

Emissionslinienprofile akkretierender Scheiben um rotierende Schwarze Löcher

vorgelegt von

Andreas Müller

Technische Universität Darmstadt

August 2000

The search for truth is more precious than its possession.
(Albert Einstein)

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Kompakte Objekte in Aktiven Galaktischen Kernen und Röntgendoppelsternsystemen	3
2.1	Taxonomie der AGN	3
2.2	Das AGN-Paradigma und Unifikation	6
2.3	Topologie und Modellbildung	8
2.4	X γ -Spektren	13
2.5	Emissionslinien	18
2.5.1	Fluoreszenz	18
2.5.2	Ionisation	19
2.5.3	Diagnostik	21
2.5.4	Phänomenologie	23
2.6	Galaktische Röntgendoppelsternsysteme	30
2.6.1	Topologie	31
2.6.2	Stellare Schwarze Löcher	31
3	Rotierende Schwarze Löcher: Geodäten-Gleichung, Akkretionsscheiben und Strahlung	35
3.1	Die Raumzeit	35
3.1.1	Metrik einer stationären und axialsymmetrischen Gravitationsquelle	36
3.1.2	Der 3+1 Split der Raumzeit	36
3.2	Die Kerr-Metrik	37
3.3	Die Geodätengleichung in der Kerr-Metrik	43
3.3.1	Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung	46
3.3.2	Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen	48
3.4	Strahlungstransport in der Kerr-Metrik	50
3.4.1	Der spektrale Fluss	50
3.4.2	Photonenimpulse und Rotverschiebungsfaktor	50
3.4.3	Geschwindigkeitsfelder des Plasmas	52
3.4.4	Das radiale Emissivitätsgesetz	54
4	Ray-Tracing in der Kerr-Geometrie	57
4.1	Prinzip des Ray-Tracings	57
4.2	Ein historischer Überblick	59
4.3	Die analytische Integration der Geodätengleichung mittels Elliptischer Integrale	63
4.4	Der objektorientierte Kerr Ray-Tracer	67
4.4.1	Die Kerr-Welt	68
4.4.2	Rendering Verfahren	69
4.4.3	Datenkapselung	71

4.4.4	Linienkalkulation	73
4.4.5	Visualisierung der Rotverschiebung und der Temperatur	76
4.5	Einstellparameter	81
4.6	Wesentliche freie Parameter	82
5	Beispiele von Linienprofilen für Akkretionsscheiben	83
5.1	Extraktion der Eisen-Emissionslinie aus den Röntgendaten	83
5.2	Vergleiche mit anderen Autoren	84
5.3	Simulations-Modelle	84
5.4	Alternative Modelle	137
5.5	Vergleich mit Daten	142
6	Zusammenfassung	157
7	Ausblick	159
7.1	Daten neuer Satellitenmissionen	159
7.2	Neue MHD-Modelle	159
7.3	Kovarianter Strahlungstransport	159
7.4	Volumen Ray-Tracing	160
A	Anhang	I
A.1	Die Einsteinschen Gleichungen	I
A.2	Die Petrov-Klassifikation	II
A.3	Symmetrien: Killing-Vektorfelder und Isometrien	III
A.4	Radialgleichung in der Äquatorialebene	III

Abbildungsverzeichnis

1	Das AGN-Paradigma	7
2	Schema der AGN-Topologie	9
3	Frequenz-Domänen und exponentieller Cut-Off	15
4	Globales $X\gamma$ -Spektrum und spektrale Komponenten	16
5	Dominanz der Eisen-Emissionslinie	17
6	Reflexionsspektren für verschiedene Ionisationsparameter	20
7	Reflexionsspektren einer Scheibe mit Beiträgen verschiedener Fe-Spezies	22
8	Von der Newtonschen zur relativistischen Scheibe	25
9	Polardiagramm der detektierten Stärke	27
10	Studie der Korona-Position	28
11	Simulation der Äquivalenzlinienbreite	29
12	Roche-Volumen eines Doppelsternsystems	32
13	Statische Grenze	41
14	Effektives Gravitationspotential für den Schwarzschild-Fall	44
15	Radiale Emissivität als doppeltes Potenz-Gesetz	55
16	Emissivitätsprofil mit Index 3.5	56
17	Schema des Ray-Tracings	58
18	Spektren von relativistischen Akkretionsscheiben nach <i>Cunningham</i>	61
19	Die Klassenhierarchie des Projektes <i>KerrRaypp</i>	79
20	Emissionslinienprofile bei verschiedenen Inklinationen nach Fabian et al.	85
21	Test der Linienprofile von Fabian et al.	87
22	Simulierte Linienprofile bei verschiedenen Scheibeninnenradien in Kerr	91
23	Simulierte Linienprofile bei verschiedenen Scheibenaußenradien in Kerr	93
24	Einfluss der Inklination in Schwarzschild verglichen mit Kerr	95
25	Simulierte Linienprofile bei verschiedenen Inklinationen in Kerr	97
26	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken Ausflüssen in Schwarzschild	101
27	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken Ausflüssen in Kerr	103
28	Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift in Kerr	105
29	Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift für ein $1/r$ -Gesetz in Kerr	107
30	Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift für Schwarzschild	109
31	Simulierte Linienprofile mit Akkretion nach <i>Cunningham</i> verglichen mit freiem Fall	113
32	Simulierte g -Scheibenbilder bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und schwacher sowie starker v^r -Komponente	115
33	Simulierte T -Scheibenbilder bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und schwacher sowie starker v^r -Komponente	117
34	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und schwacher, radialer Drift in Schwarzschild	119
35	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und starker, radialer Geschwindigkeitskomponente in Schwarzschild	121

36	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und schwacher, radialer Drift in Kerr	123
37	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und starker, radialer Drift in Kerr	125
38	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Einflüssen in Kerr	127
39	Simulierte g -Scheibenbilder bei verschieden starken poloidalen Ausflüssen .	131
40	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Ausflüssen und schwacher, radialer Komponente in Schwarzschild	133
41	Simulierte Linienprofile bei verschieden starken poloidalen Ausflüssen und starker, radialer Komponente in Schwarzschild	135
42	Kalkulierte Linienprofile nach <i>Dabrowski et al. (1997)</i>	139
43	Kalkulierte Emissionslinien selbstgravitierender Tori	141
44	Geometrie nicht-flacher Scheiben	142
45	Berechnete Linienprofile von in sich verdrehten Scheiben	143
46	Berechnete Linienprofile von verbogenen Scheiben	144
47	Linienprofile der Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 (ASCA)	146
48	Linienprofile der Seyfert-1-Galaxien NGC 4151 und MCG-6-30-15 (ASCA) .	147
49	Verhältnis von RXTE-Daten zu Modell bei GRO J1655-40	149
50	Spektrale Komponenten von GRO J1655-40	150
51	Linienprofil der Seyfert-1-Galaxie IC 4329A (ASCA)	151
52	Linienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 3227 (ASCA)	153
53	Linienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 3516 (ASCA)	155
54	Linienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 5548(ASCA)	156

Notationen und Konventionen

- Die Naturkonstanten c und G , sowie die Masse des Schwarzen Loches M setze ich, wenn nicht anders vermerkt, gleich 1. Bei quantitativen Abschätzungen verwende ich c und G explizit.
- Bei der Definition des Gravitationsradius

$$r_g = \frac{GM}{c^2} \quad (1)$$

gilt daher $r_g = 1$. Dies entspricht dem halben Schwarzschildradius R_S .

- Die Signatur der Vierer-Metrik ist $(+ - - -)$.
- Bei der Behandlung von Tensoren laufen griechische Indizes von 0 bis 3 und lateinische von 1 bis 3.
- Es gilt die *Einsteinsche Summenkonvention*: Über gleiche Indizes nebeneinander stehender Größen wird summiert.
- In der Astrophysik wird Ionisationszustand durch eine nachgestellte griechische Zahl hinter dem Elementsymbol dargestellt. I bedeutet dabei neutral, II einfach ionisiert, III zweifach etc. So bezeichnet zum Beispiel OIII zweifach ionisierten Sauerstoff.
- Als übliche Massenskala verwende ich die *Sonnenmasse*:

$$1M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} kg \quad (2)$$

1 Einleitung

In dieser Arbeit möchte ich neue Ansätze darstellen, die die unmittelbare Umgebung eines Schwarzen Loches modellieren. Es ist nun möglich die Sichtweise kompakter Objekte und deren Röntgenspektren zu vereinheitlichen. Ob man es mit einem Neutronenstern in einem Röntgendoppelsternsystem, einem supermassereichen Schwarzen Loch in einem Aktiven Galaktischen Kern oder einem akkretierenden, stellaren Schwarzen Loch zu tun hat: es treten immer verwandte Effekte auf, so dass sich die $X\gamma$ -Spektren, insbesondere deren Komponenten und die physikalische Interpretation kaum unterscheiden. Eine nun historische Begebenheit, die Unifikation der Seyfert-Galaxien, wiederholt sich hier in einem noch größeren Ausmaß: eine *Unifikation der Röntgenspektren kompakter Objekte*.

Die Behandlung von Systemen aus kompaktem Objekt und Akkretionsscheibe zerfiel bislang immer aus Gründen der Zweckmäßigkeit in Teilaspekte. Die Physik solcher Systeme ist hinreichend komplex, weil man es mit allgemeiner Relativität, Magnetohydrodynamik, Elektrodynamik und Strahlungsphysik zu tun hat. Eine Vereinfachung scheint daher unumgänglich; langfristiges Ziel muss jedoch eine Berücksichtigung sämtlicher Effekte sein. Eine relativistisch kovariante Formulierung sämtlicher Gleichungen gestaltet sich schwierig. Neben analytischen Herausforderungen stößt man auch an die Grenzen numerischer Leistungsfähigkeit.

In meiner Arbeit werde ich den Teilbereich untersuchen, wo Schwarze Löcher die kompakten Quellen sind. Heute kennen wir verschiedene Objekte, die aus einem Schwarzen Loch und einer Scheibe bestehen. So existieren *galaktische Binärsysteme*, bestehend aus einem stellaren Schwarzen Loch (etwa 2.5 bis 10 Sonnenmassen) und einem Begleitstern, auf der extragalaktischen Skala hingegen die *Aktiven Galaktischen Kerne* mit supermassereichen Schwarzen Löchern (10^5 bis 10^{10} Sonnenmassen) in den Zentren von Wirtsgalaxien. In beiden Fällen können wir ein physikalisches Modell heranziehen, das das System aus Schwarzen Loch und Scheibe adäquat beschreibt. Die Masse des Schwarzen Loches ist sozusagen nur ein Skalenfaktor.

Während das stark erhitzte Plasma in das Schwarze Loch hineinfällt, emittiert es hoch-energetische, elektromagnetische Strahlung, die mit Röntgensatelliten detektiert wird. Ich untersuche eine bestimmte Komponente des $X\gamma$ -Spektrums, die *Eisen-Fluoreszenzlinie* bei Ruheenergie von 6.4 keV. Die charakteristische Form dieser Emissionslinie bildet unmittelbar die physikalische Umgebung des Emissionsortes ab und ist daher ein diagnostisches Werkzeug zum Studium von Aktiven Galaktischen Kernen, Binärsystemen und der Allgemeinen Relativitätstheorie. Eine Untersuchung der Linienprofile ermöglicht Zugang zu Informationen über Temperatur, Druck und Dichte, aber auch chemische Zusammensetzung, Ionisationszustände sowie Topologie und Geometrie des Systems. Weitere Parameter wie der Rotationszustand des Schwarzen Loches, Inklination und Ausdehnung der Scheibe und das Emissivitätsgesetz sind von ebenso großem Interesse. Diese Arbeit soll ein Beitrag dazu sein, das vorherrschende Bild zu ergänzen. Ich erweitere dabei das Scheiben-Standardmodell, indem ich **Materie-Einflüsse (Akkretion) und Ausflüsse (Jets und Winde)** in die Berechnung des Linienprofils miteinbeziehe. Die Auswirkungen auf diese neuen Linienprofile sind signifikant und können für Fits an Daten prominenter stellarer oder galaktischer Objekte herangezogen werden. Letztendlich bekommen wir so ein detail-

liertes Bild von der direkten Umgebung Schwarzer Löcher und eröffnen ein Fenster zum Studium relativistischer Physik.

2 Kompakte Objekte in Aktiven Galaktischen Kernen und Röntgendoppelsternsystemen

Als *Aktive Galaktische Kerne (AGK)* oder *Active Galactic Nuclei (AGN)* bezeichnet man die innerste Kernregion intrinsisch sehr heller Galaxien. Aus Geschwindigkeitsmessungen und dem Keplerschen Rotationsgesetz kann man eine Kernmasse von 10^5 bis 10^{10} Sonnenmassen abschätzen. Beobachtungen mit dem *Hubble Space Telescope (HST)* untermauern die Vermutung, dass sich in den Zentren von Wirtsgalaxien ganz unterschiedlichen Typs nur ein *supermassereiches Schwarzes Loch* befinden kann, das die Materie des Wirtes akkretiert. *Akkretion*, also letztendlich Gravitation, ist ein äußerst effizienter Mechanismus, um bis zu 20% der Ruheenergie in Strahlungsenergie umzuwandeln, viel effizienter als die thermonukleare Fusion im Innern von Sternen mit etwa 0.7% Umwandlungseffizienz. Diese Vorstellung von AGN wurde in den Siebziger Jahren etabliert und geht auf eine Idee von *Zeldovich, Novikov und Salpeter* aus dem Jahr 1964 zurück.

Da die Materie Drehimpuls besitzt, geschieht Akkretion nicht sphärisch-symmetrisch, sondern axialsymmetrisch in einer Scheibe. Durch Viskositäten und Konvektion in der Scheibe kann der Drehimpuls nach außen, und die Scheibenmaterie nach innen, in das Schwarze Loch, transportiert werden. Schließlich passiert die Materie nahe der Lichtgeschwindigkeit den Ereignishorizont. Dabei treten eine Reihe von physikalischen Effekten auf. Vor allem aber strahlt die Materie hochenergetische, elektromagnetische Strahlung ab, die mit irdischen Teleskopen und Satelliten detektiert werden kann. In der Erdumlaufbahn befinden sich zur Zeit einige Röntgensatelliten (ASCA, RXTE, BeppoSax, Chandra, XMM-Newton, zukünftig Constellation-X), die unter anderem die Spektren der AGN messen. Das Röntgenspektrum von AGN besteht aus verschiedenen Komponenten. Eine davon, die Reflexionskomponente, auf die ich detailliert später eingehen werde, wurde erstmals von dem japanischen Röntgenobservatorium *Ginga* entdeckt (*Pounds et al. 1990* [51]; *Matsuoka et al. 1990* [39]). Eine ausreichende spektrale Auflösung und damit erste Evidenzen für Relativität offenbarten jedoch erst Daten des Satelliten *Advanced Satellite for Cosmology and Astrophysics (ASCA)*. *Tanaka et al. (1995)* [64] extrahierten bei dem Objekt MCG-6-30-15, einer Seyfert-Galaxie vom Typ 1, ein Eisen-Emissionslinienprofil und deuteten sie mit Fluoreszenzprozessen in unmittelbarer Nähe eines supermassereichen Schwarzen Loches. Die Gruppe um *Andrew C. Fabian (X-Ray Astronomy Group, Cambridge University)* war maßgeblich an den anschließenden Untersuchungen der Spektrallinien beteiligt.

2.1 Taxonomie der AGN

AGN werden nach ihren Eigenschaften in eine Reihe von Typen klassifiziert, die ich im folgenden kurz vorstellen möchte.

Seyfert-Galaxien: Die *Seyfert-Galaxien* gehören zu den eher unscheinbaren Vertretern der AGN, vergleicht man sie mit den Strahlungsleistungen und Variabilitäten der Quasare oder BL Lac Objekte. In meiner Arbeit werde ich mich auf das Studium dieser AGN-Objekte beschränken, weil die detaillierte Auflösung der Eisen-Emissionslinien der weit

entfernten Quasare ein astrophysikalisches Problem darstellt. Neuerdings belegen jedoch *BeppoSax*-Observationen (*Mineo et al. 2000* [42]) die Existenz einer Struktur bei 6 bis 7 keV, und alle Indizien sprechen dafür, dass man dies mit der Fe- K_{α} -Linie assoziieren kann. Wie von einem theoretischen Standpunkt erwartet, bestätigt sich hier das vorherrschende Bild der AGN, nämlich dass bei sämtlichen AGN-Typen sehr ähnliche $X\gamma$ -Spektren zu erwarten sind.

Seyfert-Galaxien sind nach *Carl Seyfert* benannt, der sie 1943 entdeckte. Er erkannte, dass sie einen helleren Kern mit hoher Flächenhelligkeit und hochangeregten Emissionslinien als normale Spiralgalaxien zeigen. Diese AGN sind ausschließlich in *Spiralgalaxien* beheimatet, und die Emissionsregion hat eine Größe von maximal einem Lichtjahr. Seyfert-Galaxien zeigen Variabilitäten auf der Zeitskala von einem bis mehreren Jahren um den Faktor 2. Das Spektrum ist geprägt von

- einer kontinuierlichen Energieverteilung vom fernen Infrarot (FIR) bis Ultraviolett (UV),
- Komponenten thermischer *Comptonisierung*,
- breiten, nicht-thermischen Emissionslinien,
- Einbrüche durch 'warme' Absorber,
- viel geringeren Energien im Radiobereich
- sowie UV- und IR-Exzessen.

Im Detail möchte ich auf spektrale Eigenschaften und deren Physik in Kapitel 2.4 eingehen. Ausgeprägte Teilchenströme, die Jets, sind bei Seyfert-Galaxien, falls vorhanden, eher schwach ausgeprägt, vergleicht man sie mit denen der Quasare.

In Kapitel 2.2 werde ich die beiden Typen von Seyfert-Galaxien beschreiben. Bekannte Vertreter dieser AGN sind NGC 1068 (die hellste Seyfert-Galaxie in *Cetus*, dem *Walfisch*), NGC 4151, MCG 6-30-15, NGC 4051, NGC 7383 und ESO 382-G9.

LINER: *LINER* bezeichnet *Low-Ionization Nuclear Emission Line Region*. Dabei handelt es sich um ähnliche AGN wie den *Seyfert-2 Galaxien* (Beschreibung in Kapitel 2.2), aber sie haben eine weit geringere Kernleuchtkraft. Die Spektren zeichnen sich außerdem durch Abwesenheit breiter Emissionslinien aus. Schmale Emissionslinien sind beobachtbar, mit relativ starken Linien von OI, OII, SII, NII und relativ schwachen Linien von OIII. Ein prominenter Vertreter dieses Typs ist *LINER NGC 4258*.

Quasare und QSOs: Quasare gehören zu den bekanntesten Vertretern der AGN, und sie sind auch die hellsten mit visuellen Helligkeiten $M_v < -23$. Sie wurden 1963 entdeckt und kommen in Wirtsgalaxien fast jeden Typs vor, meistens jedoch in *hellen, elliptischen Galaxien*. Sie erscheinen optisch sternartig, was ihnen den Namen *quasi-stellare Radioquelle* oder kurz Quasare einbrachte. Weitere spektrale Eigenschaften sind ein starkes (blaues) Kontinuum, hell im Röntgenbereich, Infrarot- und Ultraviolett-Exzesse, teilweise zeitliche

Variabilitäten, keine Absorptionslinien, aber sehr breite Emissionslinien. *Maarten Schmidt* erkannte 1963, dass es sich dabei um *stark rotverschobene* Emissionslinien handelt.

Quasare unterscheidet man in *radio-leise* und *radio-laute* Quellen. Etwa 90% der Quasare sind radio-leise. Radio-laute Quasare zeigen wie die *Radiogalaxien* ausgedehnte Radio-Strukturen mit hellen Randgebieten (*Lobes etc.*).

Als QSOs bezeichnet man *quasi-stellare Objekte*, die optisch sehr hell, aber im Radiobereich eher schwach sind. Heute werden QSO häufig auch als Quasare bezeichnet.

Ein weitere interessante Eigenschaft in Bezug auf die Jets, die Teilchenströme aus der Schwarzes Loch-Scheiben-Region sind, wurde in den 70er Jahren entdeckt: die *scheinbare Überlichtexpansion*. Hierbei wurde festgestellt, dass die Emissionsknoten in den Jets sich *scheinbar mit Überlichtgeschwindigkeit* auf den irdischen Beobachter zu bewegen können, falls der Jet fast genau auf den Beobachter zeigt (kleine Inklinationen). Diese Effekte sind bei stark relativistischen Bewegungen der Jets möglich und vollkommen konsistent mit der Speziellen Relativitätstheorie (SRT). Geschwindigkeitsmessungen an den Emissionsknoten der Quasare 3C 273 und 3C 120 belegen dieses Phänomen.

Quasare gehören mit Rotverschiebungen bis zu $z = 5.8$ zu den am weitesten entfernten Objekten im Universum. Neuerdings ist ein Wettstreit entbrannt, ob Quasare oder 'normale' Galaxien weiter entfernt sind, und die Meldungen neuentdeckter Entfernungsrekorde überschlagen sich. Der aktuelle Spitzenreiter ist eine Galaxie mit $z \approx 7$.

Radiogalaxien: Wie der Name verrät, sind diese Objekte besonders intensiv im Radiobereich des Spektrums, was im Jargon der Astronomen auch als *radiolaut* bezeichnet wird. Sie haben eine eher niedrige Leuchtkraft $M_v > -24$ und sind meist *elliptischen Typs*. Das Emissionslinienspektrum ähnelt sehr den *Seyfert-Galaxien*. Radiogalaxien wurden 1949 von *Bolton* entdeckt. Die Größe des Gebietes der Radio- bis optischen Emission ist im Bereich einiger Lichtmonate. Fits im Spektrum mit einfachen Potenz-Gesetzen lassen eine Klassifizierung der Gebiete je nach spektralem Anstiegsverhalten des Flusses zu: so kennt man 'flache' (kleiner Exponent) und 'steile' (großer Exponent) Spektren.

Mittels großer Radioteleskopen und Verfahren der Apertursynthese (*Very Large Array*, *VLA*, in New Mexico oder weltweit *Very Long Baseline Interferometry*, *VLBI*) ist es sogar möglich, Strukturen in den Radiogalaxien zu erkennen. So gibt es ein Kerngebiet (flaches Spektrum) assoziiert mit dem Schwarzen Loch und großräumige Strukturen (steiles Spektrum) wie die *Jets*, bogenförmige Strukturen, den *Lobes* sowie sehr heiße, punktförmige Gebiete, den *Hot Spots*.

Eine Differenzierung aufgrund dieser Strukturen erlaubt die *Fanaroff-Riley-Klassifikation*. Sie gliedert in Typ I und II und geht auf strukturelle Unterschiede in Abhängigkeit von der Leuchtkraft zurück.

Weiterhin splitteln die Radiogalaxien in Unterklassen, den *Broad Line Radio Galaxies (BLRG)* und *Narrow Line Radio Galaxies (NLRG)*. Erstere zeigen breite Emissionslinien und ein blaues (nicht-stellares) Kontinuum sowie schmale Emissionslinien, letztere zeigen ausschließlich schmale Emissionslinien.

Morphologisch ähneln die Radiogalaxien sehr den *Quasaren*, wenn auch die Längenskala unterschiedlich ist.

BL LAC-Objekte: *Hoffmeister* entdeckte 1929 optisch einen 'veränderlichen Stern', der keiner war, wie sich später herausstellen sollte. Die starke Variabilität der BL Lac-Objekte in allen spektralen Bereichen war auffällig und so erhielten sie einen Namen typisch für variable Sterne: BL Lac (*Lac* steht für *Lacerta* und bezeichnet das Sternbild *Eidechse*). Erst viel später erkannte man, dass es sich nicht um Sterne sondern Galaxien handelt! 1968 wurden BL Lac-Objekte als AGN etabliert. Aus der Zeitskala der Variabilität lässt sich die Ausdehnung des Emissionsgebietes abschätzen, was für die BL Lac-Objekte auf ein Gebiet kleiner als ein Lichttag führte.

Die spektralen Eigenschaften sind ein starke Helligkeit im blauen Bereich, extrem polarisiertes Kontinuum ($> 3\%$), Abwesenheit optischer Emissions- und Absorptionslinien, starke Variabilität auf kurzen Zeitskalen und maximale Abstrahlung im Infrarot (IR) und $X\gamma$ -Bereich sowie hohe Helligkeiten im Radiobereich. Die Wirtsgalaxien sind ausschließlich *elliptischen Typs*. *Jets* lassen sich nicht nachweisen. Die Nicht-Existenz von Linien deutet auf eine fehlende Gasscheibe hin, was ebenfalls mit der Vorstellung von Ellipsen übereinstimmt: im Laufe ihrer langwierigen Entwicklung wurde das Gas fast vollständig aufgebraucht.

Heute sind einige hundert dieser Objekte bekannt. Die *Blazare* hingegen sind eine Verschmelzung von BL Lac-Objekt und Quasar.

Es existieren weitere AGN-ähnliche Typen, die aber nicht im strengen Sinne den AGN zuzurechnen sind, so zum Beispiel *Starburst-Galaxien*, *Markarian-Galaxien* und *Ultraluminous Infrared Galaxies (ULIRGs)*.

2.2 Das AGN-Paradigma und Unifikation

Die Topologie der AGN kann man relativ gut vereinheitlichen. Abbildung 1 zeigt alle wesentlichen Komponenten. In der Äquatorialebene befindet sich ein geometrisch dickes Objekt, der *Staubtorus*, der bei hohen Inklinationen den Kern des AGN optisch verdecken kann. Der innere Bereich ist jedoch dominiert durch eine geometrisch dünne Akkretionsscheibe, die durch eine heiße *Korona* mit harter Röntgenstrahlung beleuchtet wird (siehe nächstes Kapitel). Da der Absorptionsquerschnitt mit der Frequenz ν^{-3} abfällt, bleibt der Kern im UVX-Bereich sichtbar. Man unterscheidet im Spektrum Bereiche mit breiten (BLR) und solche mit schmalen Emissionslinien (NLR). Mit der Deutung als *Doppler-Verbreiterung* sprechen erstere für hohe Geschwindigkeiten bis zu einigen $10^4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ des Plasmas, letztere für kleine Geschwindigkeiten. Die BLR werden bei hohen Inklinationen durch den Staubtorus verdeckt, und tauchen so neben den NLR im Spektrum nicht auf. Bei kleinen Inklinationen sind NLR und BLR sichtbar. Unter bestimmten Umständen kommt es zur Ausbildung von Jets, die immer *senkrecht* zur Akkretionsscheibe orientiert sind. Auf einigen 10^2 Gravitationsradien strömen die Jets radial nach außen und werden dann kollimiert zu einem engeren Bündel. Im innersten Bereich spiraliert Plasma in einer Scheibe in ein Schwarzes Loch hinein. Wie hydrodynamische Modelle zeigen, wird das Plasma kurz vor Erreichen des Ereignishorizontes durch innere Viskositäten so stark abgebremst, dass es quasi-sphärisch hineinfällt.

