums berechnet werden. Da die derzeitigen Ergebnisse für H und q ein konsistentes Bild ergeben, ist die Hoffnung berechtigt, daß die Lösungen der Friedmann-Gleichung die Entwicklung des Universums tatsächlich realistisch beschreiben.

Der Hubble-Parameter H, meist auch »Hubble-Konstante« genannt, mißt die Expansionsrate des Universums der Ausdehnung R:

$$H \equiv \frac{\dot{R}}{R}\,. \tag{1}$$

Streng genommen ist R der »Krümmungsradius« des Universums; man kann sich R aber auch als Skalenfaktor veranschaulichen. Da R im expandierenden Universum stetig wächst, ist H keine wirkliche Konstante, sondern ändert sich mit dem Weltalter, weshalb wir den *heutigen* Wert der Ausdehnungsrate H_0 bestimmen. Durch die Expansion des Universums entfernen sich alle Galaxien von uns, und zwar umso schneller, je weiter sie von uns entfernt sind. Die Expansion muß *linear* sein, damit jeder Beobachter im Universum das gleiche Expansionsverhalten sieht, d. h., für eine Galaxie in der Entfernung r und mit der beobachteten Fluchtgeschwindigkeit υ muß folgender Zusammenhang gelten:

$$\upsilon = H_0\, r \tag{2}$$

Umgekehrt muß dieser lineare Zusammenhang zwischen Fluchtgeschwindigkeit und Entfernung durch Messungen verifiziert werden, damit die in Galaxienspektren beobachtete Rotverschiebung überhaupt als *lineare* Expansion des Weltalls interpretiert werden darf. Der Nachweis der Linearität der Expansion (d. h., Fluchtgeschwindigkeit proportional zur Entfernung), der nur *relative* Distanzen verlangt, ist heute über alle Zweifel erhaben. In diesem Fall weist das Hubble-Gesetz (2) den Weg zur Hubble-Konstante H_0. Die *auf den Beobachter bezogene* Fluchtgeschwindigkeit folgt unmittelbar aus der Rotverschiebung der Spektrallinien. An die beobachteten Fluchtgeschwindigkeiten sind aber zur Bestimmung von H_0 eine Reihe von Korrekturen anzubringen, die die Bewegung der Erde um die Sonne, die Bewegung der Sonne um das Milchstraßenzentrum, die Bewegung der Milchstraße innerhalb der Lokalen Gruppe, die Bewegung der Lokalen Gruppe relativ zum benachbarten Virgo-Galaxienhaufen und gegenüber der kosmischen Hintergrundstrahlung berücksichtigen. Dazu modelliert man die durch lokale Massenkonzentrationen hervorgerufenen Abweichungen von der gleichförmigen Expansion durch ein lokales Geschwindigkeitsfeld, dessen Details umstritten sind, und erhält schließlich für jedes Objekt die *kosmische*, d. h., die durch die Expansion des Universums hervorgerufene, Fluchtgeschwindigkeit υ. Die Schwierigkeit, die beobachteten Fluchtgeschwindigkeiten für lokale Störeffekte zu korrigieren, entfällt, wenn es gelingt, Entfernungen r zu Objekten mit Fluchtgeschwindigkeiten von mehr als 10 000 km/s zu bestimmen, da dann die lokalen Störeffekte – die durchweg kleiner als 650 km/s sind – vernachlässigbar werden. Zwei Routen zu H_0, die diese Bedingung erfüllen, werden wir im zweiten Teil dieses Aufsatzes beschreiben.

Der zweite und sicher schwierigere Teil der Aufgabe ist, die Entfernung r eines Objekts zu bestimmen. Die Wissenschaftler

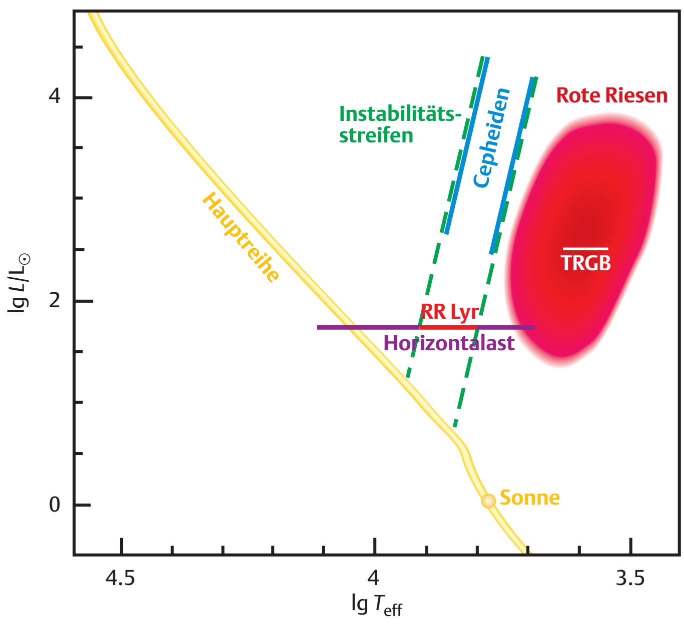

Abb. 1: Theoretisches Hertzsprung-Russell-Diagramm (HRD). Eingezeichnet sind Objekte, die sich wegen ihrer bekannten absoluten Helligkeit zur Entfernungsbestimmung eignen. (Erläuterung siehe Text)