Man kann zwei Typen von Seyfert-Galaxien unterscheiden:

- Bei Typ 1 schaut der Beobachter senkrecht auf das Schwarz Loch-Scheiben System,

The Active Galaxy Paradigm

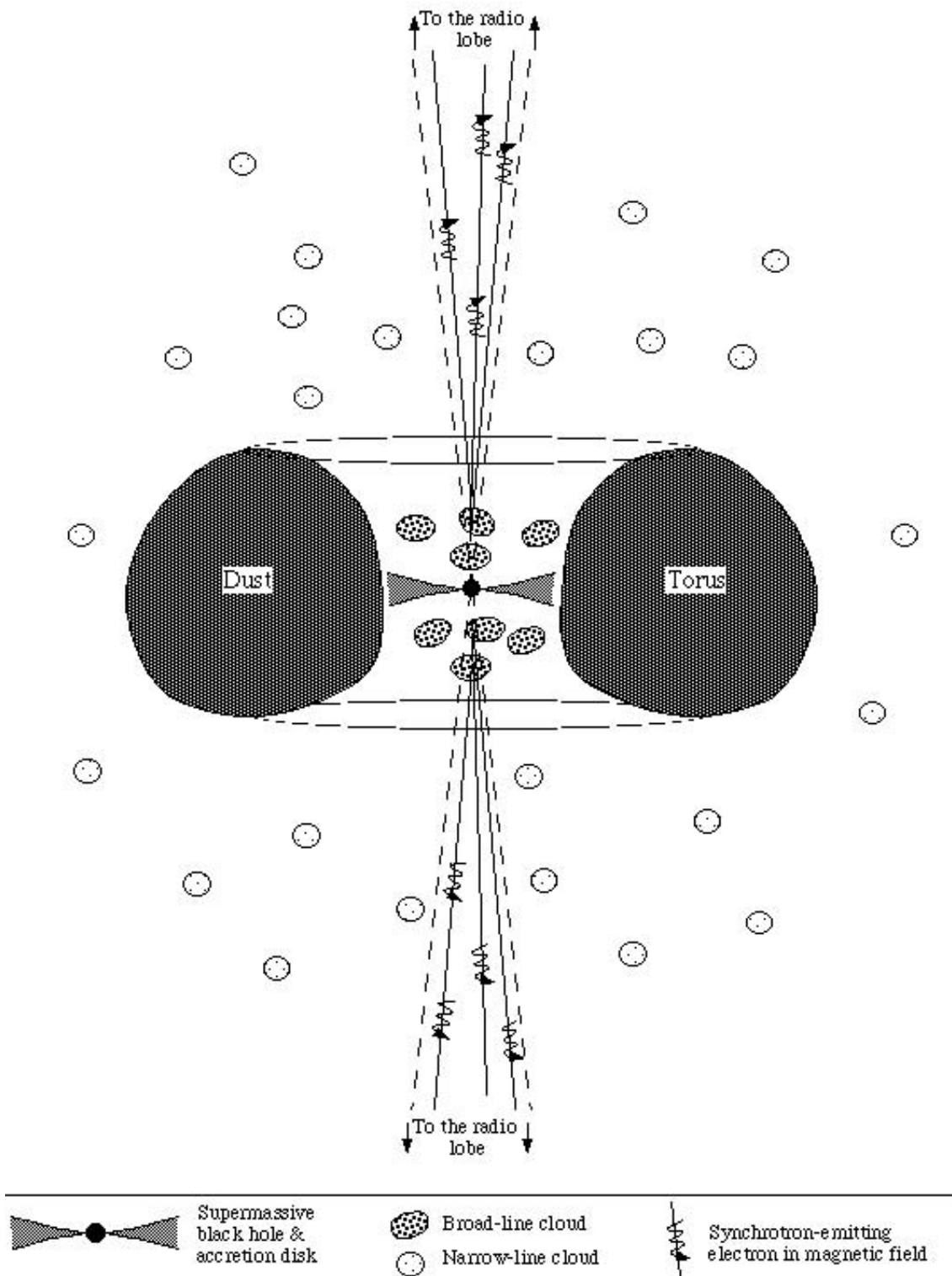


Abbildung 1: Das AGN-Paradigma mit Schwarzem Loch, Scheibe, Staub-Torus und Jets

was direkt den Blick in den Kern zulässt. Es handelt sich also um eine geringe Inklination. BLR und NLR sind messbar.

- Typ 2 ist bei hoher Inklination nahe 90° sichtbar, und der Beobachter schaut auf die Scheibenkante, wodurch der Staubtorus das Innere verdeckt. Es treten nur NLR auf.

Anfangs dachte man, dass es sich um unterschiedliche Typen von AGN handele. In der *Unifikation der Seyfert-Galaxien* wurde die Dichotomie aufgehoben und man erkannte die gleiche zugrundeliegende Physik, aber eine andere Orientierung des Systems zum Beobachter. Natürlich existieren daher auch intermediäre Typen, wie 1.2 etc., je nach Inklination. *Osterbrock* klassifizierte diese nach ihrem Wasserstoff-Spektrum.

2.3 Topologie und Modellbildung

Aus der Messung und Interpretation der Spektren der AGN in allen elektromagnetischen Bereichen erhofft man sich eine Enthüllung der Geometrie des Systems sowie ablaufender physikalischer Prozesse. Ziel ist es, ein *konsistentes Modell* dieser Systeme aufzubauen. Im folgenden möchte ich auf einzelne Strukturen eingehen und schließlich die *Dynamik* solcher Systeme klären. Abbildung 2 vermittelt einen Eindruck der Topologie.

- Schwarzes Loch und Scheibe

Die vorherrschende Meinung des 'Motors' der AGN, die diese extrem hohen Leuchtkräfte erzeugen, ist die Akkretion auf ein supermassereiches Schwarzes Loch. Bei diesem Mechanismus wird gravitative in radiative Energie umgesetzt. Da die Materie Drehimpuls besitzt, geschieht der Einfall nicht sphärisch-symmetrisch, sondern axialsymmetrisch in einer Scheibe. Durch Viskositäten und Konvektion in der Scheibe wird der Drehimpuls nach außen und die Materie nach innen transportiert, bis sie letztlich in das Schwarze Loch hineinfällt.

Die Akkretionsscheibe ist 'kalt' und *geometrisch dünn*, die relative Skalenhöhe H/R beträgt nur etwa 10^{-1} bis 10^{-3} . Im Innenbereich, direkt vor dem Schwarzen Loch, mit quasi-sphärischer Geometrie, ist die heiße, ausgedehnte *Korona* mit toroidaler Gestalt, die die hochenergetische Primärstrahlung liefert. Die weichen Photonen der kalten Scheibe streuen im *inversen Compton-Effekt* an den heißen Elektronen im Plasma der Korona, gewinnen so an Energie und kühlen daher die Elektronen. Andererseits trifft die hochenergetische Primärstrahlung direkt auf die kalte Scheibe und regt die darin enthaltenen Ionen zur *Fluoreszenz* an. Untersuchungen des Reflexionsvermögens der harten Primärstrahlung an der dünnen Akkretionsscheibe in Röntgendoppelsternen (*Gilfanov et al. 2000* [25]) werden so interpretiert, dass die geometrisch dünne Scheibe bis zu einem gewissen Grad in die Korona hineinragt und so eine *Sandwich*-Konfiguration bildet. Variabilitäten dieses Reflexionsvermögens lassen außerdem auf eine räumliche Oszillation des Scheibeninnenradius schließen. Es ist zu erwarten, dass diese Konfiguration auch in AGN auftritt.

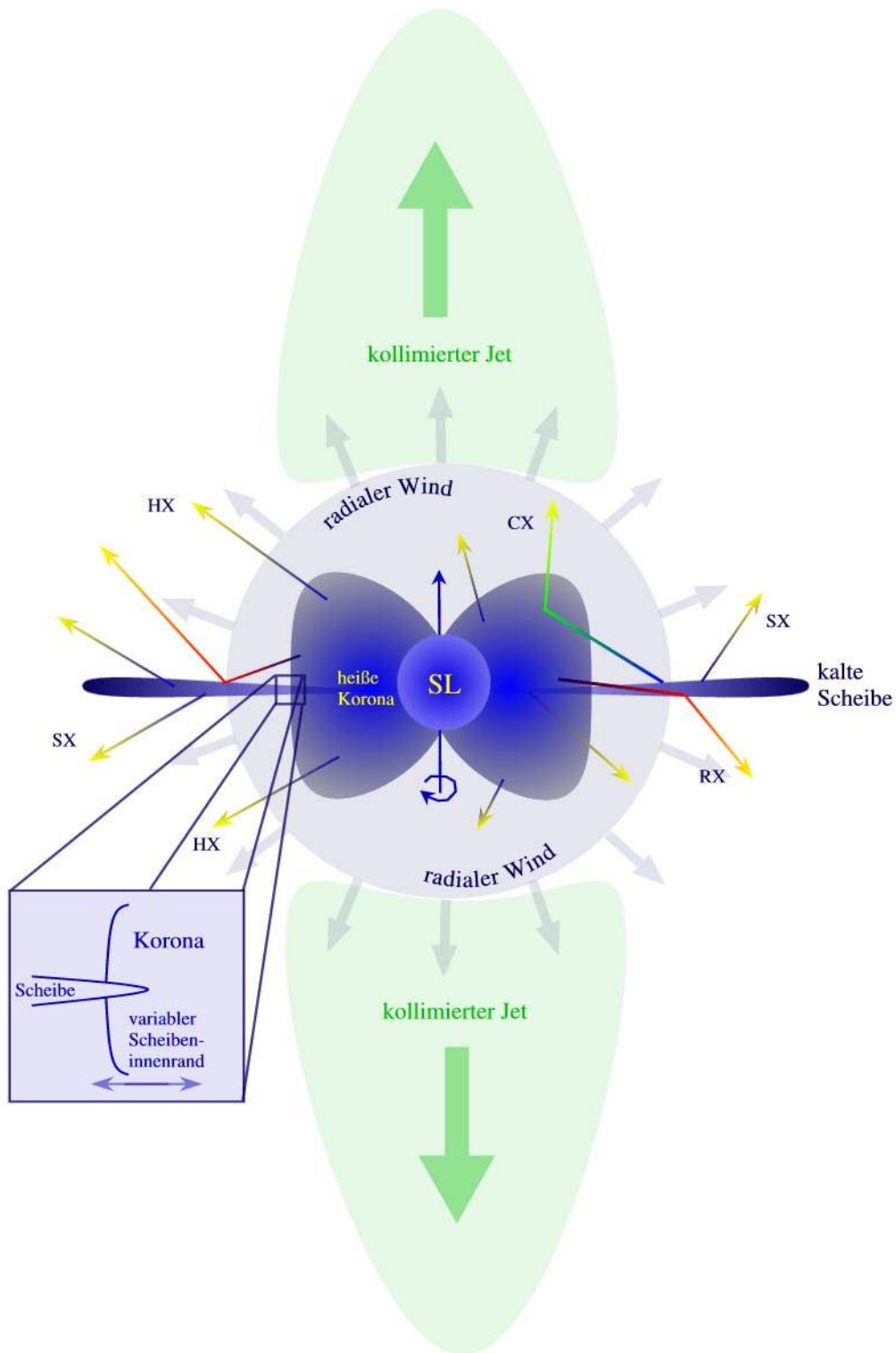


Abbildung 2: Schema der AGN-Topologie mit SL: Schwarzes Loch, HX: harte, SX: weiche, CX: Comptonisierte und RX: reflektierte Röntgenstrahlung (*A. Müller, 2000*)

Der Beobachter erhält so einen 'Cocktail' aus direkten, harten wie weichen, gestreuten und fluoreszierten Photonen, also ein komplexes Spektrum verschiedener Komponenten. Auf die einzelnen Komponenten gehe ich in Abschnitt 2.4 ein.

- Akkretion

Als Akkretion bezeichnet man den Einfall der Materie auf das zentrale Objekt, hier also das Schwarze Loch. Standardscheibenmodelle gehen davon aus, dass der innere Scheibenrand durch die *marginal stabile Bahn* (siehe Abschnitt 3.2) begrenzt ist. Die marginal stabile Bahn r_{ms} ist der kleinste Radius im System des Schwarzen Loches, wo noch eine stabile Rotation möglich ist. Dieses Modell ist jedoch falsch, da es die Akkretion nicht korrekt berücksichtigt! Auf diese Weise würde in der Scheibe eine 'künstliche' Öffnung geschaffen, die real nicht vorhanden ist. Reale Scheiben akkretieren, und die Materie bewegt sich über die marginal stabile Bahn hinaus auf das Schwarze Loch zu bis auf den Radius des *Ereignishorizontes* r_H . Außerhalb r_{ms} rotiert die Materie Keplersch, also mit einem Rotationsgesetz Ω_{Kep} proportional $r^{-3/2}$. Innerhalb r_{ms} rotiert die Materie allerdings mit *konstantem* spezifischen Drehimpuls l_{in} , den ich in meinem Modell für Akkretion mit $l_{Kep}(r_{ms})$ ansetze.

Wie Abbildung 2 zeigt, ist es allerdings möglich, dass der Innenrand der Scheibe bei einigen Gravitationsradien vor dem Schwarzen Loch anzusetzen ist, weil sich im Innenbereich die ausgedehnte Korona befindet. Hier findet dann aufgrund zu hoher Temperaturen keine Fluoreszenz mehr statt. Wie groß die Region tatsächlich ist, die die Eisen-Emissionslinie emittiert, ist von Objekt zu Objekt unterschiedlich.

Im allgemeinen berücksichtigt man die Akkretion mit einer radialen Drift, also einer nicht-verschwindenden Komponente von u^r , der räumlichen radialen Komponente der 4er-Geschwindigkeit. In Kapitel 3.4.3 werde ich auf die verschiedenen Geschwindigkeitsfelder des Plasmas näher eingehen.

- Winde

Winde sind eine mögliche Form von Ausflüssen, die dem Schwarzes Loch-Scheiben-System entspringen können. Als Winde bezeichnet man immer Teilchenschauer, wie sie auch bei der Sonne bekannt sind. Ich diskutiere in diesem Zusammenhang die *Scheibenwinde*, weil sie direkt von der Akkretionsscheibe 'abdampfen'. Ursache ist meist eine **Evaporation**, die dort lokalisiert ist, wo die kalte Scheibe auf die heiße Korona trifft. An dieser Kontaktfläche sehr unterschiedlicher Temperaturen (bis zu Faktor 10^3 Unterschied!) kommt es zu konvektionsartigen Strömen, die poloidale Geschwindigkeitskomponenten haben können und so maßgeblich die Plasmabewegung beeinflussen können. Andererseits geht durch eine Reihe kernphysikalischer Prozesse ohnehin ein ständiger Teilchenstrom von der Scheibe aus, der eine weitere Komponente des Scheibenwindes ausmacht. Wenn dieses evaporierte Material ionisiertes Eisen ist, trägt es demzufolge zur beobachteten Emissionslinie bei. In welchem Maße dies ein signifikanter Beitrag ist, muss an verschiedenen Quellen untersucht werden.

- Jets

Jets sind keulenförmige unter Umständen sehr ausgedehnte Strukturen, die wohl die größten Teilchenbeschleuniger des Universums sind. Sie sind nicht nur bei AGN zu

beobachten, sondern existieren auch auf der stellaren Längenskala bei jungen Sternen, wie *T Tauri-Sternen* oder *Herbig-Haro-Objekten*.

Jets sind immer mit einer Akkretionsscheibe assoziiert, die sie mit Materie füttert, weshalb man auch von einer *Jet-Scheiben-Symbiose* spricht (*Falcke & Biermann, 1995 [23]*). Der größte Teil der Materie fällt jedoch in das Schwarze Loch oder das zentrale Objekt des Systems. Der heutige Stand der Forschung besagt, dass in starkem Maße Magnetfelder an der Ausbildung der Jets beteiligt sind. Im *Blandford-Znajek-Effekt* generieren externe Ströme, die zum Beispiel in der Scheibe fließen, ein elektromagnetisches Feld zwischen Äquator und Polen des Schwarzen Loches. Diese poloidalen Felder beschleunigen nun Plasma entlang der Feldlinien und werden als Ursache für Jets angesehen: die rotierenden Magnetfelder entreißen der Akkretionsscheibe Plasma und beschleunigen es nahezu auf Lichtgeschwindigkeit. Magnetfelder könnten auch die Rotation von Schwarzen Löchern bremsen und so Rotationsenergie entziehen. Diese Energie lässt die Köpfe der Jets von Radiogalaxien im Radiobereich die gesamte Galaxie überstrahlen. Dies rechtfertigt letztendlich anspruchsvolle *magnetohydrodynamische (MHD) Modelle*, wie sie an der Landessternwarte erforscht werden. Ältere Modelle, die davon ausgehen, dass Jets Gas- oder Strahlungsdruckgetrieben sind, reichen als alleiniger 'Motor' nicht aus.

Jets können ein- oder beidseitig auftreten und sind immer senkrecht zur Scheibe orientiert. Es handelt sich hierbei um einen Materie-Ausfluss, der den innersten Bereich des AGN verlässt. Dieses Ausströmen ist anfangs radial und wird im Außenbereich (ab etwa 100 Gravitationsradien) kollimiert. An den Jets selbst kann *keine Fluoreszenz* stattfinden, weil sie viel zu heiß sind und das Jet-Plasma vollständig ionisiert sein wird. Dieser Umstand lässt einige Kollaborationen eher zu dem Schluss verleiten, dass auch der Jet Quelle harter Röntgenstrahlung sein könnte, die den Fluoreszenz-Prozess in der 'kalten' Scheibe triggert. Die Jet-Struktur beeinflusst erheblich das Geschwindigkeitsfeld im inneren Bereich bis etwa zur Bahn marginaler Stabilität. Ich ziehe sie in dieser Arbeit in Betracht, da sie je nach Inklination einen wesentlichen Beitrag zur charakteristischen Form der Emissionslinien von AGN leisten können. Die Inklination ist daher entscheidend, weil sie die Orientierung des Jets zum Beobachter bestimmt. Eine plausible Erwartung ist eine signifikante Erhöhung der Blauverschiebung durch den *radialen Doppler-Effekt*, wenn der Jet auf den Beobachter zeigt. In Kapitel 5, das Ergebnisse der Simulationen behandelt, werde ich demonstrieren, dass dies tatsächlich der Fall ist: am blauen Flügel der Linie gibt es dann stufenartige Strukturen.

Extragalaktische, relativistische Jets sind ein gut untersuchtes Forschungsgebiet der Radioastronomie. Moderne Messmethoden unter Zuhilfenahme der Apertursynthese, die entweder transkontinental (*Very Long Baseline Interferometry, VLBI*) und seit kurzem sogar weltraumgestützt (*Very Long Baseline Interferometry Space Organisation Program, VSOP*) durchgeführt werden, treiben die Auflösung in den Mikrobogensekunden-Bereich (μas) und ermöglichen so eine detaillierte Abbildung der Jet-Strukturen, vor allem bei radio-lauten Quasaren und Radiogalaxien.

2.4 $X\gamma$ -Spektren

Die Messung der Spektren im Bereich der UVX γ -Strahlung ist ein zur Zeit rapide wachsendes Forschungsgebiet. Die Raumfahrttechnik stellt heute Satelliten der neuen Generation vor, wie ASCA, Chandra und XMM-Newton, die die ersten Typen seit den Siebziger und Achtziger Jahren, wie IUE, IRAS, UHURU, EINSTEIN, Ginga, ROSAT, CGRO etc., in Auflösung und Empfindlichkeit um ein Vielfaches übertreffen. Die Röntgenobservatorien Constellation-X und XEUS werden dies schon in naher Zukunft weiterhin steigern.

Ich möchte hier auf die *spektralen Eigenschaften der Seyfert-Galaxien* eingehen und die direkte Verbindung zur Physik herstellen. Der hier diskutierte Bereich soll von einigen eV (optisch) bis zu einigen MeV ($X\gamma$) Photonenenergie reichen und zeigen, wie die Abhängigkeit des spektralen Flusses F_ν über diesen Bereich aussieht. Das messbare, globale Spektrum kann in diverse Komponenten eingeteilt werden, die auch auf unterschiedlichen, physikalischen Effekten beruhen. Im folgenden möchte ich darüber eine Übersicht geben.

Kontinuum Das Kontinuum ist dem gesamten Bereich des Spektrums überlagert, wobei bei einigen 100 keV ein exponentieller *Cut-Off* zu erkennen ist. Im Bereich von 0.1 bis etwa 100 keV ist das Kontinuum nahezu konstant. Im Kontinuum steckt der größte Energiebeitrag zum Spektrum.

Physikalisch gesehen ist das Kontinuum das Ergebnis der *ungesättigten, inversen Compton-Streuung* kalter Photonen (*photon input*) an heißen Elektronen der Korona, die dadurch Energie gewinnen und so das Korona-Plasma kühlen. Dieser Sachverhalt heißt *thermische Comptonisierung*. *Sunyaev & Titarchuk (1980)* [63] proklamierten diese Möglichkeit für die Interpretation des Spektrums zuerst. Bis dato wurden nicht-thermische Modelle favorisiert. Die 'Saatphotonen' für Comptonisierung können verschiedenen Prozessen entstammen. Hierbei ist ein modifiziertes Planck-Spektrum der Scheibe denkbar oder Bremsstrahlung. Comptonisierung wird von der *Kompaneets-Gleichung* beschrieben, die eine Integro-Differentialgleichung ist und nur unter bestimmten Näherungsverfahren, die auf das jeweilige Problem zugeschnitten sind, lösbar ist. Knapp gesagt ist das Problem zu lösen, wenn eine vorgegebene Phasenraumverteilung Photonen auf eine vorgegebene (z. B. thermische) Verteilung von Elektronen trifft, wobei mehrfache Streuakte zulässig sind. *Rybicki & Lightman (1979)* [57] haben diese Problematik für einfache Modelle vorgestellt und gelöst. Entscheidend ist in diesem Zusammenhang der *Compton Y Parameter*, der folgendermaßen definiert ist:

$$Y = (\text{Energietransfer pro Streuakt}) \times (\text{Anzahl Streuungen}) \quad (3)$$

Die Größe dieses Parameters entscheidet über die Frequenz-Domäne und so, ob eine Behandlung mit der Kompaneets-Gleichung nötig wird. So unterscheidet man:

- $Y \ll 1$: modifiziertes Schwarzkörperspektrum
- $Y \sim 1$: ungesättigte Comptonisierung
- $Y \gg 1$: *Wien*-Spektrum

Ein Veranschaulichung der Domänen ist in Abbildung 3 dargestellt. Der interessante, aber numerisch schwierig zu behandelnde Bereich ist gerade $Y \sim 1$, in der Abbildung entspricht dies dem Mittelbereich.

Äußerst aufschlußreich ist der exponentielle *Cut-Off* im Spektrum. Dessen Anpassung mit einer Senkrechten in einer doppel-logarithmischen Auftragung enthüllt, weil er der Theorie zufolge bei kT sitzt, gerade die Temperatur des Plasmas. Man erhält so aus beobachteten Spektren unmittelbar eine Vorstellung über den thermischen Zustand der Emissionsregion bei einem Schwarzen Loch.

Das Kontinuum muss neben den unten beschriebenen Komponenten aus dem Gesamtspektrum herausgerechnet werden, um Emissionslinien zu extrahieren.

Reflexionskomponente Die harte Röntgenstrahlung der Primärquelle, der Korona, trifft auf die Elektronen der kalten Materiescheibe. Dabei findet Compton-Rückstreuung zum Beobachter statt. Compton-Reflexion des harten Potenz-Gesetzes der Eingangsstrahlung formt im Spektrum das charakteristische Kontinuum, das bei etwa 30 keV ein Maximum annimmt (siehe Abbildung 4).

Unterhalb dieser Komponente befindet sich die Eisenlinie bei einer Energie von 6.4 keV im Ruhesystem des Plasmas. Neben Eisen gibt es natürlich auch Fluoreszenzlinien anderer Elemente, die aber nicht so deutlich in Erscheinung treten. Wie Abbildung 5 zeigt, dominiert die Eisen-Linie bei weitem die anderen Elemente und tritt sogar signifikant über dem harten Potenz-Gesetz hervor. In manchen Fällen ist die Erwägung von Nickel interessant. Die Spektrallinien entstammen Fluoreszenzprozessen, auf die ich in einem der nächsten Abschnitte eingehen werde. Die Emissionslinie des Eisens behandle ich als zentralen Teil meiner Arbeit. Sie muss aus dem globalen $X\gamma$ -Spektrum extrahiert werden. Die Seyfert-Galaxien enthalten wie die Topologie in Abbildung 1 zeigt, im äußersten Bereich ein geometrisch dickes Objekt, den ausgedehnten, molekularen Staub-Torus. Es ist denkbar, dass auch an diesem Objekt Reflexion stattfindet. Einige Kollaborationen (*Done, Madejski & Zycki 2000* [15], *Ghisellini, Haardt & Matt 1994* [24]) ziehen diese Möglichkeit in Betracht und ordnen dem Torus einen gewissen Ionisationsgrad zu.

Warme Absorber Absorptionsprozesse an verschiedenen Materialien in der Scheibe sorgen für deutliche Einbrüche im Spektrum im Bereich um

1 keV. 'Warm' bedeutet in diesem Zusammenhang, dass die Absorber ionisiert sind. Vor allem mehrfach ionisierter Sauerstoff absorbiert in dieser Domäne die Strahlung. So werden meist folgende Schwellwerte folgender Absorber angenommen:

- 0.74 keV für OVII
- 0.87 keV für OVIII
- 1.2 keV für NeIX

Die Einbrüche im $X\gamma$ -Spektrum im Bereich unter 1 keV verraten also viel über vorhandene Elemente und deren Ionisationsgrad. Dies gibt wiederum indirekt Aufschluss über die Temperatur im Bereich dieser Absorber.

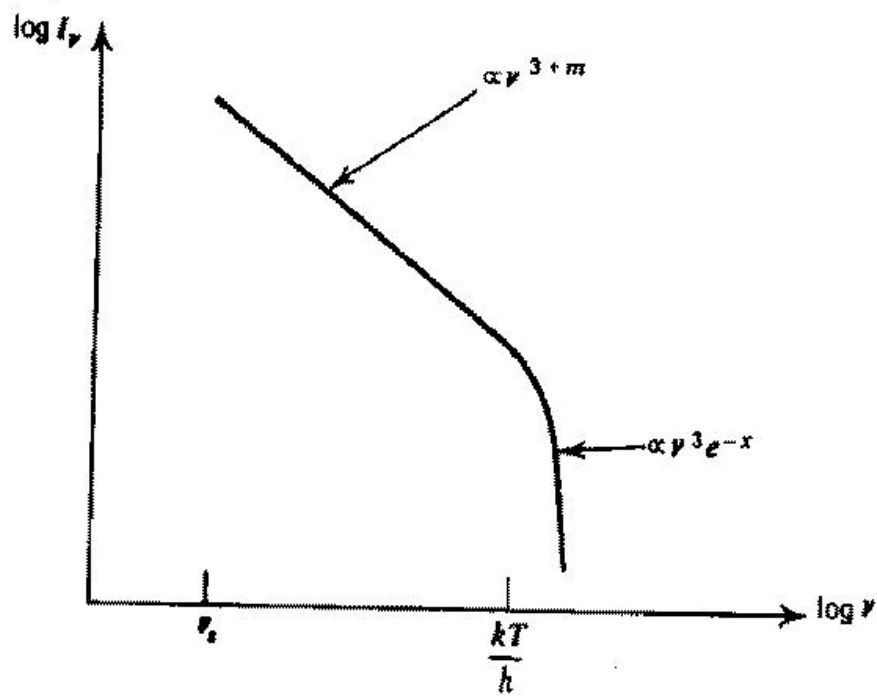
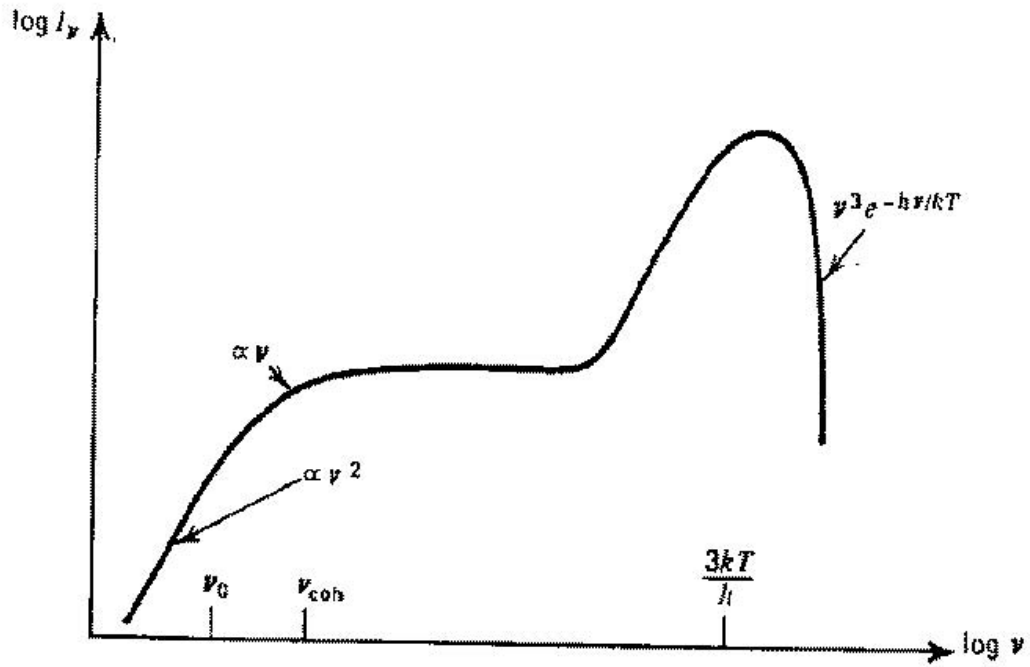


Abbildung 3: Oben: die drei Frequenz-Domänen: modifiziertes Schwarzkörperspektrum ($\propto \nu^2$), ungesättigte Comptonisierung ($\propto \nu$) und Wien-Spektrum ($\propto \nu^3 \exp(-h\nu/kT)$); unten: exponentieller Cut-Off bei der Plasmatemperatur kT (Rybicki G.B. & Lightman A.P., 1979 [57])

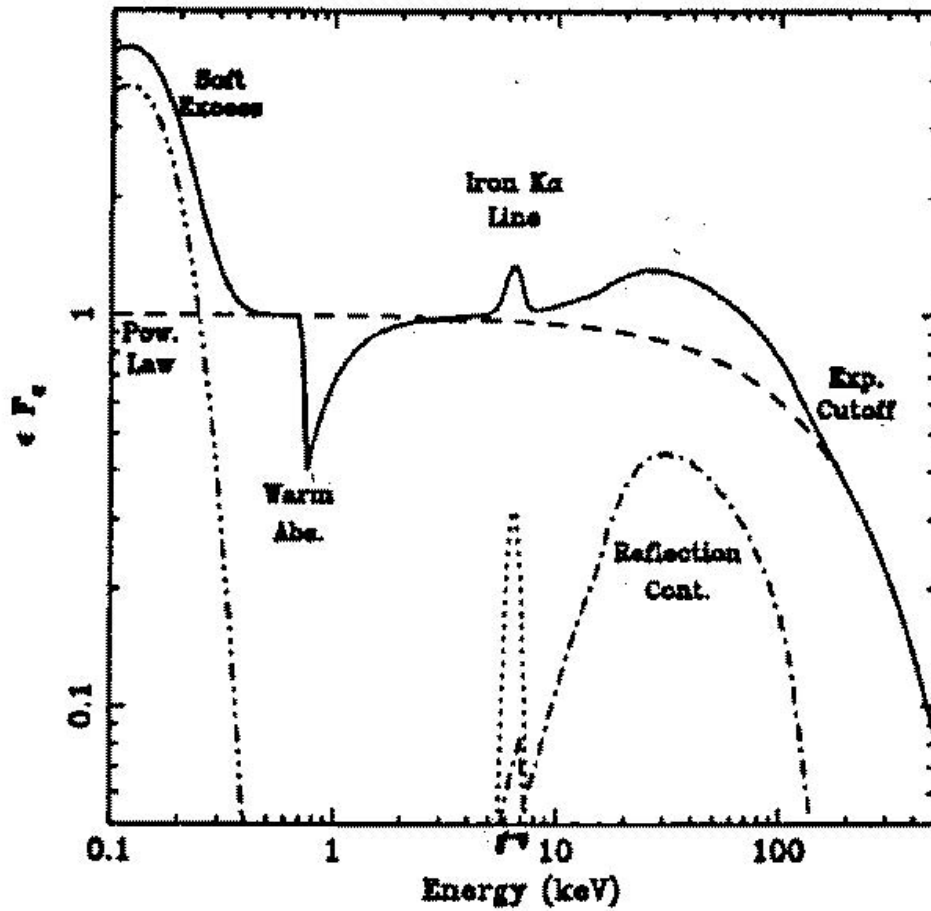


Abbildung 4: Globales Spektrum und spektrale Komponenten im Bereich von 0.1 bis einige 100 keV; durchgezogene Linie: Gesamtspektrum, gestrichelt: 'hartes' Potenz-Gesetz, gestrichelt-mehrfach-punktiert: weicher Exzess, gestrichelt-punktiert: Reflexionskomponente, punktiert: Emissionslinie Fe-K α (*Fabian A.C., 1998 [20]*)

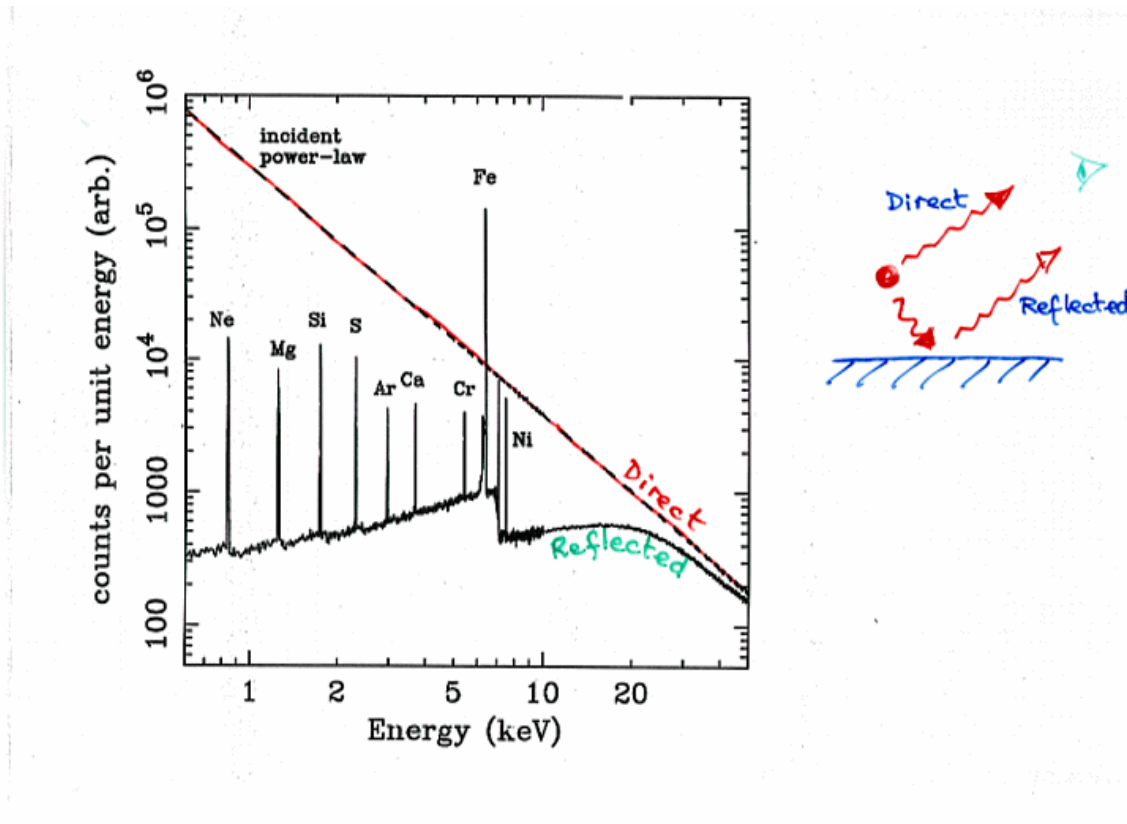


Abbildung 5: Dominanz der Eisen-Emissionslinie (*C.S. Reynolds, 1996* [52])

Weicher Exzess Der weiche Exzess (*soft excess*) verdankt seinen Namen daher, weil er im Spektrum im niederenergetischen Bereich (UV) auftaucht und dort eine deutliche Überhöhung des Flusses zu sehen ist. Auf *Shields (1978)* [60] geht in diesem Zusammenhang die Bezeichnung *big blue bump* zurück. Physikalisch betrachtet, handelt es sich dabei um ein modifiziertes Planck-Spektrum. Der weiche Exzess hängt empfindlich von der Masse des Schwarzen Loches M und der Akkretionsrate auf das Schwarze Loch $\dot{M}$ ab. Am niederenergetischen Ende fällt der Exzess charakteristisch mit dem Absorptionsquerschnitt zur dritten Potenz ab. Am hochenergetischen Ende sind es Thomson-Streuung und relativistische Rotverschiebung, die für einen Abfall sorgen, so dass der Exzess ein Maximum im Bereich um 0.1 keV annimmt. Nicht alle Seyfert-Galaxien zeigen diese Erscheinung.

2.5 Emissionslinien

2.5.1 Fluoreszenz

Fluoreszenz ist der hier entscheidende Prozess, der die prominenten Emissionslinien generiert. Voraussetzung für den Übergang (der Elektronen im Atomverband) ist, dass das fluoreszierende Material **nicht vollständig ionisiert** ist. Dies ist den 'kalten' Scheiben auch gegeben: bei Temperaturen von einigen 10^5 bis 10^7 keV, wie sie in den Scheiben der Seyfert-Galaxien typisch sind, ist Eisen nicht vollständig ionisiert, zumindest sind die inneren Schalen des Atoms K und L noch besetzt. Die Produktion der Fluoreszenzlinie findet durch photo-elektrische Absorption statt, wo eines der beiden Elektronen der K -Schale die Energie der Röntgenstrahlung aufnimmt. Deren Schwellwert für diesen Vorgang bei neutralem Eisen liegt bei 7.1 keV: erst harte Röntgenphotonen ab dieser Energie lösen den primären Prozess der Absorption aus. Dieser Wert nimmt mit dem Grad der Ionisierung des Eisens zu. Die Absorption macht sich im Spektrum durch einen signifikanten Einbruch um den Wert von 7 keV bemerkbar. Nachdem das Elektron die Energie aufgenommen hat, können nun zwei konkurrierende Mechanismen einsetzen:

- im dominanten Prozess mit 66%iger Wahrscheinlichkeit wird es als *Auger-Elektron* emittiert. Dieser Übergang ist also strahlungslos und reichert das Scheibenplasma mit Elektronen an.
- mit 34%iger Wahrscheinlichkeit setzt nun tatsächlich **Fluoreszenz** ein: ein Elektron der L -Schale geht auf die K -Schale über. Dabei wird ein Photon der Ruhe-Energie 6.4 keV emittiert.

Lediglich zuletzt genannter Prozess liefert uns die 6.4 keV-Photonen, die meist als deutliche Überhöhung im Gesamtspektrum auftauchen. Eine detaillierte Untersuchung zeigt, dass die $K\alpha$ -Linie in zwei Anteile $K\alpha_1$ bei 6.404 keV und $K\alpha_2$ bei 6.391 keV splittet, die ich in der weiteren Diskussion nicht unterscheiden werde. Außerdem existiert eine $K\beta$ -Komponente bei 7.06 keV, ebenso wie eine Ni- $K\alpha$ -Linie bei 7.5 keV. Das besondere Interesse an *Eisenlinien* rührt daher, weil die Effizienz des Übergangs bei anderen Elementen weit weniger hoch ist, wie Abbildung 5 zeigt. Eine Berücksichtigung von Nickel kann erwogen werden (*Wang et al., 2000* [67]). Die kosmische Häufigkeit der Elemente ist ebenfalls von Relevanz. Sie wird meist auch für das akkretierte Plasma angesetzt.

2.5.2 Ionisation

Sowohl das Auftreten von Fluoreszenz, als auch die Form der Fluoreszenzlinie hängen stark vom Ionisationszustand des Eisens ab. Die Elektronenkonfiguration von ^{26}Fe lautet $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^6 4s^2$. Der Schwellwert für Absorption von neutralem Eisen liegt wie bereits erwähnt bei 7.1 keV. Bei ionisiertem Eisen sind die Elektronen weniger effektiv, um die Kernladung nach außen hin abzuschirmen, so dass die Energie des photo-elektrischen Schwellwerts und auch die der Linie ansteigen. So ist die Linienenergie nur dann signifikant über 6.4 keV, wenn die M-Schale bereits unbesetzt ist, zum Beispiel für FeXVII.

Die Fluoreszenzausbeute (*fluorescent yield*), so heißt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der photo-elektrischen Absorption die Emission einer Fluoreszenzlinie und nicht der Auger-Effekt folgt, hängt auch vom Ionisierungsgrad des Eisens ab. Bei Lithium-ähnlichen Eisen (FeXXIV) und Wasserstoff-ähnlichen Eisen (FeXXVI) kann der Auger-Effekt nicht auftreten, weil in der L-Schale nicht mindestens zwei Elektronen vorhanden sind. So wird die Linie für He- und H-ähnliches Eisen durch den Einfang freier Elektronen erzeugt, zum Beispiel durch Rekombination. Die Diskussion der Ionisation offenbart eine faszinierende Erkenntnis: Setzt man kosmische Häufigkeiten voraus, so ist die optische Tiefe für den gebunden-freien Übergang der Absorption größer, aber nahe der *Thomson-Tiefe*. Die Linienproduktion in der durch harte Röntgenstrahlen beleuchteten Scheibenoberfläche findet also nur im Bereich der äußeren Thomson-Tiefe statt; dies ist allerdings nur ein kleiner Bruchteil der Scheibendicke von etwa 0.1 bis 1%! Das bedeutet, dass der Ionisationszustand dieser dünnen Haut maßgeblich die Natur der Eisenlinie bestimmt! Eine genauere Untersuchung der Ionisation findet man in *Matt, Fabian & Reynolds (1997)* [41] und *Ross R.R., Fabian A.C. & Young A.J. (1999)* [56]. In letzter Veröffentlichung wurde mit einer Methode von *Ross & Fabian (1993)* [55] der Strahlungstransport in der oberen Schicht einer ionisierten Scheibe gerechnet, die für die Produktion der Reflexions-spektren verantwortlich ist. Ich möchte nun einige Abbildungen darstellen, die direkt die Linienform in Abhängigkeit von der Ionisation des Materials zeigt, genauer gesagt in Abhängigkeit des Ionisationsparameters ξ . Dieser ist definiert als

$$\xi = \frac{4\pi F_X}{n_H} \quad (4)$$

mit F_X , dem totalen, emittierten Fluss von 0.01 bis 100 keV und n_H , der Protonenzahldichte. ξ entspricht im Prinzip dem Verhältnis von totalem Fluss zur Gasdichte.

Abbildung 6 zeigt die 'Antwort' der ionisierten Scheibe auf das harte Potenz-Gesetz der Primärquelle. Von oben nach unten erkennt man:

- $\xi = 10^5$ Hier ist der Ionisationsparameter am größten. Dies entspricht einem idealen Reflektor: das Primärsignal wird wiedergegeben, und man erkennt das Profil eines Potenz-Gesetzes, nämlich das der harten Eingangsstrahlung aus der heißen Korona. Die Oberflächenschicht der Scheibe ist vollständig ionisiert bis zu hohen Thomson-Tiefen.
- $\xi = 3 \times 10^4$ Bei diesem kritischen Wert des Ionisationsparameters werden erste Anzeichen der $K\alpha$ -Emission und der K-Schalen-Absorption sichtbar. Die hohen Thomson-

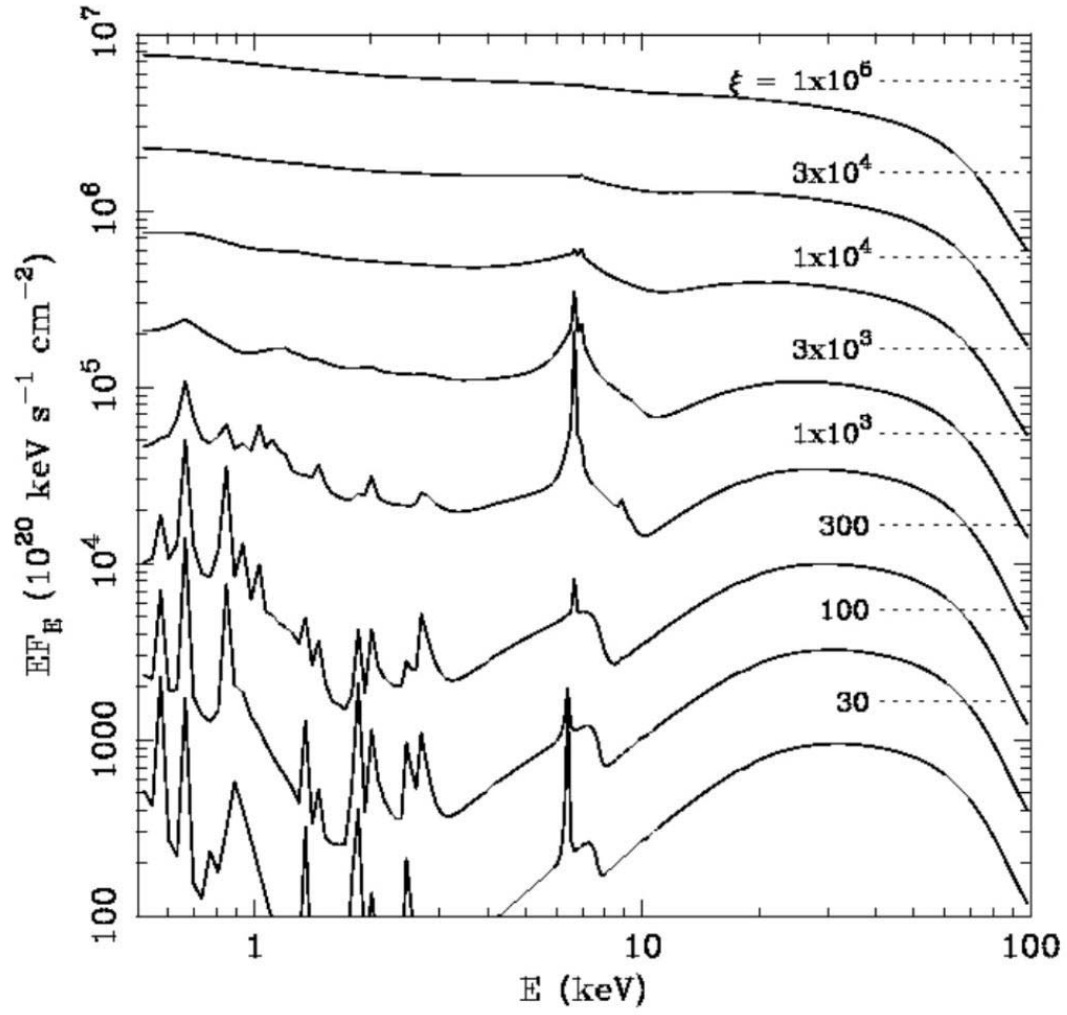


Abbildung 6: Reflexionsspektren einer uniformen Scheibe mit Spektralindex $\Gamma = 2$ für verschiedene Ionisationsparameter (*Matt et al., 1993 [40], 1996 [38]*)

Tiefen von $\tau_T \leq 5$ bewirken, dass Compton-Streuung die Absorptionsstruktur verbreitert.

- $\xi = 3 \times 10^3$ Die Hälfte des Eisens an der bestrahlten Oberfläche ist voll ionisiert. FeXXV wird dominant bei $\tau_T \approx 1$. Dies erzeugt eine enge Emissionslinie zusätzlich zur verbreiterten Compton-Struktur. Die Emissionslinie wird in dieser Domäne des Ionisationsparameters 'heiße Emissionslinie' genannt.
- $\xi = 10^3$ Die $K\alpha$ -Linie ist weiterhin verstärkt durch die Dominanz von FeXXV.
- Bei weiterer Verringerung auf $\xi = 300$ und $\xi = 100$ wird die Emissionslinie wieder unterdrückt, weil die $K\alpha$ -Photonen durch den *resonanten Auger-Effekt* wieder 'zerstört' werden. Dies wiederum liegt an der Dominanz von FeXVII-FeXXIII in dieser Domäne des Ionisationsparameters. Bei diesen Eisenionen fehlt ein weiteres Elektron der L-Schale, so dass entstehende Fluoreszenz-Photonen sofort wieder resonant eingefangen werden können. Die Eisen-Emissionslinie ist daher trotz vorhandener Ionisation stark reduziert.
- $\xi = 30$ ist ähnlich zu dem Fall einer kalten, neutralen Scheibe und die Eisenlinie bei 6.4 keV ist wieder stark hervorgetreten. Man spricht hier von der 'kalten Emissionslinie'.

Abbildung 7 zeigt die Verhältnisse bei festem Ionisationsparameter $\xi = 10^4$ und spektralem Index $\Gamma = 2$. Die untere Abbildung zeigt die einzelnen Beiträge der Ionen-Spezies des Eisens; oben ist das resultierende Reflexionsspektrum dargestellt. Man erkennt deutlich die drei Strukturen: Emissionslinie, Absorptionsstruktur und exponentiellen Abfall.

2.5.3 Diagnostik

Die Emissionslinien des Elements Eisen sind das zentrale Studienobjekt meiner Arbeit. Sie eignen sich hervorragend als diagnostisches Instrument, um die Eigenschaften des Emissionsgebietes zu untersuchen. Dazu gehören zum Beispiel:

1. die *Metrik*, die durch die Anwesenheit des Schwarzen Loches hochgradig nicht-flach ist. Es ist sogar möglich aus dem Linienprofil zu entscheiden, ob das Schwarze Loch rotiert oder nicht, also ob man die *Kerr*- oder die *Schwarzschild-Lösung* der Einsteinschen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie (ART) annehmen muss.
2. die räumliche Orientierung des Schwarzes Loch-Scheiben-Systems, anders gesagt kann man die *Inklination* aus den Daten abschätzen. Je nach Orientierung trifft den Beobachter Strahlung, die sich relativ zu ihm auf ihn zu oder von ihm weg bewegt. Durch den radialen Doppler-Effekt hat das unmittelbar Auswirkung auf die 'Farbe' der Röntgenlinie und bestimmt so die Gesamtform des Spektrums.
3. das *radiale Emissivitätsprofil*. Diese Größe geht direkt ins Fluss-Integral ein und kann durch Potenz-Gesetze genähert werden. Ob es sich um ein einfaches Potenz-Gesetz

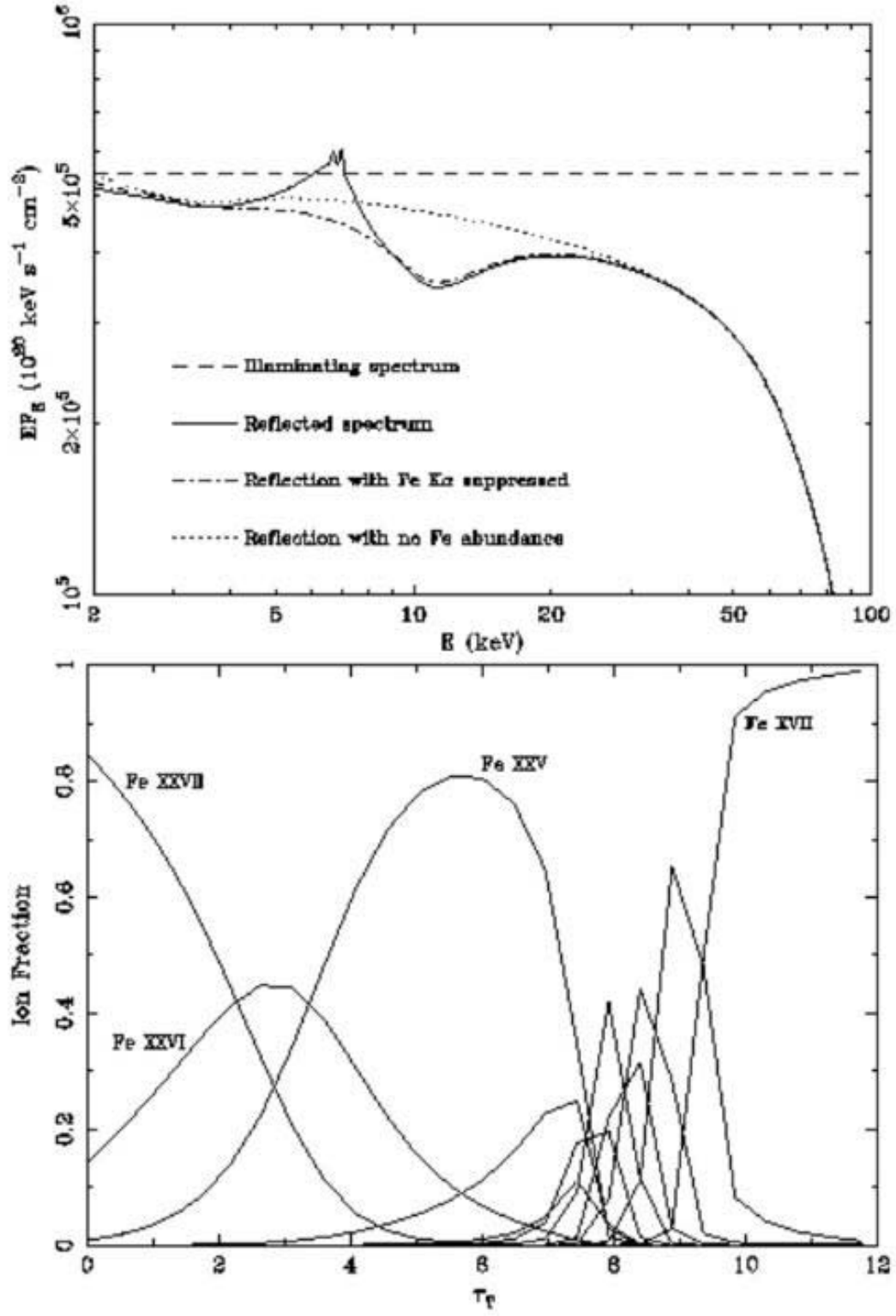


Abbildung 7: Reflexionsspektren einer Scheibe mit Spektralindex $\Gamma = 2$ und $\xi = 10^4$, sowie unten Bruchteile der Eisenionen. (*Fabian et al., 2000* [21])

handelt oder eines, dessen Exponent bei einem bestimmten Radius springt, kann so im Spektrum ermittelt werden. Es sei allerdings angemerkt, dass die Linien auf den Emissivitätsindex, der gerade die Steigung des Potenz-Gesetzes bestimmt, am wenigsten empfindlich ist.

4. die *Dimension der Scheibe*. Innen- und Außenradius, also die Ausdehnung des Emissionsgebietes, sind ebenfalls aus der Linie ersichtlich. Da es sich jedoch um eine Akkretionsscheibe handelt, kann der Innenradius dem Horizontradius des Schwarzen Loches entsprechen. Die Relevanz des Außenradius wird durch ein stark abfallendes Emissivitätsgesetz beeinträchtigt. Es sind demnach eher sekundäre Parameter. Der tatsächliche Wert des Außenradius beläuft sich auf etwa $10^4 r_g$. Dieser hohe Wert kann jedoch in Simulationen der Emissionslinie weit reduziert werden (auf einige 10^1 bis $10^2 r_g$), weil das radiale Emissivitätsgesetz bei großen Radien hinreichend schnell abfällt und so den Fluss stark herabsetzt.
5. das *Geschwindigkeitsfeld des emittierenden Plasmas*. Dies ist der wesentliche neue Aspekt, bei der Erforschung der Emissionslinien von AGN, den ich in dieser Arbeit beleuchten möchte. Bisher wurde lediglich die Keplersche Rotation des Plasmas bis zur Bahn marginaler Stabilität in den Kalkulationen berücksichtigt. Ich implementiere komplexere Geschwindigkeitsfelder, die Materie-Einflüsse (Akkretion) und Ausflüsse (Jets und Winde) miteinbeziehen. Wie ich in Abschnitt 5.3 dokumentieren werde, hat das Geschwindigkeitsfeld einen sehr drastischen Einfluss auf das Linienprofil.

2.5.4 Phänomenologie

Beim Studium der Emissionslinien lassen sich diverse Charakteristika erkennen, die direkt mit physikalischen Effekten assoziiert sind.

Doppler-Effekt Der *optische, radiale Doppler-Effekt* äußert sich darin, dass sich ausbreitende, elektromagnetische Wellen, die von einer Quelle stammen, die sich relativ auf einen Beobachter zu bewegt, gestaucht werden, also blauverschoben werden im Spektrum. Umgekehrt sind die Wellen bei sich relativ entfernenden Quellen rotverschoben. Bei klassischen leuchtenden *Keplerscheiben* wird daher eine im Ruhesystem monochromatische Linie, die an der Oberfläche der Scheibe emittiert wird, symmetrisch verbreitert und in eine charakteristische *Doppelhornstruktur* oder '*Doppelhöcker*' gesplittet, da der auf den Beobachter zu rotierende Teil blauverschoben, der weg rotierende Teil dagegen rotverschoben wird (siehe Abbildung 8 oben).

Ein weiterer Effekt der SRT ist der *transversale Doppler-Effekt*. Knapp formuliert gilt die Aussage '*Bewegte Uhren gehen langsamer*', was direkte Konsequenzen für die Lichtfrequenzen hat (Frequenz ist eine inverse Zeit).

Das klassische Scheibenprofil wird in Gegenwart eines Schwarzen Loches jedoch stark verzerrt. Die Linie wird asymmetrisch durch den Einfluss der Kerr-Metrik und Effekte der Relativitätstheorie, die ich nachfolgend beschreibe.

Beaming Als *Beaming* bezeichnet man anschaulich die 'Bündelung' des Lichtes in Bewegungsrichtung relativistisch bewegter, emittierender Teilchen. Dies ist ein Effekt der SRT und bekannt bei der Synchrotronstrahlung in Teilchenbeschleunigern. Er wirkt sich so aus, dass der blaue Ast der Emissionslinie heller wird. Blaues Licht erscheint intensiver, weil die Scheibe nahe am Horizont des Schwarzen Loches sehr schnell, relativistisch, auf den Beobachter zu rotiert.

Gravitationsrotverschiebung Dieser Effekt der ART kann kurz mit dem Satz 'Uhren in der Nähe Schwarzer Löcher gehen langsamer' zusammengefasst werden. Die Emission findet unmittelbar vor dem tiefen 'Potentialtopf' eines Schwarzen Loches statt. Die Photonen müssen also gegen das Gravitationsfeld Arbeit verrichten, um ihm zu entkommen und verlieren dabei Energie. Der Energieverlust äußert sich so in einer Verschiebung zum roten Ende des Spektrums hin, was den Namen *Gravitationsrotverschiebung* rechtfertigt. Die Auswirkung auf Emissionslinien dieses Effekts ist ein weit ausgezogener roter Flügel der Linie (*red tail*).

Abbildung 8 fasst noch einmal sämtliche Effekte zusammen und veranschaulicht, wie sich das 'Nacheinander-Einschalten' auf das Linienprofil auswirkt.

Äquivalenzlinienbreite Die Äquivalenzlinienbreite oder salopp formuliert die *Stärke der Linie* lohnt ebenfalls untersucht zu werden. *Dabrowski et al. (1997) [13]* haben diese Größe genauer studiert und stellten überrascht fest, dass sie weit größer ist, als zunächst Abschätzungen erwarten ließen. Die Erwartung ging von einer solaren Häufigkeit des Eisens in AGN aus und lieferte einen Wert von etwa 150 eV Äquivalenzbreite. Bei Messungen an Seyfert-Galaxien wurde ein weit größerer Wert als dieser gemessen, etwa 400 eV und mehr.

Eine mögliche Interpretation ist, dass *Linseneffekte* (bedingt durch die Kerr-Metrik), die zuerst *Cunningham 1976 [12]* darstellte, die Strahlung auf die Scheibe zurück bündeln und so eine Verstärkung der Linie bewirken, dadurch dass die zurückkehrenden Fluoreszenzphotonen erneut Fluoreszenz in der Scheibe auslösen (*Resonanz*). Das Polardiagramm in Abbildung 9 illustriert, wo sich die Bündelungseffekte besonders auswirken. Man erkennt deutlich eine Anisotropie, die sich bei hohen Inklinationen maximal auswirkt: die Photonen, die aus dem Innenbereich der Scheibe kommen, werden vorzugsweise in die Scheibenebene gebündelt.

Außerdem ist es möglich, dass die Eisenhäufigkeit in AGN um einiges über dem solaren Wert liegt, was ebenfalls eine höhere Äquivalenzlinienbreite zur Folge hätte, weil mehr Fluoreszenzphotonen erzeugt werden.

Ein drittes Szenario diskutieren *Dabrowski & Lasenby (2000) [14]*, die Monte-Carlo-Simulationen benutzen, um Primär- plus Reflexionsspektrum zu berechnen: die Position der die Fluoreszenz auslösenden Primärquelle ist ein vitales Faktum in der Topologie des Systems und *auch* in Bezug auf die Äquivalenzbreite. So ist es wesentlich, ob es sich um eine statische Quelle handelt, die auf der Symmetrieachse des Systems (Rotationsachse des Kerr-Loches) sitzt oder ob sie mit der Scheibe co-rotiert. Weiterhin entscheidet die Höhe der Quelle über der Scheibe über stark oder schwach ausgeprägte Bündelungseffekte,

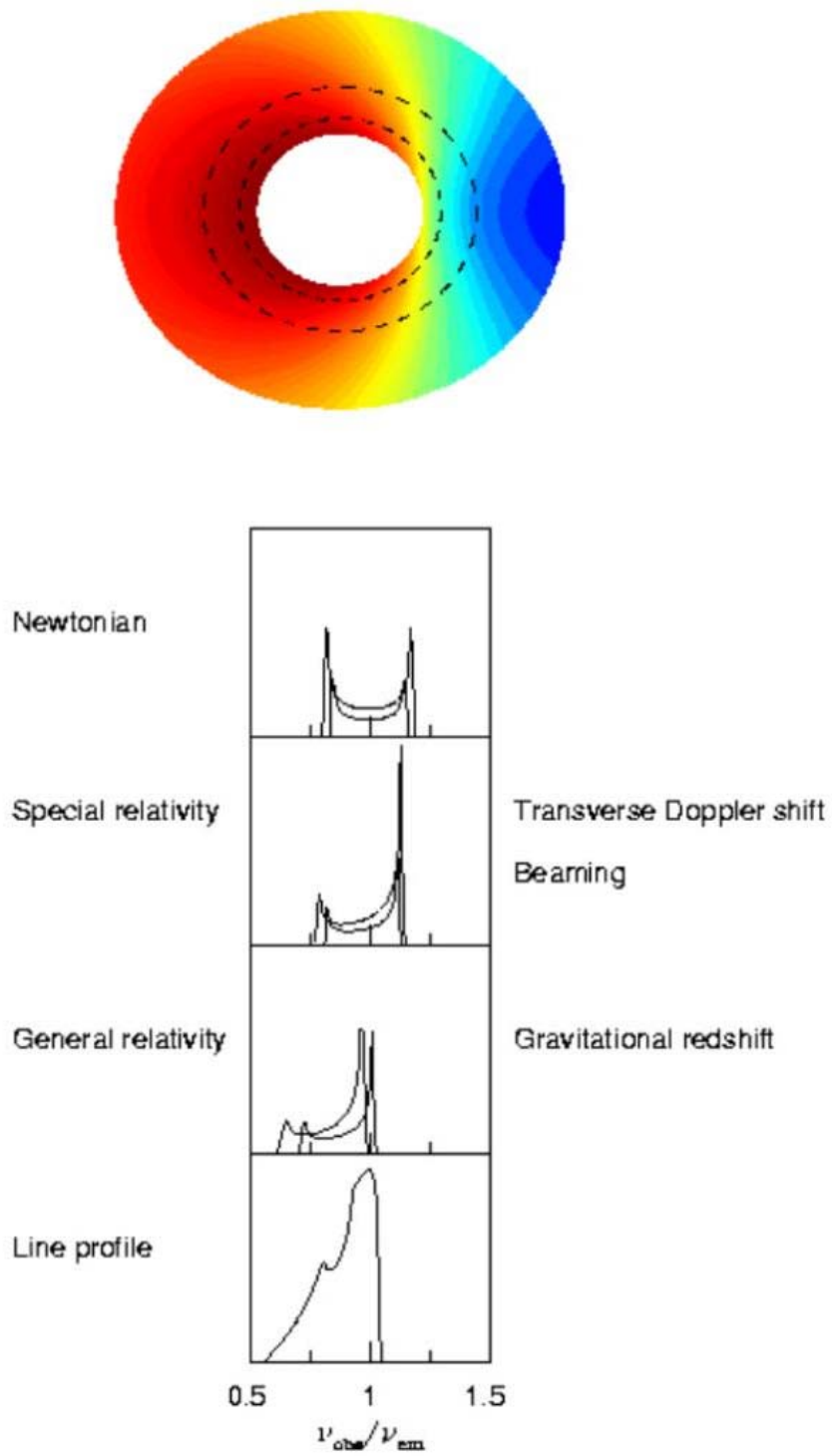


Abbildung 8: Von der Newtonschen zur relativistischen Scheibe (*A. Fabian, 2000* [21])

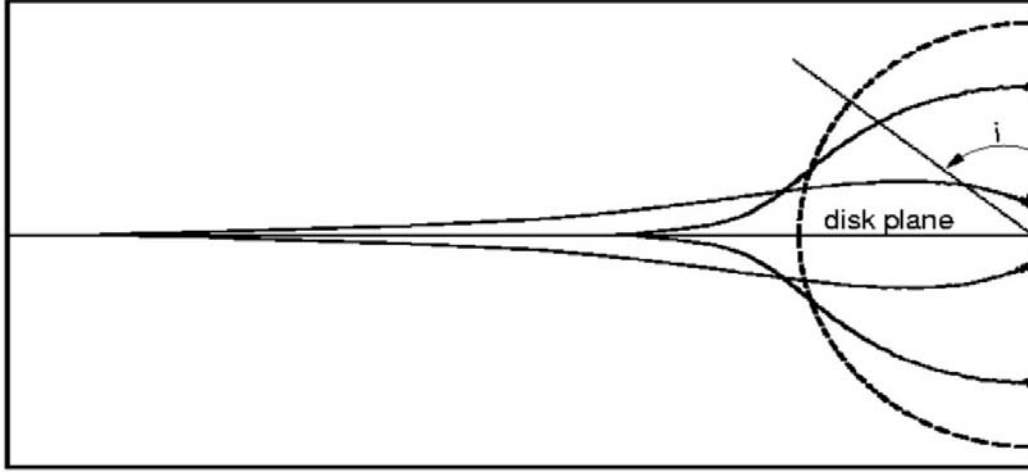


Abbildung 9: Polardiagramm der detektierten Stärke in Abhängigkeit von dem Emissionsradius. Von links nach rechts: $r = 2r_g$, $r = 8r_g$. Der Halbkreis steht für isotrope Emission. i bezeichnet die Inklination. (*Dabrowski et al., 1997* [13])

wie Abbildung 10 zeigt. Bei kurzer Distanz zum Schwarzen Loch wird viel Licht auf die Scheibe gebündelt, bei einer hohen Distanz wenig. Erste Arbeiten zu dieser Problematik gehen auf *Martocchia und Matt (1996)* [38] zurück.

Variabilität des Linienprofils Wie bereits erwähnt, sind Seyfert-Galaxien sehr variabel. Diese Fluktuationen sollten bezüglich der Verlässlichkeit der Daten berücksichtigt werden! Im Falle der gut untersuchten Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 wurde eine Helligkeitsvariation um den Faktor 2 bis 3 innerhalb von 4 Tagen Beobachtungszeit gemessen, sowie Variationen auf kurzen Zeitskalen von etwa 1000 Sekunden. Die Ursache für diese Variabilitäten können neben Änderungen in der Geometrie oder der komplexen Ionisationsstruktur der Scheibe auch möglicherweise *koronale Flares* sein, die in Anzahl und Position variieren und mit der Scheibe co-rotieren können (*Fabian et al. 2000* [21]). Ähnlich wie bei den Flares der Sonne hängen diese mit den Magnetfeldern zusammen. Sie bilden sich dort, wo es zu 'Ausstülpungen' der Magnetfeldlinien aus dem Plasma kommt. Dann hängt es davon ab, ob die Flares auf der sich dem Beobachter nähernden oder entfernenden Seite entstehen und auch in welchem Abstand vom Schwarzen Loch. Beaming der Flare-Strahlung kann ebenfalls unter Umständen eine Rolle spielen.

Aus diesem Grund variiert auch das Profil der Eisen-Emissionslinie, so dass man verschiedene Aktivitätsstadien unterscheiden kann. Es ist sogar möglich, sich die Variabilität der Seyfert-Galaxien zunutze zu machen. Anschaulich ist es so, dass Aktivitätsausbrüche in der Korona zur Scheibe propagieren und dort die Fluoreszenz auslösen. Aufgrund endlicher Laufzeiten dieses Exzesses von der Korona zur Scheibe, gibt es einen Zeitunterschied

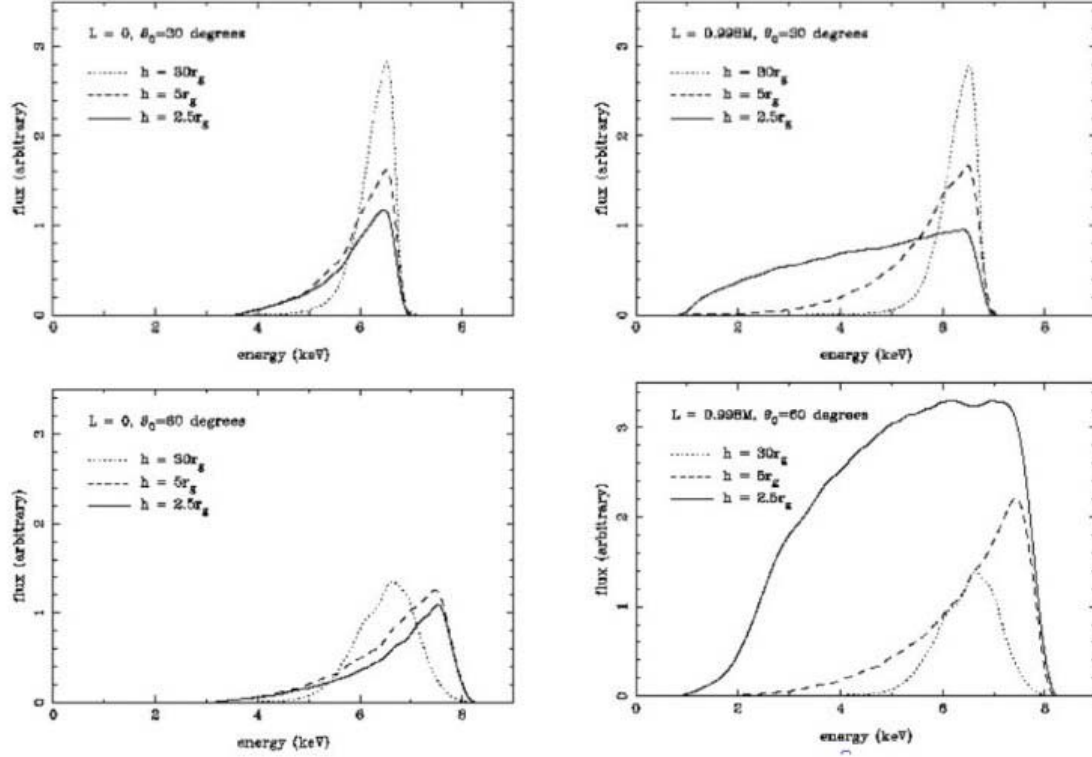


Abbildung 10: Studie der Korona-Position: obere Zeile 30° Inklination; untere 60° ; linke Spalte Schwarzschild, rechte Kerr (*Dabrowski & Lasenby, 2000* [14])

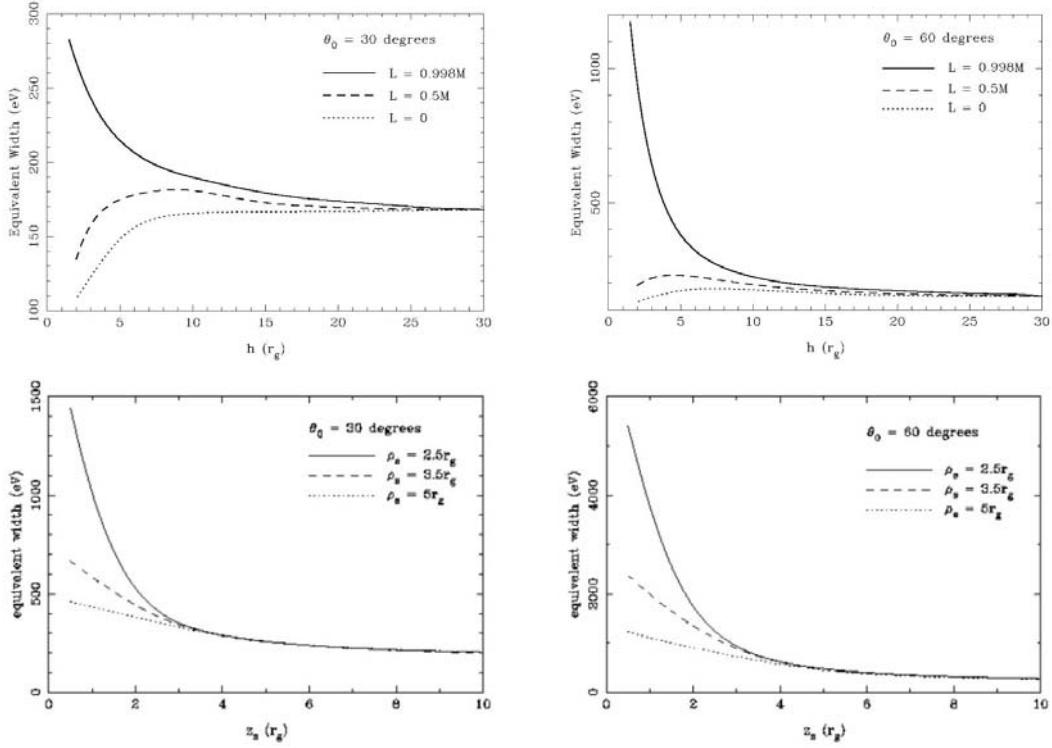


Abbildung 11: Simulation der Äquivalenzlinienbreite in Abhängigkeit von der Korona-Position und Rotationsparameter L : linke Spalte 30° Inklination; rechte 60° ; obere Zeile: Korona auf der Rotationsachse des Schwarzen Loches; untere Zeile ($L = 0.998$): Korona 'off-axis' mit ρ_s als Abstand von der z-Achse (*Dabrowski & Lasenby, 2000* [14])

zwischen direkt beobachtetem Flare und fluoreszierendem Echo. Dieses Effekt nennt man *reverberation*, die Methode dies abzubilden *reverberation mapping*. Es ist nämlich möglich, dadurch die Raumzeit und die Geometrie der Röntgenquelle zu studieren. In diesem Zusammenhang braucht man die Punkt-Quellen-Transfer-Funktion, die die 'Antwort' der Eisenlinie auf einen Röntgenausbruch an einer bestimmten Position liefert. Das Studium solcher Transfer-Funktionen zeigt, dass rotierende Schwarze Löcher eine charakteristische Echo-Signatur haben. Zeitspektren von Quellen offenbaren so, ob das Schwarze Loch rotiert. Das primäre Detektionsproblem ist das Signal-Rausch-Verhältnis. Hierzu sind hohe Zeitaufösungen der Detektoren vonnöten, die im Bereich von $t_{\text{reverb}} = GM/c^3 \approx 500 M_8 s$ (bei Normierung auf Schwarz Loch-Massen von 10^8 Sonnenmassen) sind. Man braucht also mindestens das Auflösungsvermögen von XMM-Newton, um *reverberation mapping* effizient durchführen zu können. Die Hoffnung ist, dass mit Constellation-X diese Methode in Zukunft als weiteres diagnostisches Instrument zur Verfügung steht. *Fabian et al. (1998)* [20] haben bereits Simulationen solcher Echo-Bilder berechnet, die zukünftig mit Beobachtungsdaten verglichen werden könnten.

2.6 Galaktische Röntgendoppelsternsysteme

Ich habe eingangs schon motiviert, dass *Röntgendoppelsternsysteme* Beobachtungsobjekte sind, die ebenfalls zum Studium der Emissionslinienprofile lohnen. *Ebisawa et al. (1996)* [16] haben erste Evidenzen für Linienemission entdeckt. Der Ionisationsparameter ξ , den ich im letzten Kapitel vorgestellt habe, beträgt hier einige hundert. Dies bedeutet, dass die Linien-Photonen hier resonant eingefangen werden und als Auger-Elektronen verloren gehen. Die Linienemission ist daher unterdrückt, aber die Absorptionsstruktur ist ausgeprägt (siehe dazu noch einmal Abbildung 6).

Heute kennt man etwa 250 Röntgendoppelsternsysteme mit Schwarzem Loch oder Neutronenstern als kompaktem Objekt. Etwa 20% davon sind radio-laut. *Gerlach* zeigte 1968 in seiner Dissertationsarbeit, dass eine weitere stabile Mode existiert: *Quarksterne*. Galaktische Röntgenquellen, kurz LMXBs für *Low Mass X-Ray Binaries* und HMXBs für *High Mass X-Ray Binaries* genannt, zerfallen bisher in weitere Hauptgruppen:

- Neutron Star Low Mass X-Ray Binaries (NSLMXBs) und
- Black Hole Low Mass X-Ray Binaries (BHLMXBs)

(entsprechende Unterteilung für HMXBs). Der Indikator für den Neutronenstern als involviertes kompaktes Objekt sind *Röntgenbursts*. Hier ereignen sich Fusionsreaktionen von Helium an der festen Oberfläche des Neutronensterns (*Hansen & Van Horn, 1975* [26]) Mithilfe dieser Effekte lassen sich die LMXBs selektieren.

Wenn ich in dieser Arbeit von Binärsystemen rede, meine ich ausschließlich *Röntgendoppelsterne*, bei denen ein Partner ein Schwarzes Loch ist: man nennt sie auch *Galaktische Schwarz Loch Kandidaten* oder kurz *GBHC* für *Galactic Black Hole Candidates*. Ansonsten sind die Verhältnisse anders als bei Neutronensternen. Ihre feste Oberfläche im Gegensatz zum Ereignishorizont vereinfacht die analytische Behandlung sehr. Die Raumzeit von Neutronensternen wird nicht mit der Kerr-Metrik, sondern mit den *Ernst Potentials*

behandelt, weil die feste Oberfläche die Raumzeit deformiert. Es handelt sich hierbei um Multipol-Entwicklung des Gravitationspotentials.

Bekanntester und gut untersuchter Vertreter für HMXBs ist wohl *Cyg X-1*, der prominentesten Röntgenquelle im Sternbild Schwan. *GRO J1655-40* gehört zu den so genannten *Mikroquasaren* und ist sogar eine Jet-Quelle, die vor kurzem für Aufsehen sorgte. *Balucinska-Church & Church (1999)* [3] stellten hier erstmals eine Eisen-Emissionslinie mit Hilfe der Daten des Satelliten *Rossi X-Ray Timing Explorer (RXTE)* fest. Der Ionisationsparameter im Falle von *Cyg X-1* wird zu $\xi = 3 \times 10^3$ angenommen, was einer ausgeprägteren Eisenlinie gleichkommt. In Kapitel 5.5 möchte ich auf diesen Kandidaten genauer eingehen.

2.6.1 Topologie

In Doppelsternsystemen kann unter gewissen Umständen Materie vom einen Stern auf den kompakten Begleiter, hier das Schwarze Loch, transferiert werden. Und zwar geschieht das genau dann, wenn Begleitstern sein *Roche-Volumen* (siehe Abbildung 12 rechts) ausfüllt oder es überschreitet. Erst dann kann Materie durch den inneren der fünf *Lagrangepunkte* dieses Zweikörper-Problems abfließen. In den *Lagrangepunkten* verschwindet der Gradient des Gravitationspotential $\nabla\Phi_G = 0$. Sterne rotieren, also besitzt die Sternmaterie Bahndrehimpuls, so dass sie nicht direkt radial auf das Schwarze Loch fällt, sondern sukzessiv hinein spiraliert. Vorhandene Viskositäten in der Scheibe, also letztendlich Reibungseffekte, bremsen die frei fallende Materie (ebenso auch der Gasdruck) und transportieren Drehimpuls nach außen und Materie nach innen: Akkretion setzt ein.

Die Verhältnisse entsprechen denen der AGN, allerdings skalieren die physikalischen Größen hier anders. Wie ich angedeutet habe, ereignet sich zur Zeit eine **Unifikation** in der Sichtweise von Röntgenquellen. Unabhängig von der Größen- und Massenskala, unabhängig vom Typ des kompakten Objektes: die $X\gamma$ -Spektren und deren Interpretation sind immer sehr ähnlich. So geht man auch hier von den Komponenten Schwarzes Loch, Akkretionsscheibe, Korona und Jet aus. Aktuelle Untersuchungen von *Gilfanov et al. (2000)* [25] sprechen dafür, dass die sehr heiße *Korona* unmittelbar bei dem Schwarzen Loch lokalisiert ist und die geometrisch dünne Scheibe mit harter Röntgenstrahlung beleuchtet. Es erweist sich so, dass ein älteres Modell der Topologie für Binärsysteme wie es *Shapiro, Lightman & Eardley (1976)* [59] bei *Cyg X-1* vorstellten, wieder aufgegriffen werden kann. Eine ähnliche Topologie erwartet man bei AGN. Die bereits vorgestellte Abbildung 2 illustriert noch einmal diese Sichtweise.

2.6.2 Stellare Schwarze Löcher

Die Schwarzen Löcher der Binärsysteme nennt man *stellar*. Das trägt dem Umstand Rechnung, dass diese Schwarzen Löcher im Rahmen der *Sternentwicklung* entstanden sind. Je nach Masse eines Stern sind nach vorherrschender Meinung verschiedene Endkonfigurationen möglich. Der Kollaps der Sternmaterie kann auf einen *Weißen Zwerg*, einen *Neutronenstern*, eventuell auf die angesprochenen *Quarksterne* oder bei höchster Masse der Sternrestmaterie auf ein *Schwarzes Loch* führen. Bei diesem Vorgang treten (zumindest in

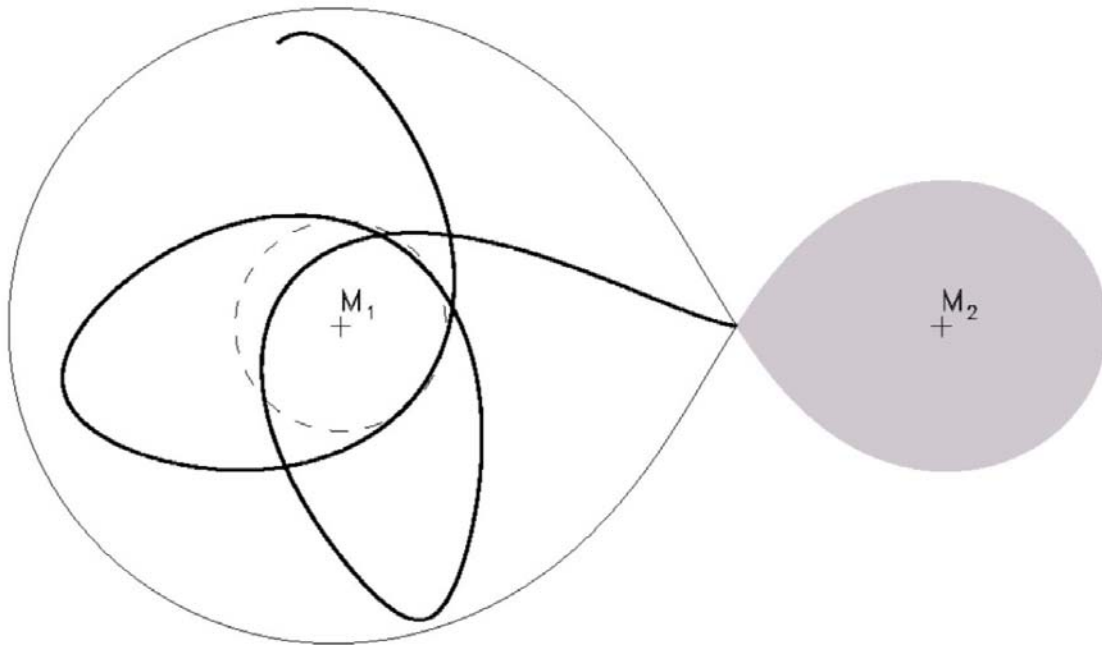


Abbildung 12: Das Roche-Volumen eines Doppelsternsystems mit kompakter Masse M_1 und Begleitstern M_2 . Die durchgezogene Linie markiert die Trajektorie eines Teilchens, das durch den inneren Lagrange-Punkt auf das kompakte Objekt fällt, wie es einem Beobachter in einem co-rotierenden System erscheint. Die gestrichelte Linie zeigt einen Kreis als Referenz. (*Spruit, 2000* [62])

den letztgenannten Fällen) die bekannten *Supernovae* in Erscheinung. Der entscheidende Unterschied zu den AGN ist nicht nur die Entstehungsweise der Schwarzen Löcher, sondern auch ihre Masse. Stellare Schwarze Löcher haben mindestens eine Masse von etwa 2.5 Sonnenmassen; die supermassereichen Schwarzen Löcher der AGN besitzen Massen von 10^5 bis 10^{10} Sonnenmassen, je nach Typ und Entwicklungsstadium. Deren Entstehungsweise aus primordialen Prozessen ist noch weitgehend unklar. Es existieren allerdings numerische Simulationen, die den Gravitationskollaps von sehr dichten, relativistischen Sternhaufen auf der Basis von Zwei-Körper-Stößen rechnen. Hierbei entsteht ein supermassereiches Schwarzes Loch aus *Zeldovich-Podourets-Instabilitäten*. Die relativistischen Sternhaufen werden als sphärisch-symmetrisch angenommen, und die Gleichungen auf dem Hintergrund der Schwarzschild-Metrik gelöst. Die gravothermische Katastrophe gilt numerisch als gesichert.

3 Rotierende Schwarze Löcher: Geodäten-Gleichung, Akkretionsscheiben und Strahlung

In den folgenden Kapiteln möchte ich auf die zugrunde liegende Theorie eingehen. Allerdings versuche ich, so dicht wie möglich an der Problematik der Schwarzes Loch-Scheiben-Systeme und den damit involvierten Emissionslinien zu bleiben. Nach einem kurzen Ausflug in die Physik der Raumzeiten, der Präsentation der hier geeigneten Raumzeit und deren Koordinaten sowie Koordinatensystemen, werde ich auf den wesentlichen Aspekt, der *Geodätengleichung in der Kerr Metrik*, kommen. Deren Lösungen, die ich mit den *Erhaltungsgrößen* und der Formulierung *elliptischer Integrale* erhalten werde, liefern uns die *Photonentrajektorien* oder *Nullgeodäten* in dieser nicht-flachen Metrik, die letztendlich das Bild der Scheibe formen und so auch den beobachtbaren Linienfluss generieren.

3.1 Die Raumzeit

Raum und Zeit bilden in der ART ein Kontinuum. Diese *Raumzeit* ist eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit, deren Krümmungseigenschaften die Gravitation bestimmt. Eine mathematische Formulierung kann man mit Hilfe der *Metrik*, genauer gesagt mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$, gewinnen. Für das Linienelement ds^2 gilt:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (5)$$

Das Linienelement legt *eindeutig* die Krümmungseigenschaften der Raumzeit fest. Ist die Metrik bekannt, startet der übliche Formalismus der ART, wo man den *Riemannschen Krümmungstensor* bestimmt und schließlich die Lösung der *Einsteinschen Feldgleichungen* diskutiert. Ich habe die Programmatik ausführlich im Anhang A.1 dargestellt.

Bekannte Lösungen der Vakuumgleichungen sind

1. die *Schwarzschild-Lösung*, gefunden von *Karl Schwarzschild* 1915: sie beschreibt die sphärisch-symmetrische Metrik nicht-rotierender Schwarzer Löcher und Sterne,
2. die *Kerr-Lösung*, benannt nach *Roy Kerr*, der sie 1963 fand: sie formuliert die axialsymmetrische Metrik rotierender Schwarzer Löcher.
3. die *Reissner-Nordström-Lösung*, die geladene, nicht-rotierende Schwarze Löcher beschreibt.
4. und die *Kerr-Newman-Lösung*, eine Formulierung für geladene, rotierende Schwarze Löcher, also die allgemeinste Form eines Schwarzen Loches mit den zusätzlichen Parametern Drehimpuls a und Ladung Q .

Die besondere Schwierigkeit die Feldgleichungen zu lösen, liegt in ihrer *Nichtlinearität*. Lösungen unterliegen daher **nicht** dem *Superpositionsprinzip* linearer Differentialgleichungen. Der tiefere, physikalische Zusammenhang dieses mathematischen Faktums ist die Tatsache, dass *das Gravitationsfeld an sich selbst koppelt*: ein Gravitationsfeld enthält Energie,

nach $E = mc^2$ also Masse, die wiederum selbst eine Quelle eines Gravitationsfeldes ist. Man hat es also bei der Behandlung der Einsteinschen Feldgleichungen mit einem *Selbstkonsistenzproblem* zu tun.

3.1.1 Metrik einer stationären und axialsymmetrischen Gravitationsquelle

In Vorbereitung auf die axialsymmetrische Kerr-Lösung möchte ich an dieser Stelle kurz eine verallgemeinerte Metrik stationärer und axialsymmetrischer Quellen besprechen. Nach *Papapetrou (1966)* [49] nimmt das Linienelement hier folgende Form an

$$ds^2 = \exp(2\Phi)dt^2 - \exp(2\Psi)(d\Phi - \omega dt)^2 - \exp(2\mu_2)(dx^2)^2 - \exp(2\mu_3)(dx^3)^2 \quad (6)$$

Die fünf Funktionen $\Phi, \omega, \Psi, \mu_2$ und μ_3 sind dabei nur noch Funktionen von x^2, x^3 ; μ_2 und μ_3 und können über eine *Eichfreiheit* verknüpft werden. Die physikalische Interpretation dieser Größen ist die folgende:

- Φ kann als Gravitationspotential interpretiert werden,
- $\exp(\Psi)$ heißt auch 'Zylinderradius',
- ω ist das 'Drehimpuls-Potential',
- μ_2 und μ_3 sind geometrische Größen, die die Lage der Meridionalebene im Raum bestimmen.

Mithilfe des Linienelements kann man sich die nicht-verschwindenden Komponenten des (symmetrischen) metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ notieren:

$$\begin{aligned} g_{00} &= (\exp 2\Phi) - \omega^2 \exp(2\Psi) \\ g_{01} &= g_{10} = \omega \exp(2\Psi) \\ g_{11} &= -\exp(2\Psi) \\ g_{22} &= -\exp(2\mu_2) \\ g_{33} &= -\exp(2\mu_3) \end{aligned} \quad (7)$$

Hier gilt $(0, 1, 2, 3) = (t, \Phi, r, \theta)$. In Abschnitt 3.2 werde ich diese Funktionen für die Kerr-Metrik spezifizieren.

3.1.2 Der 3+1 Split der Raumzeit

Die Form der Metrik (6) zeigt eine *Foliation* von 3-Räumen $t = \text{const}$, die als 3+1-Aufspaltung der Raumzeit oder kurz *3+1-Split* bezeichnet wird. Mit einer speziellen Aufspaltung, die die globale Zeit t festlegt, erhält man die Metrik (6) in der Form

$$ds^2 = \alpha^2 dt^2 - h_{ik}(dx^i + \beta^i dt)(dx^k + \beta^k dt), \quad i, k = 1, 2, 3 \quad (8)$$

Dabei sind

- $\alpha = \frac{d\tau}{dt}$ die *Lapse-Funktion* oder *Rotverschiebung*, der Gang der Uhr auf dem Raumschnitt in Vergleich zu Unendlich.
- h_{ik} : Metrik der Hyperflächen $t = \text{const.}$
- die Weltlinien mit räumlicher Geschwindigkeit $\beta^i = -\frac{dx^i}{dt}$ liegen orthogonal zu den Hyperflächen. Die β^i heißen *Shift-Funktionen*.

Für die Kerr-Metrik erhält man die Lapse-Funktion

$$\alpha = \frac{\rho\sqrt{\Delta}}{\Sigma} \quad (9)$$

sowie die Shift-Funktionen

$$\beta^r = 0 \quad (10)$$

$$\beta^\theta = 0 \quad (11)$$

$$\beta^\Phi = -\omega \quad (12)$$

und die Komponenten der 3-Metrik

$$h_{rr} = \frac{\rho^2}{\Delta} \quad (13)$$

$$h_{\theta\theta} = \rho^2 \quad (14)$$

$$h_{\Phi\Phi} = \tilde{\omega}^2 \quad (15)$$

$$h_{jk} = 0; \quad j \neq k. \quad (16)$$

Die metrischen Funktionen Δ , ρ , Σ und $\tilde{\omega}$ spezifiziere ich im nächsten Kapitel.

3.2 Die Kerr-Metrik

Es ist durchaus plausibel anzunehmen, dass eine kollabierende Konfiguration rotiert, wie im Falle von Molekülwolken, die Sterne bilden oder 'sterbende' Sterne, die kompakte Objekte bilden. Daher wird das Schwarze Loch auch Drehimpuls besitzen, ob es nun stellar oder supermassereich ist.

Statische, kugelsymmetrische Schwarze Löcher, wie sie die Schwarzschild-Metrik beschreibt, sind diskutabel, weil physikalische Prozesse existieren, wie der *Penrose-Prozess*, die es ermöglichen, Energie und Drehimpuls des Schwarzen Loches zu extrahieren. Geladene Schwarze Löcher können eher als 'akademisch' angesehen werden, da jeder auftretende Ladungsunterschied durch Ströme kompensiert werden wird. Die Reissner-Nordström-Lösung oder die Kerr-Newman-Lösung werde ich daher nicht betrachten.

Im Anhang diskutiere ich im Kapitel A.3, wie man sich die *Killing-Vektorfelder* einer Raumzeit beschaffen kann. Sie legen letztendlich die Symmetrieeigenschaften der Raumzeit fest. Die Kerr-Raumzeit ist *stationär* und *axialsymmetrisch* und weist daher zwei Killing-Vektorfelder auf:

- für Stationarität existiert das Killingfeld ξ , das asymptotisch zeitartig ist

$$g(\xi, \xi)_\infty = 1$$

- für die Axialsymmetrie existiert das Killingfeld m , das asymptotisch raumartig ist

$$g(m, m)_\infty = -r^2 \sin^2 \theta, \quad g(\xi, m)_\infty = 0$$

Die Tangentenvektoren ∂_t und ∂_Φ spannen eine zweidimensionale *Nullfläche* auf, den **Ereignishorizont**. Mathematisch formuliert heißt das, dass die Determinante dieses zweidimensionalen Unterraums (t, Φ) verschwindet. Dies wird mit dem Satz Gleichungen (7)

$$\begin{vmatrix} g_{00} & g_{01} \\ g_{10} & g_{11} \end{vmatrix} = -\exp(2\beta) = 0 \quad (17)$$

mit $\beta \equiv \Psi + \Phi$.

Sehr weit entfernt vom Schwarzen Loch ist die Raumzeit *Minkowskisch*, also gilt *asymptotische Flachheit*.

Aus den Symmetrien kann man $x^0 = t$, $x^1 = \Phi$ und damit $\xi = \partial_t$, $m = \partial_\Phi$ ableiten. Außerdem folgt so direkt

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^2, x^3), \quad (18)$$

wie schon in Zusammenhang mit Gleichung(6) diskutiert. Ein Ansatz für die dort diskutierte Größe β und Integration führen schließlich auf die Größe Δ , die nur von zwei Parametern abhängt (*Chandrasekhar, 1983* [8]). Diese Parameter sind physikalisch mit der *Masse* M und dem *Drehimpuls*- oder *Kerr-Parameter* a des Schwarzen Loches assoziiert. Man schreibt daher

$$\Delta(r) = r^2 - 2Mr + a^2. \quad (19)$$

Δ ist eine der wesentlichen Funktionen der Kerr-Metrik.

Boyer-Lindquist Koordinaten Die **Kerr-Metrik** ist damit (in Matrix-Form) durch folgende Komponenten gegeben:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -\alpha^2 + \omega^2 \tilde{\omega}^2 & 0 & 0 & -\omega \tilde{\omega}^2 \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\omega \tilde{\omega}^2 & 0 & 0 & \tilde{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad (20)$$

mit den **Boyer-Lindquist** Koordinaten (t, r, θ, Φ)

$$\alpha = \frac{\rho \sqrt{\Delta}}{\Sigma} \quad (21)$$

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 \quad (22)$$

$$\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (23)$$

$$\Sigma^2 = (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \quad (24)$$

$$\tilde{\omega} = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta \quad (25)$$

$$\omega = \frac{2aMr}{\Sigma^2}. \quad (26)$$

Diese Lösung ist *aymptotisch flach*, das heißt $\alpha \rightarrow 1$, $\omega \rightarrow 0$ für $r \rightarrow \infty$. Der Kerr-Parameter a ist dabei über den spezifischen Drehimpuls J und die Masse M definiert

$$a = \frac{J}{M} \quad (27)$$

und kann so für $c = G = 1$ Werte zwischen 0 und M annehmen; für $c = G = M = 1$ variiert a zwischen 0 und 1. $a = 1$ bezeichnet den *extremen Kerr-Fall* eines maximal rotierenden Schwarzen Loches. Ein Körper mit $a > 1$ ist *nicht stabil*. Für $a = 0$ geht die Kerr-Lösung konsistent in die Schwarzschild-Lösung über.

Charakteristische Radien Bei der Kerr-Metrik lassen sich verschiedene Bereiche abgrenzen. Der *Horizontradius* ist bei einer Masse M des Schwarzen Loches

$$r_H = M + \sqrt{M^2 - a^2}. \quad (28)$$

An diesem Ereignishorizont wird der Rotverschiebungsfaktor α unendlich, und das akkretierte Plasma fällt mit nahezu Lichtgeschwindigkeit in das Schwarze Loch. Im maximalen Kerr-Fall verschwindet die Wurzel, so dass

$$r_H(a = 1) = M. \quad (29)$$

Dagegen ist der Schwarzschild-Radius R_S

$$R_S = r_H(a = 0) = 2M. \quad (30)$$

Die *statische Grenze* markiert den Übergang, wo jeder Beobachter mit dem Schwarzen Loch rotieren muss. Die Raumzeit rotiert innerhalb dieses Limits so schnell, dass selbst ein Beobachter, der in entgegengesetzter Richtung mit Lichtgeschwindigkeit rotieren könnte, die Drehrichtung des Kerr-Loches aufgezwungen bekommen würde.

$$r_{stat} = M_+ \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (31)$$

Das Gebiet innerhalb von r_{stat} bis zum Horizont heißt **Ergosphäre**. Wie man sieht, ist dieses Gebiet *nicht* sphärisch-symmetrisch (θ -Abhängigkeit!), sondern an den Polen abgeplattet (siehe dazu Abbildung 13). Am Äquator ist die Ergosphäre immer durch den Schwarzschildradius $2M$ begrenzt, unabhängig davon, wie schnell das Schwarze Loch rotiert.

Ein wesentlicher Radius ist der *Radius der marginal stabilen Bahn*. Dieser Abstand markiert den kleinstmöglichen Radius für stabile Rotation um das Schwarze Loch. Man extrahiert diese Größe aus der Diskussion eines effektiven Potentials $V_{eff}(r)$, das für Schwarzschild die Form

$$V_{eff}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L_z^2}{r^2}\right) \quad (32)$$

annimmt und dessen Wendepunkt gerade die marginal stabile Bahn markiert, für Schwarzschild also $r_{ms} = 6r_g$ (siehe Abbildung 14). So gewinnt man:

$$r_{ms} = M \left(3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\right) \quad (33)$$

mit

$$Z_1 = 1 + \left(1 - \frac{a^2}{M^2}\right)^{1/3} \left(\left(1 + \frac{a}{M}\right)^{1/3} + \left(1 - \frac{a}{M}\right)^{1/3} \right) \quad (34)$$

$$Z_2 = \sqrt{3 \frac{a^2}{M^2} + Z_1^2}. \quad (35)$$

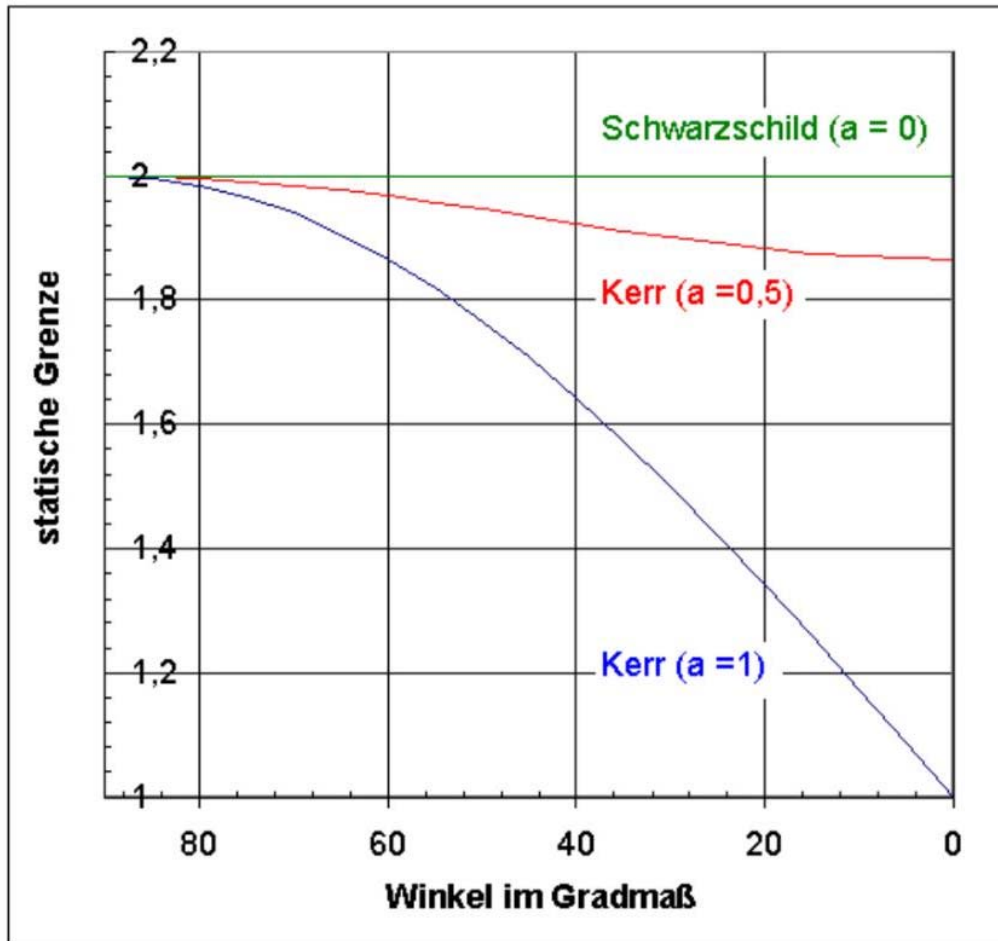


Abbildung 13: Statische Grenze in Abhängigkeit vom Polarwinkel für verschiedene Drehimpulsparameter des Schwarzen Loches (Masse auf 1 normiert) (A. Müller, 2000)

3.3 Die Geodätengleichung in der Kerr-Metrik

Zunächst möchte ich motivieren, wozu die Geodäten nötig sind. Bei einer vorgegebenen Metrik ist es immer möglich Teilchenbahnen zu berechnen. Ob es sich um massebehaftete Teilchen oder masselose, wie den Photonen handelt, ist dabei relevant. *Chandrasekhar* berechnet im Buch '*The Mathematical Theory of Black Holes*' [8] sehr detailliert diese Geodäten in der Schwarzschild- und Kerr-Metrik. Als Beispiel für einfache Geodäten seien die Geraden im flachen Raum und die Großkreise auf der Kugeloberfläche genannt. Sie sind jeweils die kürzeste Verbindung zweier Punkte. Diesen Weg nimmt nach dem *Fermatschen Prinzip* auch Strahlung.

Die **Geodätengleichung** kann man nun auf verschiedene Weisen herleiten. Ein schneller Zugang ist über ein Kovarianzprinzip möglich, der direkt von der Newtonschen Theorie auf die Relativitätstheorie überleitet. Das Newton-Gesetz lautet

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{\nabla} U, \quad (36)$$

mit dem Gravitationspotential

$$U(\vec{r}) = -\frac{GM}{r}. \quad (37)$$

Für ein freies Teilchen gilt

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = 0. \quad (38)$$

Die Kovarianz besagt nun, dass die physikalischen Gesetze nicht vom Bezugssystem abhängen dürfen. Eine Verallgemeinerung erfordert, dass man die Ableitung hier durch eine kovariante Ableitung zu ersetzen hat. r wird daher in der relativistischen Formulierung ein Vierer-Vektor x^μ , die Zeit t wird zur Eigenzeit τ und die Ableitung wird durch eine kovariante Ableitung ∇_μ ersetzt:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\tau^2} = 0 \quad (39)$$

oder mit der kontravarianten Vierer-Geschwindigkeit u^μ

$$\frac{Du^\mu}{D\tau} = 0 \quad (40)$$

oder einfach kurz

$$u_{;\nu}^\nu = 0. \quad (41)$$

Letzteres kann man auch ausführlich schreiben zu

$$\frac{d^2 x^\lambda}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\lambda \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0. \quad (42)$$

Dies ist die bekannte **Geodäten-Gleichung eines freien Teilchens**.

Alternativ lässt sie sich auch aus einem *Variationsprinzip* herleiten, indem man die Teilchenbahn zwischen zwei Raumzeit-Punkten variiert. Die Geodäte ist nämlich die kürzeste

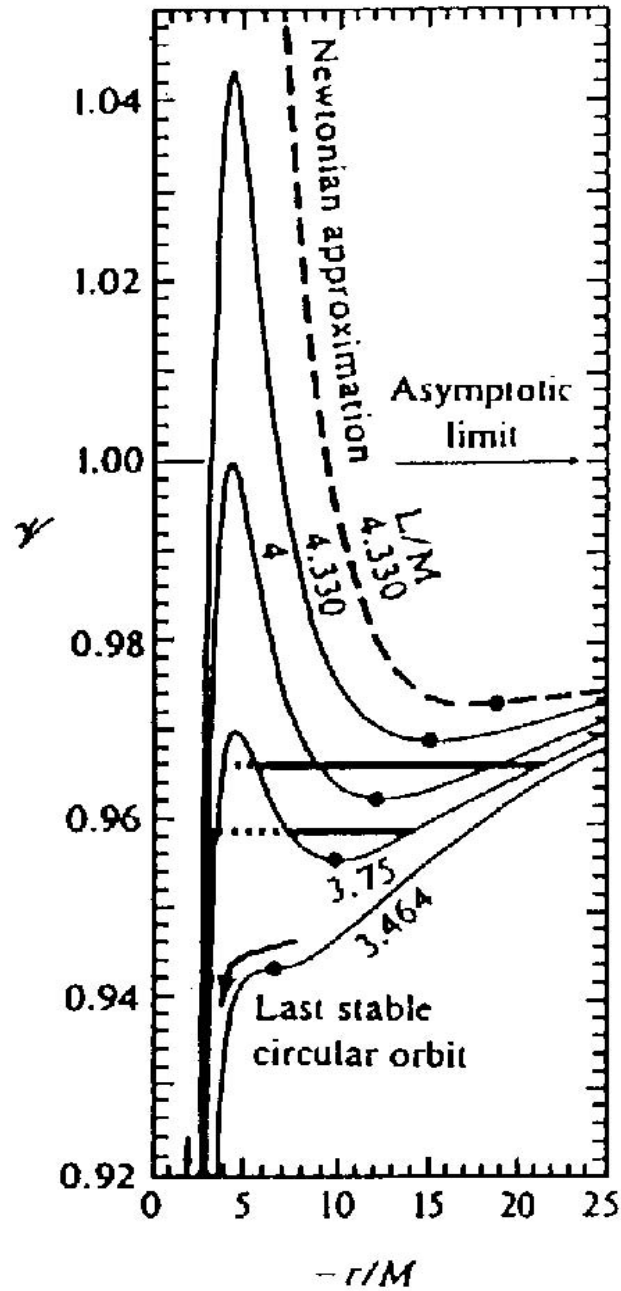


Abbildung 14: Effektives Gravitationspotential für den Schwarzschild-Fall. Der Wendepunkt markiert gerade den Radius marginaler Stabilität. Die Minima entsprechen gerade stabilen Kepler-Kreisbahnen, die Maxima instabilen Kreisbahnen. Das effektive Potential hat **immer** eine Nullstelle am Schwarzschildradius. Die Kurven werden durch den spezifischen Drehimpuls L/M parametrisiert; fällt dieser unter einen kritischen Wert von 3.464, so gibt es keine stabilen Kreisbahnen mehr! (*M. Camenzind (1997 [5])*)

Verbindung dieser Punkte und die Eigenzeit entlang dieser ausgezeichneten Trajektorie ist maximal.

Ich möchte hier jedoch einen weiteren Zugang im Rahmen des Tensorkalküls vorstellen, der einen direkten Weg über *lokale Kurvenkongruenzen* und deren *Tangentenvektorfelder* wählt. Eine Kongruenz von Kurven ist so definiert, dass durch jeden Punkt der Mannigfaltigkeit *genau eine Kurve* geht. Sie ist gegeben durch

$$x^\mu = x^\mu(u), \quad (43)$$

wobei der Parameter u die Kurve parametrisiert. Das Tangentialvektorfeld dx^μ/du soll nun ein Vektorfeld X^μ definieren, das sich an jedem Punkt der Kurven der Kongruenz anschmiegt. Die Kurven erfüllen so die Differentialgleichung

$$\frac{dx^\mu}{du} = X^\mu(x^\mu(u)). \quad (44)$$

Der Existenz- und Eindeutigkeitssatz für gewöhnliche Differentialgleichungen garantiert die Existenz genau einer Lösung.

Im folgenden muss der *Paralleltransport eines Tensors beliebiger Stufe* $T_{\nu \dots}^{\mu \dots}$ *entlang einer Kurve* gewährleistet werden. Dies gilt, wenn die *totale Ableitung des Tensors* nach dem Kurvenparameter u verschwindet

$$\frac{D}{Du}(T_{\nu \dots}^{\mu \dots}) = 0. \quad (45)$$

Die totale Ableitung D ist definiert durch

$$\frac{D}{Du}(T_{\nu \dots}^{\mu \dots}) = \nabla_X T_{\nu \dots}^{\mu \dots} = X^\lambda \nabla_\lambda T_{\nu \dots}^{\mu \dots}, \quad (46)$$

mit ∇_λ als übliche, kovariante Ableitung. ∇_X angewendet auf einen Tensor bezeichnet also gerade dessen mit X verjüngte kovariante Ableitung.

Eine Geodäte ist gerade dadurch definiert, dass ein Tangentenvektor an die geodätische Kurve nach einem Paralleltransport gerade ein Vielfaches von sich selbst ist. Mathematisch ist dies genau dann erfüllt, wenn der parallel verschobene Vektor an jedem Punkt der Kurve parallel, das heißt proportional zum Tangentenvektor an diesem Punkt ist:

$$\frac{D}{Du} \left(\frac{dx^\mu}{du} \right) = \lambda(u) \frac{dx^\mu}{du}. \quad (47)$$

Daraus wird mit Gleichung (46) die *Gleichung einer affinen Geodäte*

$$\nabla_X X^\mu = \lambda X^\mu \quad (48)$$

oder äquivalent dazu

$$\frac{d^2 x^\mu}{du^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{du} \frac{dx^\sigma}{du} = \lambda(u) \frac{dx^\mu}{du}. \quad (49)$$

Für eine spezielle Parametrisierung verschwindet gerade λ , so dass sich die affine Geodätengleichung zu

$$\frac{d^2 x^\mu}{ds^2} + \Gamma_{\nu\sigma}^\mu \frac{dx^\nu}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (50)$$

reduziert. Der bestimmte Parameter s heißt *affiner Parameter*.

Mit der Deutung von $\Gamma_{\nu\sigma}^\mu$ als affinen Zusammenhang, kann dieser mit dem *Christoffel-Symbol zweiter Art* assoziiert werden. Metrische Geodäten fallen dann mit affinen Geodäten zusammen, und es gilt:

$$\Gamma_{\lambda\mu}^\kappa = \left\{ \begin{array}{c} \kappa \\ \lambda\mu \end{array} \right\} \quad (51)$$

Letztlich sind das Ableitungen des metrischen Tensors, wie ich es im Anhang A.1 darstelle. Die Kurven-Schar, die diese Gleichung löst, entspricht gerade sämtlichen Geodäten dieser Metrik.

Gilt neben Gleichung (50) auch noch

$$g_{\mu\nu} = \frac{dx^\mu}{du} \frac{dx^\nu}{du} = 0, \quad (52)$$

so ist der Abstand zwischen zwei Punkten in der Raumzeit null und so auch der Tangentenvektor null: Geodäten, die dann Lösung von (50) sind, heißen **Nullgeodäten**.

Die klassische Methode ist nun, die Geodäten-Gleichung direkt zu integrieren, um Teilchentrajektorien zu erhalten. Ich möchte jedoch in den nächsten Kapiteln eine alternative Methode vorstellen, die von *Brandon Carter (1968)* [7] stammt. Sie macht sich den Formalismus der **Erhaltungsgrößen** zunutze, wie man ihn aus der klassischen Mechanik kennt. Aus dem Wirkungsfunktional S folgen die **Bewegungsgleichungen** durch Ableitung nach den Erhaltungsgrößen und die Photonenimpulse durch Ableitung nach den jeweiligen Koordinaten. *Carters* Verdienst war es, einen *Separationsansatz* für die Wirkung anzunehmen, und so ein **viertes Integral der Bewegung** zu extrahieren. Mit den Photonenimpulsen im System des *Zero Angular Momentum Observer* (oder kurz **ZA-MO**), wo $\Omega = \omega$ gilt, beschafft man sich über eine Lorentz-Transformation ins Ruhesystem des Plasmas schließlich den **verallgemeinerten Rotverschiebungsfaktor** g . Die vierte Konstante der Bewegung, die *Carter-Konstante*, liefert dann die zu lösende Geodätengleichung.

3.3.1 Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung

Die vierte Erhaltungsgröße, die **Carter-Konstante** $\mathcal{C}$, hatte *Brandon Carter* aus der *Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung* extrahiert. Ich möchte an dieser Stelle *Carters* Weg nachzeichnen.

Eine Geodäte sei durch die Funktion $\lambda(s)$, wobei s die Bogenlänge ist, parametrisiert. Mit dem *Wirkungsfunktional*

$$S(\tau) = \int_0^\tau \mathcal{L} ds, \quad (53)$$

wobei $\mathcal{L}$ die Lagrange-Funktion

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu[\lambda(s)]}{ds} \frac{dx^\nu[\lambda(s)]}{ds} \quad (54)$$

ist, kann man nun den üblichen Formalismus durchexerzieren.

Die *Euler-Lagrange-Gleichungen*

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0 \quad (55)$$

liefern bekanntermaßen die *Bewegungsgleichungen* des Problems, die hier den **Geodäten-gleichungen** entsprechen.

Die *partiellen Ableitungen der Wirkung* S ergeben gerade die Photonenimpulse:

$$p_\mu = \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \quad (56)$$

Mit Gleichung (53) und der Kenntnis, dass $\mathcal{H}$ gerade die *Legendre-Transformierte* gemäß (202) ist, kann man zeigen, dass

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} = \mathcal{H} \quad (57)$$

gilt.

Schreibt man nun $\mathcal{H}$ als Funktion der Impulse, erhält man gerade die **Hamilton-Jacobi-Gleichung**

$$\frac{\partial S}{\partial \tau} - \mathcal{H} \left(x^\mu, \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \right) = 0, \quad (58)$$

eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung.

Die Gleichungen (202), (56) und (57) kann man auch als

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{\mu\nu} \frac{\partial S}{\partial x^\mu} \frac{\partial S}{\partial x^\nu} \quad (59)$$

schreiben. Spezifiziert man nun $g^{\mu\nu}$ auf die Kerr-Metrik, so erhält man:

$$2 \frac{\partial S}{\partial \tau} = \frac{\Sigma^2}{\rho^2 \Delta} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 + \frac{4aMr}{\rho^2 \Delta} \frac{\partial S}{\partial t} \frac{\partial S}{\partial \Phi} \quad (60)$$

$$- \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2 \Delta \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial S}{\partial \Phi} \right)^2 - \frac{\Delta}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 \quad (61)$$

Man macht nun den *Separationsansatz nach Carter*, der durch seine 'Einfachheit' motiviert ist: S separiere in **allen** Koordinaten

$$S = \frac{1}{2} m^2 \tau - Et + L_z \Phi + S_r(r) + S_\theta(\theta), \quad (62)$$

mit den Erhaltungsgrößen Masse m , Gesamtenergie E und Drehimpuls L_z des Teilchens. Dies eingesetzt in (60) liefert

$$m^2 \rho^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (aE \sin^2 \theta - L_z)^2 - \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 - \frac{\partial S_\theta^2}{\partial \theta} \quad (63)$$

oder umgeformt

$$\begin{aligned} & \left\{ m^2 r^2 - \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 + (L_z - aE)^2 + \Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r} \right)^2 \right\} \\ & + \left\{ [a^2 m^2 + (L_z^2 \csc^2 \theta - a^2 E^2)] \cos^2 \theta + \frac{\partial S_\theta^2}{\partial \theta} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (64)$$

Da Funktionen in den geschweiften Klammern nur Funktionen von r und θ sind, müssen sie für sich genommen *konstant* sein. Setzt man die zweite Klammer als Carter-Konstante $\mathcal{C}$ an, so wird

$$\left(\frac{\partial S_\theta}{\partial \theta}\right)^2 = \mathcal{C} - (L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta - a^2 E^2 + a^2 m^2) \cos^2 \theta \quad (65)$$

$$\Delta \left(\frac{\partial S_r}{\partial r}\right)^2 = \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - [\mathcal{C} + (L_z - aE)^2 + m^2 r^2] \quad (66)$$

Üblich sind nun folgende Abkürzungen:

$$P = (r^2 + a^2)E - aL_z \quad (67)$$

$$R = P^2 - \Delta[\mathcal{C} + (L_z - aE)^2 + m^2 r^2] \quad (68)$$

$$\Theta = \mathcal{C} - [a^2(m^2 - E^2) + L_z^2 \operatorname{cosec}^2 \theta] \cos^2 \theta \quad (69)$$

Für $m = 0$ erhält man die Größen für die Nullgeodäten.

Damit kann der Separationsansatz (62) nun

$$S = \frac{1}{2} m^2 \tau - Et + L_z \Phi + \int \frac{\sqrt{R}}{\Delta} dr + \int \sqrt{\Theta} d\theta \quad (70)$$

geschrieben werden. Nach Gleichung (56) sind die Photonen-Impulse dann

$$p_t = \frac{\partial S}{\partial t} = -E, \quad (71)$$

$$p_\Phi = \frac{\partial S}{\partial \Phi} = L_z, \quad (72)$$

$$p_r = \frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\sqrt{R}}{\Delta}, \quad (73)$$

$$p_\theta = \frac{\partial S}{\partial \theta} = \sqrt{\Theta}. \quad (74)$$

3.3.2 Geodätengleichung und Erhaltungsgrößen

Die **Bewegungsgleichungen** erhält man nun durch die Ableitung der Wirkung S nach den Erhaltungsgrößen $\mathcal{C}$, m^2 , E und L_z . Nach dem *Hamiltonschen Prinzip* wird das Wirkungsfunktional für die tatsächliche Bahn, also die Geodäte, *minimiert*. So folgt:

$$\frac{\partial S}{\partial \mathcal{C}} = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\Delta \sqrt{R}} \frac{\partial R}{\partial \mathcal{C}} dr + \frac{1}{2} \int \frac{1}{\Theta} \frac{\partial \Theta}{\partial \mathcal{C}} d\theta = 0 \quad (75)$$

Weil für die Ableitung nach der Erhaltungsgröße $\mathcal{C}$

$$\frac{\partial R}{\partial \mathcal{C}} = -\Delta \quad (76)$$

und

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \mathcal{C}} = 1 \quad (77)$$

gilt, ergibt dies kurz die wesentliche Beziehung

$$\int_{r_{em}}^{r_{obs}} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \int_{\theta_{em}}^{\theta_{obs}} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta}}. \quad (78)$$

Diese Integral-Gleichung muss man lösen, möchte man die Photonen-Trajektorien beschreiben, die von der Akkretionsscheibe bei den Emissionskoordinaten r_{em} und θ_{em} starten und den Beobachter im Abstand r_{obs} erreichen.

Entsprechend findet man Gleichungen für die anderen Erhaltungsgrößen. Nun kann man diese Gleichungen durch *Integrationsverfahren* lösen, wie es *Fanton et al. (1997)* [22] vorgeschlagen haben. Wie das im einzelnen gelöst wurde, möchte ich in Abschnitt 4.3 diskutieren.

Neben den offensichtlichen **Erhaltungsgrößen** m , E und L_z existiert in einer stationären und axialsymmetrischen Raumzeit eine weitere Größe, die entlang den Geodäten erhalten ist, wie aus dem *Theorem von Walker und Penrose* (1970) hervorgeht: In einer Typ-D Raumzeit (siehe *Petrov-Klassifikation*, Anhang A.2) existiert ein symmetrischer *konformer Killing-Tensor* zweiter Stufe

$$K_{\mu\nu} = 2\rho^2 l_{(\mu} n_{\nu)} - r^2 g_{\mu\nu} \quad (79)$$

mit der Eigenschaft

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu\sigma)} = 0, \quad (80)$$

dessen zweifache Verjüngung

$$K = K_{\mu\nu} p^\mu p^\nu = 2\rho^2 (l_\mu p^\mu)(n_\nu p^\nu) - r^2 g_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (81)$$

oder

$$K = 2\rho^2 (m_\mu p^\mu)(\bar{m}_\nu p^\nu) + a^2 p^2 \cos^2 \theta \quad (82)$$

ist. Diese Größe K ist aufgrund der Killing-Gleichung (195) erhalten!

$$(p^\mu \nabla_\mu) K = 2K_{\nu\sigma} p^\nu (p^\mu \nabla_\mu) p^\sigma + p^\mu p^\nu p^\sigma \nabla_{(\mu} K_{\nu\sigma)} = 0 \quad (83)$$

K formuliert in metrischen Funktionen und den Erhaltungsgrößen E und L_z , sowie den Impulsen p_r und p_θ ergibt schließlich

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{\Delta} [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \frac{\rho^4}{\Delta} (p_r)^2 - m^2 r^2 \\ &= \left(aE \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta} \right)^2 + \rho^4 (p_\theta)^2 + m^2 a^2 \cos^2 \theta \end{aligned} \quad (84)$$

oder ausgedrückt in den Impulsen

$$\rho^2 p^t = \frac{1}{\Delta} (\Sigma^2 E - 2aMrL_z) \quad (85)$$

$$\rho^2 p^\Phi = \frac{1}{\Delta} \left[(\rho^2 - 2Mr) \frac{L_z}{\sin^2 \theta} + 2aMrE \right] \quad (86)$$

$$\rho^4 (p^r)^2 = [(r^2 + a^2)E - aL_z]^2 - \Delta (m^2 r^2 + K) \quad (87)$$

$$\rho^4 (p^\theta)^2 = - \left(aE \sin \theta - \frac{L_z}{\sin \theta} \right)^2 + K - m^2 a^2 \cos^2 \theta \quad (88)$$

Diesen kompletten Satz an Photonenimpulsen im ZAMO-System, den *Carter* erstmals lieferte, werde ich in Kapitel 3.4.2 wieder aufgreifen, um ihn über eine Lorentz-Transformation in das Ruhesystem des Plasmas zu transformieren. Dann ist die Formulierung des verallgemeinerten Rotverschiebungsfaktors möglich.

3.4 Strahlungstransport in der Kerr-Metrik

Die Strahlungstransport löst die Probleme, die mit der Wechselwirkung der Strahlung mit der Materie assoziiert sind und hier im speziellen die Strahlenpropagation in der Kerr-Metrik. Der Rotverschiebungsfaktor g ist eine wesentliche Größe, deren Variation über die ganze Scheibe farbkodiert dargestellt werden kann. Weil die Scheiben beobachtungstechnisch *nicht* räumlich aufgelöst werden können, ist es nur möglich, den spektralen Fluss zu messen. Die Integration über die gesamte, emittierende Scheibenoberfläche liefert infolgedessen den spektralen Fluss. Wie man diese Observable aus den Photonenimpulsen gewinnt, möchte ich in diesem Kapitel erläutern.

3.4.1 Der spektrale Fluss

Ausgangspunkt ist der spektrale Fluss F_ν^{obs} , der letztendlich die astronomische Beobachtungsgröße ist. Er wird mit Röntgensatelliten detektiert und in $X\gamma$ -Spektren aufgetragen. Im Prinzip entspricht das Fluss-Integral einer über einen Raumwinkel $d\Omega$ integrierten, beobachteten Intensität:

$$F_\nu^{obs} = \int d\Omega I_\nu^{obs} \quad (89)$$

Mit dem *Liouville-Theorem* ('Erhaltung des Phasenraum-Stromes') transformiert man nun die beobachtete Intensität in die Intensität im Ruhesystem des Plasmas $\hat{I}_\nu^{em}$. Es gilt dann:

$$I_\nu^{obs} = g^3 \hat{I}_\nu^{em} \quad (90)$$

So folgt, dass F_ν^{obs} das Integral der Intensität im Ruhesystem des Emitters gewichtet mit der dritten Potenz des Rotverschiebungsfaktors über dem Raumwinkel ist

$$F_\nu^{obs} = \int d\Omega g^3 \hat{I}_\nu^{em}. \quad (91)$$

Im numerischen Teil werde ich darauf eingehen, wie man die Fluss-Gleichung (91) diskretisiert und so den Fluss durch Summation über die einzelnen Pixel erhält.

3.4.2 Photonenimpulse und Rotverschiebungsfaktor

Die Photonenimpulse kann man den Gleichungen (85) und folgende entnehmen und mit den metrischen Funktionen aus Kapitel 3.2 umschreiben. Im ZAMO leitete *Carter*, wie bereits beschrieben, die folgende Gestalt der Impulse her:

$$p^{(t)} = \frac{1}{\alpha}(1 - \omega\lambda) \quad (92)$$

$$p^{(\Phi)} = \frac{\lambda}{\tilde{\omega}} \quad (93)$$

$$p^{(r)} = \frac{e^{\mu_r}}{\rho^2} \sqrt{R} \quad (94)$$

$$p^{(\theta)} = \frac{e^{\mu_\theta}}{\rho^2} \sqrt{\Theta}, \quad (95)$$

wobei

$$\lambda = \frac{L_z}{E} \quad (96)$$

$$e^{\mu_r} = \frac{\rho}{\sqrt{\Delta}} \quad (97)$$

$$e^{\mu_\theta} = \rho. \quad (98)$$

Eine Lorentz-Transformation dieser ZAMO-Impulse in das Ruhesystem des Plasmas liefert die Impulse $\hat{p}^\mu$

$$\hat{p}^t = \gamma [p^{(t)} - v^{(j)} p_{(j)}] \quad (99)$$

$$\hat{p}^i = p^{(i)} + \frac{1}{v^2} [(\gamma - 1) p_{(j)} v^{(j)} v^{(i)} - \gamma p^{(t)} v^{(i)}]. \quad (100)$$

Ich diskutiere an dieser Stelle nur die *zeitliche Komponente* des Impulses im Ruhesystem $\hat{p}^t$, da diese maßgeblich in den Rotverschiebungsfaktor g eingeht.

$$\hat{p}^t = \gamma [p^{(t)} - v^{(r)} p_{(r)} - v^{(\theta)} p_{(\theta)} - v^{(\Phi)} p_{(\Phi)}] \quad (101)$$

$$= \gamma \left[\frac{1}{\alpha} (1 - \omega \lambda) - v^{(r)} \frac{\sqrt{R}}{\rho \sqrt{\Delta}} - v^{(\theta)} \frac{\sqrt{\Theta}}{\rho} - v^{(\Phi)} \frac{\lambda}{\tilde{\omega}} \right] \quad (102)$$

Der **Rotverschiebungsfaktor** g ist definiert zu

$$g \equiv \frac{\nu_{obs}}{\nu_{em}} = \frac{\hat{p}_{obs}^t}{\hat{p}_{em}^t} \quad (103)$$

Mit $\hat{p}_{obs}^t \rightarrow 1$ für $r \rightarrow \infty$ folgt sodann der Rotverschiebungsfaktor für einen unendlich entfernten Beobachter zu

$$g = \frac{\alpha}{\gamma \left[(1 - \omega \lambda) - \alpha v^{(r)} \frac{\sqrt{R}}{\rho \sqrt{\Delta}} - \alpha v^{(\theta)} \frac{\sqrt{\Theta}}{\rho} - \alpha v^{(\Phi)} \frac{\lambda}{\tilde{\omega}} \right]}. \quad (104)$$

Hier sieht man schön die Abhängigkeit des Rotverschiebungsfaktors von dem Geschwindigkeitsfeld $\vec{v} = (v^{(r)}, v^{(\theta)}, v^{(\Phi)})$ des Plasmas. Es ist nun Aufgabe der *Magnetohydrodynamik* (MHD) relativistischer Scheiben und Jets unter anderem das Geschwindigkeitsfeld des Plasmas offenzulegen. Meist werden MHD-Probleme auf *adaptiven Gittern* gelöst, die eine höhere Auflösung bei besonders relevanten und interessanten Bereichen ermöglichen. Ausfluss dieser aufwendigen Berechnungen sind Sätze von Daten auf jedem Gitterpunkt, bestehend aus Temperatur, Dichte, Druck etc.

3.4.3 Geschwindigkeitsfelder des Plasmas

In diesem Abschnitt möchte ich die Wahl des Geschwindigkeitsfelds diskutieren. Ich stelle ältere und verallgemeinerte Modelle vor. Man hat es im Prinzip mit drei globalen Komponenten zu tun:

- Rotation
- Akkretion
- Materie-Ausflüsse

Ziel ist es nun, diese Aspekte in den räumlichen Komponenten der *kontravarianten Vierer-Geschwindigkeit* v^μ zu berücksichtigen. Ich setze dies durch folgende Funktionen um:

- v^Φ legt die Rotation fest. Dabei muss zwischen der Rotation innerhalb und außerhalb der marginal stabilen Bahn unterschieden werden. Es gilt allgemein:

$$v^\Phi = \tilde{\omega} \left(\frac{\Omega - \omega}{\alpha} \right), \quad (105)$$

mit dem 'Zylinderradius'

$$\tilde{\omega} = \frac{\Sigma}{\rho} \sin \theta. \quad (106)$$

Das *Keplersche Rotationsgesetz* beschreibt den 'Außenraum'

$$\Omega = \Omega_{Kep} = \frac{\sqrt{M}}{\sqrt{r^3} + a\sqrt{M}} \text{ bei } r > r_{ms}. \quad (107)$$

Hingegen ist der spezifische Drehimpuls l allgemein

$$l = \frac{\tilde{\omega}^2(\Omega - \omega)}{(\alpha^2 - \omega^2\tilde{\omega}^2) + \omega\tilde{\omega}^2\Omega}. \quad (108)$$

Wie MHD-Modelle zeigen, ist die Annahme, dass l innerhalb r_{ms} konstant ist, eine gute Näherung. Ich schreibe daher $l_{in} = l(r_{ms}) \equiv l_{ms}$. Das führt letztlich auf

$$\Omega = \Omega_{in} = \omega + \frac{\alpha^2}{\tilde{\omega}^2} \frac{l_{ms}}{1 - l_{ms}} \text{ bei } r \leq r_{ms}, \quad (109)$$

mit

$$l_{ms} = \frac{\tilde{\omega}^2(r_{ms})[\Omega_{Kep}(r_{ms}) - \omega(r_{ms})]}{[\alpha^2(r_{ms}) - \omega^2(r_{ms})\tilde{\omega}^2(r_{ms})] + \omega\tilde{\omega}^2(r_{ms})\Omega_{Kep}(r_{ms})}. \quad (110)$$

So ist ein stetiger Übergang von Ω_{Kep} nach Ω_{in} am Radius marginaler Stabilität gewährleistet.

- v^r bestimmt die radiale Drift. Ist v^r positiv handelt es sich um radiale Ausflüsse, ist es negativ sind es radiale Einflüsse. Ich nehme ein *Freifall-Gesetz an*, das proportional zu $r^{-1/2}$ ist.

$$v^r = q \frac{1}{\sqrt{r}} \quad (111)$$

- wenn $q < 1$: radialer Einfall
- wenn $q > 1$: radialer Ausfluss

Alternativ hierzu teste ich auch ein Freifall-Gesetz nach *Cunningham (1975)*:

$$v^r = -\sqrt{\frac{2}{3r_{ms}} \left(\frac{r_{ms}}{r} - 1\right)^3} \quad (112)$$

- Die *poloidale Komponente* der Geschwindigkeit, die auch Materie-Ausflüsse berücksichtigt, lautet

$$v^{pol} = \sqrt{(v^r)^2 + (v^\theta)^2}. \quad (113)$$

Der Abstellwinkel des Jets von der Scheibe muss dabei die *Zentrifugalbedingung nach Blandford* erfüllen und mindestens 30° groß sein. Dies führt auf die Bedingung

$$v^\theta = \sqrt{3} v^r, \quad (114)$$

also mit Gleichung (113)

$$v^{pol} < 2v^r. \quad (115)$$

Ich setze außerdem eine Abhängigkeit von v^Φ an

$$v^\theta = c v^\Phi \text{ mit } c > 1. \quad (116)$$

Diese Form von v^θ habe ich im Code implementiert und gilt unter Berücksichtigung von Gleichung (114). Ältere Modelle, die ich in Kapitel 5.4 beschreiben werde, berücksichtigten bisher nur die Rotation, also die Komponente v^Φ , wobei hier eine Keplersche Rotation nach Gleichungen (105) und (107) vom Außenradius der Scheibe bis zur marginal stabilen Bahn angenommen wurde. Der Bereich zwischen Horizonradius und marginal stabiler Bahn war in diesen Modellen leer! Die Komponenten v^r und v^θ wurden Null gesetzt!

Die aktuellen MHD-Modelle generieren komplizierte Geschwindigkeitsfelder, sowohl für den inneren Bereich der Scheibe (Akkretion), als auch für Materie-Ausflüsse, wie Jets und Winde. *Abramowicz et al. (1999)* [1] und (2000) [2] nehmen beispielsweise eine quasi-sphärische Akkretion im Innenbereich, wenige Gravitationsradien vor dem Schwarzen Loch an. Dies ist dadurch motiviert, dass die Viskositäten in der Scheibe das Plasma soweit abbremesen, dass es radial in das Zentrum fällt. In dem von mir entwickelten objektorientierten **Kerr Ray-Tracer** können Akkretion und Materie-Ausfluss berücksichtigt werden. Außerdem hat der Anwender die volle Kontrolle über die Koeffizienten der Geschwindigkeitskomponenten und kann so individuell bestimmen, wie sehr bestimmte Einflüsse in das resultierende Geschwindigkeitsfeld des Plasmas eingehen. Der Kerr Ray-Tracer bietet so die Möglichkeit, direkt den Einfluss von Rotation, Akkretion und Jets/Winden auf das Emissionslinienprofil zu studieren. Im übrigen ist das Geschwindigkeitsfeld leicht modifizierbar und kann an neue, zukünftige Modelle ohne großen Aufwand angepasst werden.

3.4.4 Das radiale Emissivitätsgesetz

In die Intensität im Ruhesystem des Plasmas $\hat{I}_\nu^{em}$ gehen zwei wesentliche Größen ein: die *radiale Emissivität* $\epsilon(r)$ und die *Frequenzabhängigkeit des Flusses* $\zeta(\nu^{em})$:

$$\hat{F}_\nu^{em} = \pi \hat{I}_\nu^{em} = \epsilon(r) \zeta(\nu^{em}). \quad (117)$$

Üblicherweise nimmt man vereinfachend isotrope und monochromatische Emission bei der Eisenlinien-Ruheenergie $E_0 = h\nu_0 = 6.4$ keV an, was durch eine *Delta-Funktion* für ζ umzusetzen ist. Alternativ wäre auch ein *Gauß-Profil* möglich oder *Lorentz-Kurven*. Also folgt

$$\hat{F}_\nu^{em} = \epsilon(r) \delta(\nu^{em} - \nu_0). \quad (118)$$

Interessant ist nun das radiale Emissivitätsgesetz $\epsilon(r)$, für das meistens ein *Potenz-Gesetz* angenommen wird. Dies ist dadurch motiviert, dass sämtliche Größen, wie Temperatur, Dichte etc. mit einem Potenz-Gesetz in der Scheibe abklingen, wie MHD-Modelle zeigen. Nun kann man ein *einfaches Potenz-Gesetz* (s : single) annehmen

$$\epsilon(r) \propto r^{-\alpha_s}, \quad (119)$$

mit α_s dem *Emissivitätsindex*.

Ebenso ist aber auch ein *doppeltes Potenz-Gesetz* (d : double) denkbar, bei dem der Emissivitätsindex α_d bei einem bestimmten Scheibenradius r_{break} auf einen Wert β_d springt.

$$\begin{aligned} \epsilon(r) &\propto r^{-\alpha_d} & \text{für } r \leq r_{break} \\ \epsilon(r) &\propto r^{-\beta_d} & \text{für } r \geq r_{break} \end{aligned} \quad (120)$$

In der doppelt-logarithmischen Auftragung in Abbildung 15 habe ich diesen Sprung illustriert. Beide Möglichkeiten, sowohl das einfache, als auch das doppelte Potenz-Gesetz habe ich im Code implementiert. Es ist dem Anwender überlassen, eines auszuwählen und dessen relative Stärke zu bemessen. Es sei angemerkt, dass die Gruppe um *Dabrowski et al. (1997)* [13] ein einfaches Potenz-Gesetz abgeleitet hat (siehe Abbildung 16). Das Ergebnis war ein Emissivitätsindex von etwa 3.5.

Desweiteren ist der *schnelle Abfall* des Emissivitätsgesetzes dafür verantwortlich, dass es reicht, die emittierende Region der Scheiben in den Modellen mit einer recht kleinen Ausdehnung bis etwa $100r_g$ anzunehmen, obwohl reale Scheiben Außenradien bis etwa $10^4 r_g$ haben. Diese kleinen Terme tragen eben zum Integral (91) kaum noch bei, weil das Potenz-Gesetz sie stark reduziert.

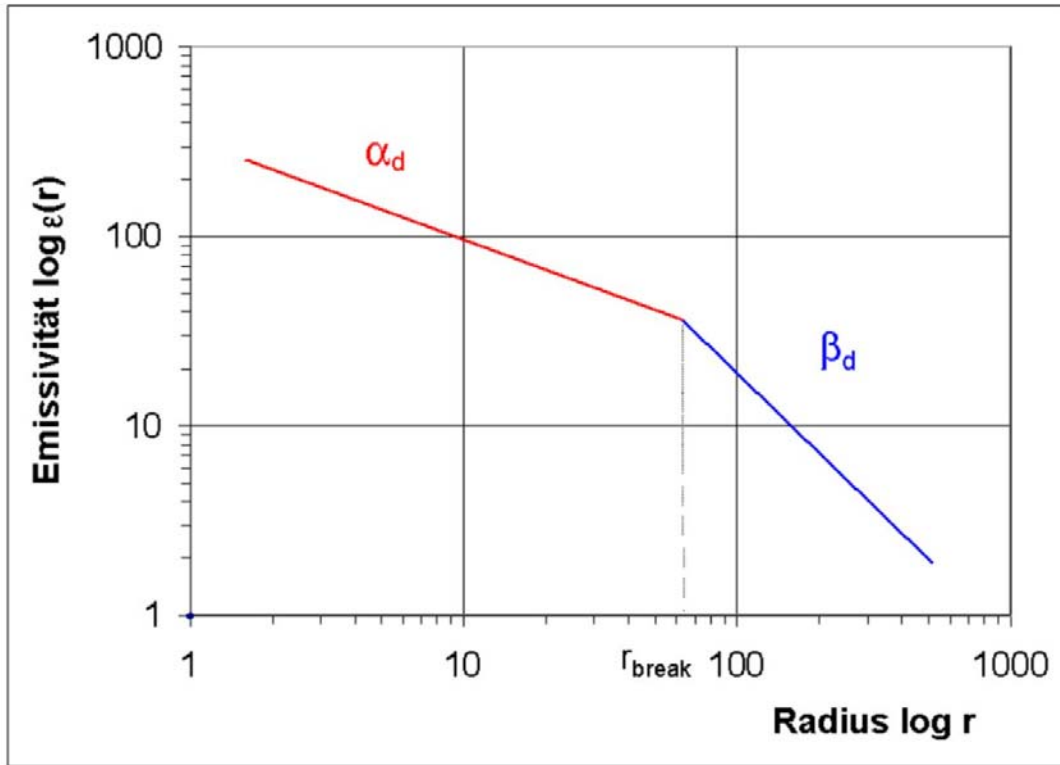


Abbildung 15: Doppelt-logarithmische Auftragung der radialen Emissivität als doppeltes Potenz-Gesetz, das am Radius r_{break} vom Emissivitätsindex α_d auf β_d springt. (A. Müller, 2000)

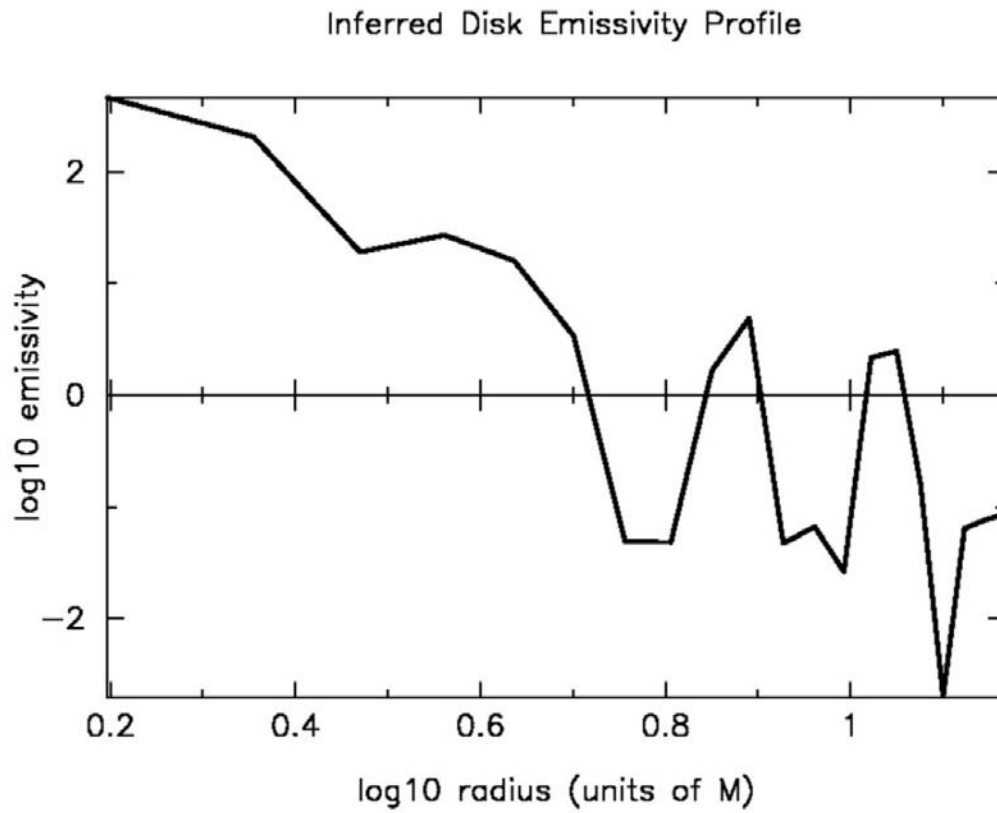


Abbildung 16: Doppelt-logarithmische Auftragung des abgeleiteten Emissivitätsprofils. Bei kleinen Radien zeigt sich eine Evidenz für ein Potenz-Gesetz mit einer Steigung von 3.5; bei hohen Radien wird das Rauschen sehr stark. (*Dabrowski et al. 1997* [13])

4 Ray-Tracing in der Kerr-Geometrie

Dieses Kapitel thematisiert sämtliche Aspekte der Instrumentarien, die ich zur Berechnung der Emissionslinienprofile verwendet habe, insbesondere die Methodik des *Ray-Tracings*, aber auch *numerische Werkzeuge*, die in den einzelnen Schritten benötigt wurden. Außerdem möchte ich die wesentlichen Klassen meines Projektes *KerrRaypp* im Rahmen der objektorientierten Programmierung mit C++ sowie die *Datenkapselung* besonders beleuchten.

4.1 Prinzip des Ray-Tracings

Ray-Tracing oder zu deutsch *Strahlenverfolgung* ist ein häufig verwendetes Instrument zur Visualisierung von Objekten. Das Prinzip ist einfach: Lichtstrahlen treffen von einer imaginären Quelle auf ein Objekt, wechselwirken mit diesem (Reflexion, Streuung, Transmission, Absorption) und erreichen schließlich eine virtuelle Kamera. Viele solcher Lichtstrahlen generieren ein Bild des Objektes. Ziel ist es nun, diese Strahlen zurückzuverfolgen und so mathematisch das Bild auf der Empfangsfläche der Kamera zu erzeugen. Im flachen Raum ist dieses Problem relativ einfach zu handhaben, da hier lediglich die Gesetze der geometrischen Optik eingehen. Als Basis für die Ausbreitung werden Vektorklassen verwendet, weil Licht im flachen Raum Geraden folgt. Die Geodäten dieser Metrik sind also ein trivialer Fall. Ganz anders sieht es hingegen im gekrümmten Raum der ART aus. Hier muss für die spezifische Metrik **für jeden einzelnen Lichtstrahl** die Geodätengleichung gelöst werden. Hier bewegen sich Lichtstrahlen im allgemeinen auf krummlinigen Trajektorien. Eine Illustration des Ray-Tracings zeigt Abbildung 17.

Ein Bild typischer Größe besteht aus etwa einer Million Pixeln, so dass der Aufwand des Ray-Tracings hier schon beträchtlich ist: man schießt etwa eine Million Lichtstrahlen auf ein Objekt und erhält Bilder der Datengröße von einigen Megabyte. Knapp gesagt, faltet Ray-Tracing die visuelle Information eines Objektes auf den Schirm eines Rezeptors.

Äußerst günstig erweist sich dabei der Gebrauch folgenden Prinzips: Lichtwege sind umkehrbar! Man kann den numerischen Aufwand so gewaltig durch die Methode des *rekursiven Ray-Tracings* reduzieren. Anschaulich heißt das, dass die Lichtstrahlen *vom Beobachter*, dem Bildschirm, ausgehen und nur wirklich die Strahlen berechnet/zurückverfolgt werden, die tatsächlich das Bild generieren. Im allgemeinen wird es nämlich so sein, dass die meisten Lichtstrahlen, die von der Lichtquelle ausgehen, den Bildschirm verfehlen. Im speziellen Fall meiner Arbeit bedeutet das nun, dass Lichtstrahlen vom rechteckigen Bildschirm ausgehen und für jeden die Geodätengleichung gelöst wird. Einige dieser Strahlen treffen nun auf die emittierende Akkretionsscheibe, die in die Kerr-Metrik eines Schwarzen Loches eingebettet ist. Es existiert deshalb eine eindeutige Zuordnung zwischen einem Pixel (x, y) des Bildes und einem Punkt $(r, \theta = \pi/2, \Phi)$ auf der Scheibe. Dabei gilt, dass die Erhaltungsgrößen des Kapitels 3.3.2 *für jede Geodäte separat* erhalten sind und die Photonen trajektoren natürlich unabhängig von der Photonenenergie sind. Letzteres erklärt sich dadurch, weil Gravitation nach *Einstein* eine geometrische Eigenschaft des Raumes ist.

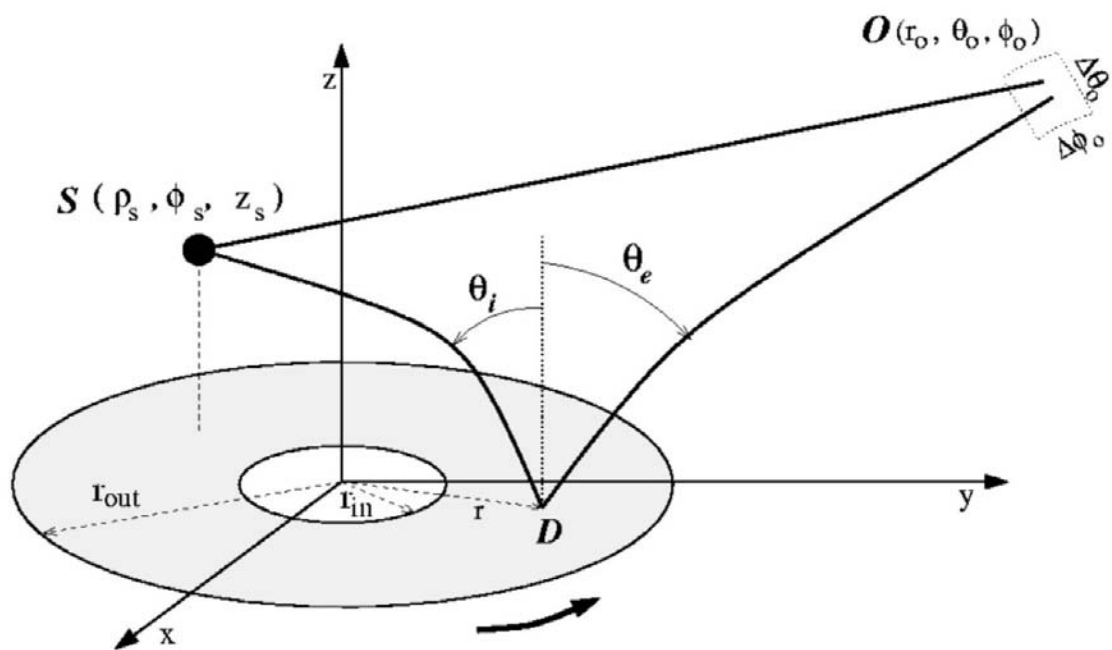


Abbildung 17: Schema des Ray-Tracings: Strahlung geht von der Primär-Quelle S aus, wird an der Scheibenoberfläche reflektiert und re-emittiert (Fluoreszenz) und gelangt zum Beobachter O (*Dabrowski & Lasenby, 2000* [14])

4.2 Ein historischer Überblick

Cunningham, 1975: *C.T. Cunningham* [11] erarbeitete 1975 eine Methode, die die relativistischen Effekte für die Spektren von Akkretionsscheiben berücksichtigt. Die Voraussetzungen entsprechen dem relativistischen Standardmodell von *Page & Thorne (1974)* [48]. Danach liegt die Scheibe in der Äquatorebene des Schwarzen Loches und ist geometrisch dünn sowie axialsymmetrisch und stationär. Die Materie fällt nun auf zirkularen Geodäten in das Schwarze Loch. *Cunningham* trug nun dem Doppler-Effekt, der Gravitationsrotverschiebung und den gravitativen Linseneffekten durch eine so genannte '*Transferfunktion*' Rechnung. Diese Funktion faltet man in das Spektrum, das an der Scheibenoberfläche emittiert wird. Diese Transferfunktionen sind für verschiedene Schwarze Löcher vom Kerr-Typ tabelliert. Die Transferfunktion ist stark von der Inklination abhängig: ein äquatorialer Beobachter sieht ein viel härteres Spektrum als ein polarer Beobachter (vergleiche Abbildung 9). Ich möchte kurz die Grundzüge von *Cunningham's* Methode darstellen. Er verwendete anstatt des Rotverschiebungsfaktors g einen Energie-Parameter g^* , der über die extremalen Werte von g einer Geodäten-Familie definiert ist.

$$g^* \equiv \frac{g - g_{\min}}{g_{\max} - g_{\min}}, \quad 0 \leq g^* \leq 1 \quad (121)$$

Für jeden Wert g^* existieren zwei Geodäten, es sei denn der Beobachter schaut genau auf die Scheibenkante ($\vartheta_0 = \pi/2$).

Die Transferfunktion ist nun definiert als

$$f(g^*, r_e, \vartheta_0) \equiv \frac{r_0^2}{\pi r_e} g \sqrt{g^* - g^{*2}} \left[\frac{\partial \Omega}{\partial(g^*, r_e)} \right], \quad (122)$$

mit r_e als Emissionsradius auf der Scheibe, ϑ_0 der Inklination und der Jacobi-Determinante $\partial \Omega / \partial(g^*, r_e)$. Für letztere gilt:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial(g^*, r_e)} = (g_{\max} - g_{\min}) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial(g, r_e)} \right]. \quad (123)$$

Cunningham und *Bardeen* haben bereits 1973 [10] hergeleitet, wie man die Impakt-Parameter einer Geodäte α und β durch die Photonenimpulse und die Erhaltungsgrößen ausdrückt. Anschaulich markieren α und β die Position an einem Ausschnitt der Himmelskugel bezogen auf die Position des Schwarzen Loches.

$$\alpha = - \left(\frac{r p^{(\Phi)}}{p^{(t)}} \right)_{r \rightarrow \infty} = -\lambda / \sin \vartheta_0 \quad (124)$$

$$\beta = \left(\frac{r p^{(\theta)}}{p^{(t)}} \right)_{r \rightarrow \infty} = \sqrt{q^2 + a^2 \cos^2 \vartheta_0 - \lambda^2 \cot^2 \vartheta_0}, \quad (125)$$

mit $p^{(\alpha)}$ den Tetraden-Vektoren, $\lambda = L_z / E$ und der Carter-Konstante q .

Der differentielle Raumwinkel kann nun durch die differentiellen Impakt-Parameter ausgedrückt werden

$$r_0^2 d\Omega = \frac{\partial(\alpha, \beta)}{\partial(\lambda, q)} d\lambda dq = \frac{q}{\beta \sin \vartheta_0} d\lambda dq. \quad (126)$$

Also folgt für die Jacobi-Determinante mit g

$$r_0^2 \frac{\partial \Omega}{\partial(g, r_e)} = q / \{ \beta \sin \vartheta_0 [\partial(g, r_e) / \partial(\lambda, q)] \}. \quad (127)$$

Die Transferfunktion f ist damit wohldefiniert und kann nun in das Fluss-Integral gefaltet werden. Der spezifische Fluss dF_{E_0} , der von einem Photonenbündel zum Beobachter getragen wird, ist das Produkt von dem Raumwinkel, unter dem der Beobachter die Scheibe sieht, und der spezifischen Intensität, die man sich über das Liouville-Theorem (*Lindquist, 1966* [36]) beschaffen kann, wie ich bereits beschrieben habe.

$$dF_{E_0} = g^3 I_{E_0}(E_e = E_0/g, n_e, r_e) \left[\frac{\partial \Omega}{\partial(g^*, r_e)} \right] dg^* dr_e \quad (128)$$

Mit dem beobachteten, integrierten Fluss $F_0 = \int F_{E_0} dE_0$ erhält man die *'integrierte, spezifische Leuchtkraft'*:

$$L_0 = 4\pi r_0^2 F_0 = \int \int 2\pi I_{E_0}(E_0/g, n_e, r_e) f(g^*, r_e, \vartheta_0) \frac{g^3}{\sqrt{g^* - g^{*2}}} dg^* d(\pi r_e^2) \quad (129)$$

In der folgenden Abbildung tauchen ein paar Größen auf, die ich an dieser Stelle erläutern möchte:

L_∞ ist eine typische Leuchtkraft, die von der Akkretionsmaterie freigesetzte Energie im Unendlichen:

$$L_\infty = \dot{M}_0 c^2 (1 - \gamma_{ms}) = (0.9 \times 10^{38} \text{ erg s}^{-1}) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2}{3} M/r_{ms}} \right] \dot{M}_0^*, \quad (130)$$

mit der Normierung

$$\dot{M}_0^* = \dot{M}_0 / (10^{17} g \text{ s}^{-1}). \quad (131)$$

$\dot{M}_0$ ist die Akkretionsrate, γ_{ms} das Verhältnis der Energie im Unendlichen zur Ruhemasse des Plasmas am Radius marginaler Stabilität r_{ms} .

Die Größe E^* , auf die Energie in der Illustration normiert sind, ist eine typische Photonenenergie am inneren Rand der Scheibe. Sie ist definiert zu

$$E^* \equiv (2.8 \text{ keV}) \frac{1}{\sqrt{\frac{M}{3M_\odot}}} (\dot{M}_0 / 10^{17} g \text{ s}^{-1})^{1/4} \left(\frac{r_{ms}}{M} \right)^{-3/4}. \quad (132)$$

Die Transferfunktionen sind nun für verschiedene Werte von $\cos \vartheta_0$ und Emissionsradien r_e tabelliert. Das Spektrum relativistischer Scheiben kann nun mit dem Integral (129) berechnet und für verschiedene Spinparameter a dargestellt werden (siehe Abbildung 18).

Fabian et al., 1989: *Andrew C. Fabian* von der *Cambridge University* gehört zu den bekanntesten Astronomen, die sich mit dem Gebiet der Emissionslinien relativistischer Akkretionsscheiben beschäftigen. Erste Arbeiten gehen auf 1989 zurück. Untersuchungen am $X\gamma$ -Spektrum der stellaren Quelle Cyg-X1 ergaben, dass eine Komponente im Bereich

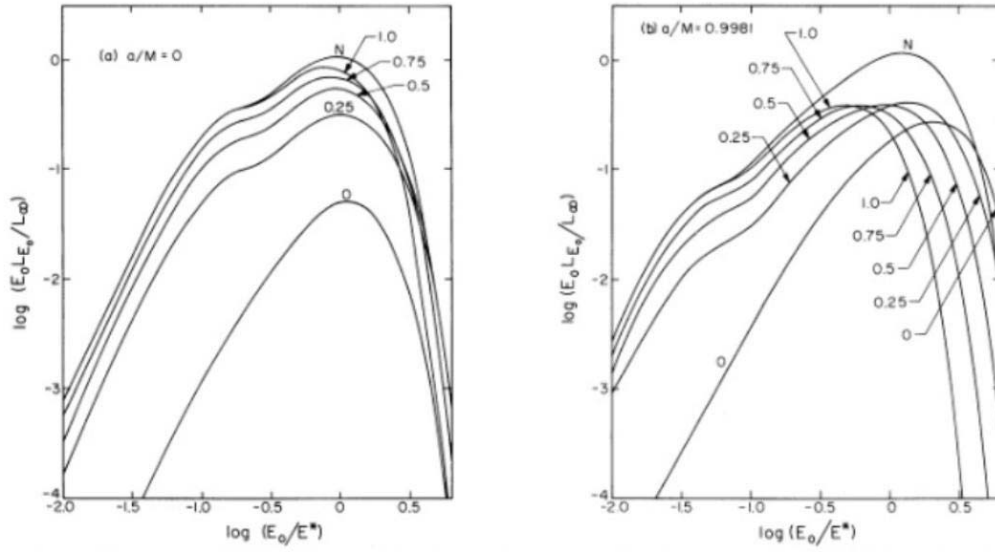


Abbildung 18: Berechnete Spektren von relativistischen Akkretionsscheiben (Schwarzkörperstrahlung) mit Hilfe von Transferfunktionen nach *Cunningham (1976)* [12]. Die Kurven sind mit $\cos \vartheta_0$ indiziert; 'N' steht für Newtonsch. L_∞ ist eine kanonische Leuchtkraft und E^* eine typische Photonenenergie (siehe Text). Links für die Schwarzschild-Lösung, rechts für Kerr-Lösung.

von 6 bis 7 keV durch Fluoreszenz einer Eisenlinie erklärt werden kann. Ebenso wurde in der Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 eine Eisen-Emissionslinie festgestellt. *Fabians* Methode war die direkte, numerische Integration der Nullgeodäten-Gleichung, zunächst nur in der Schwarzschild-Metrik, später auch in der Kerr-Metrik. Es wurden immer **Kepler-sche Scheiben** vorausgesetzt. In der numerischen Methode wurde eine isotrope Emission in Form einer Delta-Funktion verwendet. Das radiale Emissionslinienprofil wurde durch ein einfaches Potenz-Gesetz der Form r^p angenommen, mit dem Emissivitätsindex p als freien Parameter. Das Modell von Fabian läuft in der Literatur unter der Bezeichnung 'Disk-Line-Model' (1989) [18].

Benger et al., 1991: *Werner Benger* vom *Konrad-Zuse-Zentrum für Informationstechnik Berlin* arbeitet auf dem Fachgebiet *Ray-Tracing in der Kerr-Geometrie*. Er hat ebenfalls einen objektorientierten Ray-Tracer entwickelt, der auf der Methode der direkten Integration der Nullgeodäten-Gleichung basiert und Effekte der ART visualisiert. Das Projekt heißt *Light++* und ähnelt im Aufbau sehr dem Projekt *RAY++* des MPA in Garching. Auch werden wesentliche Komponenten, wie die *Welt* oder *Szenerie*, in der sich *Objekte* (wie zum Beispiel *Sphere*) befinden, sowie die Objekte selbst, in Klassen gekapselt. Ebenso gibt es die Klassen *Lights*, *Camera* als wichtigste Komponenten des Ray-Tracers und auch *Material*, was die Oberflächeneigenschaften der Objekte bestimmt (Texturen). *Bengers* Ray-Tracer wurde bereits in vielerlei Hinsicht eingesetzt. So wurden in der flachen Metrik terrestrische Landschaften, Berge, Wolken (basierend auf fraktaler Geometrie) gerendert, die verblüffende Ähnlichkeit mit der natürlichen Umgebung haben. Im astrophysikalischen Bereich wurde die lichtkrümmende Wirkung Schwarzer Löcher visualisiert, indem sie in bekannte Szenerien eingebettet werden, um die Verzerrungseffekte darzustellen. Der Code ist zum Teil öffentlich und kann über das Internet eingesehen werden.

Fanton et al., 1997: *Fanton, Cadez, Calvani* und *Marziani* (1997) [22] haben einen sehr 'schnellen' Code entwickelt, um die Nullgeodäten auf der Plattform eines PCs in einer moderaten Rechenzeit rechnen zu können. Bei der herkömmlichen Methode mit direkter Integration der Geodätengleichung war bisher die Rechnerleistung einer *Cray* nötig. Aufgrund der Wichtigkeit *Fantons* alternativen Methode und der Tatsache, dass ich sie in modifizierter Form ebenfalls verwendet habe, möchte ich die Methode im nächsten Kapitel detailliert darstellen.

4.3 Die analytische Integration der Geodätengleichung mittels Elliptischer Integrale

Ausgangspunkt ist die bereits aus der Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung hergeleitete Gleichung (78)

$$\int_{r_{em}}^{r_{obs}} \frac{dr}{\sqrt{R(r; \lambda, \mathcal{C})}} = \int_{\theta_{em}}^{\theta_{obs}} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta; \lambda, \mathcal{C})}}, \quad (133)$$

mit (vergleiche Gleichungen (67) für $m = 0$)

$$R(r; \lambda, \mathcal{C}) = r^4 + (a^2 - \lambda^2 - \mathcal{C})r^2 + 2[\mathcal{C} + (\lambda - a)^2]r - a^2\mathcal{C} \quad (134)$$

$$\Theta(\theta; \lambda, \mathcal{C}) = \mathcal{C} + (a \cos \theta)^2 - (\lambda \cot \theta)^2, \quad (135)$$

die eine radiale Seite, das r -Integral, und eine polare Seite, das Θ -Integral hat. Beide Seiten werden getrennt voneinander gelöst. Es sei wesentlich angemerkt, dass es sich bei $R(r; \lambda, \mathcal{C})$ und $\Theta(\theta; \lambda, \mathcal{C})$ um **Polynome vierten Grades** handelt.

Dank Achsensymmetrie muss die Φ -Gleichung nicht gelöst werden!

Zunächst wird beim Θ -Integral eine *Substitution*

$$\mu = \cos \theta \quad (136)$$

durchgeführt. Mit obiger Substitution wird aus $\Theta(\theta; \lambda, \mathcal{C})$:

$$\Theta_\mu = \mathcal{C} - (\lambda^2 + \mathcal{C} - a^2)\mu^2 - a^2\mu^4. \quad (137)$$

Es ist nun möglich eine Fallunterscheidung vorzunehmen, je nachdem, ob die Carter-Konstante $\mathcal{C}$ größer, kleiner oder gleich null ist. Dies ist leicht daran zu sehen, weil

$$\Theta_\mu = \mathcal{C}, \text{ wenn } \mu = 0 \text{ bzw. } \theta = \pi/2, \quad (138)$$

$$\Theta_\mu = -\lambda^2 \leq 0, \text{ wenn } \mu = 1 \text{ bzw. } \theta = 0. \quad (139)$$

Physikalisch bedeutet (siehe *Chandrasekhar, 1983* [8])

- $\mathcal{C} > 0$, dass die Trajektorien der Photonen die Äquatorebene bei $\theta = \pi/2$ schneiden und möglicherweise symmetrisch um diesen Schnittpunkt oszillieren werden,
- $\mathcal{C} < 0$, dass die Trajektorien der Photonen, die **nicht** die Scheibe treffen, zu Kegeln zusammengeschnürt werden,
- und $\mathcal{C} = 0$, dass die Trajektorien der Photonen in der Scheibenebene liegen oder in der Singularität enden (hier zusätzlich $\lambda \leq a$).

Für unsere Betrachtung ist also lediglich $\mathcal{C} > 0$ relevant. In diesem Fall kann man die Funktion Θ_μ faktorisieren in

$$\Theta_\mu = a^2(\mu_-^2 + \mu^2)(\mu_+^2 - \mu^2); \quad 0 \leq \mu^2 \leq \mu_+^2, \quad (140)$$

mit

$$\mu_{\pm}^2 = \frac{1}{2a^2} \{ \sqrt{(\lambda^2 + \mathcal{C} - a^2)^2 + 4a^2\mathcal{C}} \mp (\lambda^2 + \mathcal{C} - a^2) \}, \quad (141)$$

einer Größe, die nur von den Erhaltungsgrößen und dem Kerr-Parameter a abhängt.

Das polare Integral kann nun auf eine Standardform, den **Jacobischen elliptischen Integralen erster Art**, umgeschrieben werden (*Fanton et al., 1997* [22]):

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mu}{\sqrt{\Theta_{\mu}}} &= -\frac{1}{a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2}} F\left(\arccos\left(\frac{\mu}{\mu_+}\right), m_{\theta}\right) \\ &= -\frac{1}{a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2}} cn^{-1}\left(\frac{\mu}{\mu_+}, m_{\theta}\right), \end{aligned} \quad (142)$$

wobei

$$m_{\theta} = \frac{\mu_+^2}{\mu_+^2 + \mu_-^2}. \quad (143)$$

Beim r -Integral ist zunächst eine Diskussion der Nullstellen im Nenner nötig. Wie aus der Analysis einer Veränderlichen bekannt, existieren im allgemeinen vier komplexe Lösungen für dieses Polynom 4. Ordnung. Physikalisch sind die Nullstellen mit den radialen Umkehrpunkten der Geodäten assoziiert. Eine ebensolche Besprechung der Nullstellen von Θ für die azimuthalen Umkehrpunkte macht so eine Klassifizierung der Nullgeodäten möglich. Weil $R(r=0) = -a^2Q < 0$ und $R(r) > 0$, für $r \rightarrow \pm\infty$ existieren immer mindestens zwei, maximal jedoch vier reelle Nullstellen. Eine Fallunterscheidung führt auf drei Typen für das radiale Integral, wobei ich hier nur die beiden physikalisch interessanten Fälle diskutieren werde; der Fall mit *zwei gleichen reellen Wurzeln* führt nämlich auf 'instabile Bahnen' mit $r = \text{const}$; der Fall zweier reeller und zweier komplexer Wurzeln ist ebenfalls physikalisch uninteressant.

- Fall 1: vier reelle Wurzeln $r_1 > r_2 > r_3 > r_4$

Dies führt auf folgendes Integral, ausgedrückt in elliptischen Funktionen (*Fanton et al., 1997* [22])

$$\int_{r_1}^{r'} \frac{dr}{\sqrt{R}} = \frac{2}{\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_4)}} sn^{-1}\left(\sqrt{\frac{(r_2 - r_4)(r' - r_1)}{(r_1 - r_4)(r' - r_2)}}, m_4\right), \quad (144)$$

mit

$$m_4 = \frac{(r_2 - r_3)(r_1 - r_4)}{(r_2 - r_4)(r_1 - r_3)}. \quad (145)$$

- Fall 2: zwei verschiedene reelle, einfache Wurzeln (r_1 und $r_2 < r_1$) und eine doppelte Wurzel $r_3 = -\frac{1}{2}(r_1 + r_2)$

Dann wird das radiale Integral

$$\begin{aligned} \int \frac{dr}{(r_1 - r_3)\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}} &= -\frac{1}{\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}} \cdot \\ \ln \left[\frac{\sqrt{(r - r_1)(r - r_2)}}{r_3 - r} + \frac{r_3^2 + r_1r_2 + 2r_3r}{(r_3 - r)\sqrt{(r_1 - r_3)(r_2 - r_3)}} \right]. \end{aligned} \quad (146)$$

- Fall 3: zwei komplexe und zwei reelle Wurzeln (eine positiv, eine negativ)
Diese vier Wurzeln schreibt man in folgender Form

$$r_a = u - iw \quad (147)$$

$$r_b = u + iw \quad (148)$$

$$r_c = -u - v \quad (149)$$

$$r_d = -u + v. \quad (150)$$

In diesem Fall wird das zu lösende Integral zu

$$\int_{r'}^{\infty} \frac{dr}{\sqrt{Q_1 Q_2}} = \frac{1}{\omega \sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}} [sn^{-1}(\sqrt{1 - 1/\lambda_1}, m_2) - sn^{-1}(\sqrt{\frac{1 - 1/\lambda_1}{Q_1(r')}} B_1(r'), m_2)], \quad (151)$$

mit

$$Q_1(r) = r^2 - 2ur + u^2 + w^2 \quad (152)$$

$$Q_2(r) = r^2 + 2ur + u^2 - v^2 \quad (153)$$

$$m_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} \quad (154)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2w^2} (\pm \sqrt{(4u^2 + w^2 - v^2)^2 + 4v^2 w^2} + (4u^2 + w^2 - v^2)) \quad (155)$$

$$Q_2 - \lambda_i Q_1 = (1 - \lambda_i) B_i^2 \quad (156)$$

$$B_1(r) = r + u \frac{1 + \lambda_1}{1 - \lambda_1} \quad (157)$$

$$B_2(r) = r + u \frac{1 + \lambda_2}{1 - \lambda_2} \quad (158)$$

Nach dieser Fallunterscheidung löst man nun die Orbit-Gleichung (78) durch Einführung eines Orbit-Parameters P

$$\int_{r_{in}}^{r'} \frac{dr}{\sqrt{R(r; \lambda, \mathcal{C})}} = \int_{\theta_{in}}^{\theta'} \frac{d\theta}{\sqrt{\Theta(\theta; \lambda, \mathcal{C})}} = P. \quad (159)$$

θ kann man nun durch P ausdrücken, und zwar unter Berücksichtigung von Gleichung (142)

$$\cos \theta = \mu_+ cn(a\sqrt{\mu_+^2 + \mu_-^2} P \pm \Psi_0, m_\theta), \quad (160)$$

wobei '+' für Trajektorien gilt, die mit abfallenden θ starten und '-' für solche, wo es ansteigt. Die Hilfsgröße Ψ_0 ist wie folgt definiert

$$\Psi_0 = cn^{-1} \left(\frac{\cos \theta_{in}}{\mu_+}, m_\theta \right). \quad (161)$$

Auf ebensolche Weise kann man r durch die Größe P ausdrücken. Für die beiden oben diskutierten, relevanten Fälle findet man mit der Gleichung (144) (Fall 1 mit vier reellen Wurzeln):

$$r = \frac{r_1(r_2 - r_4) - r_2(r_1 - r_4)sn^2(\frac{1}{2}P\sqrt{(r_2 - r_4)(r_1 - r_3)} - \xi_0, m_4)}{r_2 - r_4 - (r_1 - r_4)sn^2(\frac{1}{2}P\sqrt{(r_2 - r_4)(r_1 - r_3)} - \xi_0, m_4)}, \quad (162)$$

mit der Hilfsgröße

$$\xi_0 = sn^{-1}\left(\sqrt{\frac{r_2 - r_4}{r_1 - r_4}}, m_4\right) \quad (163)$$

und mit der Gleichung (146) für Fall 2 (zwei reelle Wurzeln)

$$r = u \frac{\frac{w}{2u}(1 + \lambda_2)(\lambda_1 - 1)\sqrt{\lambda_1}S + (\lambda_1 + 1)\sqrt{\lambda_1 c^2 - \lambda_2}}{(\lambda_1 - 1)\sqrt{\lambda_1 c^2 - \lambda_2} - 2\frac{u}{w}\sqrt{\lambda_1}S}, \quad (164)$$

mit den Hilfsgrößen

$$S = sn(\Omega_r P - \Pi_0, m_2) \quad (165)$$

$$c = cn(\Omega_r P - \Pi_0, m_2) \quad (166)$$

$$\Pi_0 = sn^{-1}(\sqrt{1 - 1/\lambda_1}, m_2) \quad (167)$$

$$\Omega_r = \omega\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2}. \quad (168)$$

Der Vorteil der Verwendung von den Gleichungspaaren (160) und (162), bzw. (160) und (164), die den Orbit in geschlossener Form nur ausgedrückt durch den Parameter P angeben, liegt darin, dass nicht die *inversen* Jacobischen elliptischen Funktionen, sondern direkt $sn(u, m)$ und $cn(u, m)$ verwendet werden können.

Die weitere Verfahrensweise nach *Fanton et al. (1997)* [22] besteht darin, für jedes Pixel der fotografischen Platte den Orbit-Parameter P_{em} korrespondierend zu $\theta = \pi/2$ zu berechnen (siehe Gleichung (160)). Danach wird der Emissionsradius r_{em} nach Gleichung (162) oder (164) kalkuliert, je nachdem, wieviel reelle Nullstellen von $R(r)$ vorliegen.

Mit dem radialen Emissivitätsgesetz ϵ als einfaches Potenz-Gesetz

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} r^{-\alpha_s}, \quad (169)$$

als doppeltes Potenz-Gesetz

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} r^{\alpha_d}, \quad r < r_{break} \quad (170)$$

$$\epsilon(r) = \frac{\epsilon_0}{4\pi} r^{-\beta_d}, \quad r \geq r_{break} \quad (171)$$

oder als flussartiges Potenz-Gesetz, (die Emissivitätsindizes $\alpha_s, \alpha_d, \beta_d$ sind vom Anwender festzulegen), dem verallgemeinerten Rotverschiebungsfaktor g

$$g = \frac{\alpha}{\gamma} \left[(1 - \omega\lambda) - \alpha v^{(r)} \frac{\sqrt{R}}{\rho\sqrt{\Delta}} - \alpha v^{(\theta)} \frac{\sqrt{\Theta}}{\rho} - \alpha v^{(\Phi)} \frac{\lambda}{\tilde{\omega}} \right]^{-1} \quad (172)$$

und den ebenfalls vom Anwender zu spezifizierenden Geschwindigkeitsfeldern $v^{(r)}, v^{(\theta)}, v^{(\Phi)}$, wie ich sie in Kapitel 3.4.3 vorgestellt habe, kann nun ohne weiteres das Fluss-Integral

$$F_{obs}(E_{obs}) = \int_{Bild} \epsilon(r) g^4 \delta(E_{obs} - g E_0) d\Xi \quad (173)$$

(E_0 : Ruheenergie der Eisen-Emissionslinie von 6.4 keV)

evaluiert werden, so dass direkt das Profil der Emissionslinie darstellbar ist.

Ich habe den (prozeduralen) C-Code von *Fanton et al. (1997)* [22] implementiert, modifiziert und generalisiert. Die Modifikationen betreffen seitens der Programmieretechnik die Umwandlung auf C++-Klassen und seitens der Physik vor allem die Verallgemeinerung des Geschwindigkeitsfeldes, sowie dessen freie Wahl durch den Anwender.

4.4 Der objektorientierte Kerr Ray-Tracer

Die Software ist ein *objektorientierter ART Ray-Tracer*, programmiert in der Sprache C++ mit Hilfe der Klassenbibliothek *Microsoft Foundation Classes (MFC)*. Als Entwicklungsumgebung für C++ verwendete ich das *Microsoft Developer Studio 6.0*. Die wesentlichen numerischen Teile des Codes bzw. der Algorithmus selbst ist plattform-unabhängig programmiert, so dass ein Transfer in die LINUX-Welt kein Problem darstellen wird. Lediglich die Komponenten, die die grafische Benutzeroberfläche (*graphical user interface, GUI*) betreffen, sind spezifisch für das jeweilige Betriebssystem.

Eine objektorientierte Sprache bietet sich an, da durch die *Klassen* die einzelnen Komponenten des Programms gut gekapselt werden können. Sehr mächtig ist auch das *Prinzip der Vererbung* von Klassen. Dies hat den Vorteil, dass

- die Wechselwirkung der Klassen untereinander effizient und gezielt mit den Attributen *public*, *protected* und *private* gesteuert werden kann,
- die Wiederverwendbarkeit der Klassen gewährleistet wird,
- die Lesbarkeit des Codes erhöht wird,
- und Redundanzen vermieden werden.

Der Ray-Tracer löst die Strahlenpropagation im gekrümmten Raum, nämlich in der Schwarzschild- oder Kerr-Metrik. Dies ist das herausragende Merkmal verglichen mit herkömmlichen und kommerziellen Ray-Tracern. Motiviert ist dieser Sachverhalt selbstverständlich durch die Anwesenheit des Schwarzen Loches im Emissionsgebiet. Dies erfordert also die vollständige Implementation der Einsteinschen Gleichungen. Newtonsche Rechnungen sind falsch!

Ich möchte in den nächsten Abschnitten die wesentlichen Komponenten des Codes diskutieren und die Klassenstruktur kurz darstellen, um ein numerisches Verständnis des Konzepts zu erarbeiten.

4.4.1 Die Kerr-Welt

Die Kerr-Welt *CKerrWorld* ist die wesentliche Klasse des objektorientierten Ray-Tracers, da hier alle fundamentalen Eigenschaften der Kerr-Metrik verankert sind. Ebenso sind Routinen, die für die Kalkulation der Nullgeodäten wichtig sind, aber auch die zentrale *Render-Funktion* hier implementiert.

```
class CKerrWorld : public CObject
{
public:
// Render-Funktion
aKerrDataArray *Render(const double rCamera, const double thCamera, const double a, const double rin, const double rout, const double rstep);
// Set-Funktionen
void SetR_out(const double rout);
.....
// Get-Funktionen
double GetInclination() const {return theta;}
.....
private:
double thobs;
double r_H;
double r_ph;
.....
// metrische Funktionen
double delta(const double r);
.....
// Photonenimpulse
p_phot Get_phot_momentum(const double r, const double th, const double lambda, const double q);
.....
// Geschwindigkeitsfelder
velocity Get_velocity(const double r, const double th);
.....
// Sortierungsroutinen
int root_4(double a, double qqph, double lph, double *u1, double *u2);
};
```

Die wesentlichen Routinen von *CKerrWorld* möchte ich nachfolgend detailliert darstellen.

Sortierungsroutinen Im C-Code von *Fanton et al. (1997)* wurde die Sortierung der Wurzeln, die den Nullstellen der Gleichung $R(r) = 0$ entsprechen, durch verschiedene Routinen durchgeführt, die ich im folgenden vorstellen möchte.

int CKerrWorld::root_4() Die Routine *CKerrWorld::root_4()* hat als Argumente den Kerr-Parameter a , die Erhaltungsgrößen $\mathcal{C}$ und λ sowie zwei Zeiger auf einen *double *u1* und **u2*. Den Kerr-Parameter legt der Anwender zur Laufzeit fest, λ und $\mathcal{C}$ sind in der Header-Datei definiert. Der Algorithmus in der Routine ist im Prinzip ein *Polynom-Solver*, der die Anzahl der reellen Wurzeln *nu_re* bestimmt, die gerade die reellen Nullstellen der Gleichung $R(r; \lambda, \mathcal{C}) = 0$ sind. Diesen Wert wird schließlich als *integer* zurückgegeben. Wie schon beschrieben, gibt *nu_re*

gerade die Anzahl der radialen Umkehrpunkte entlang der Geodäten an. Die Render-Routine greift diesen Rückgabewert wieder auf.

```
int CKerrWorld::root_4(double a, double qqph,
double lph, double *u1, double *u2)
{
.....
Polynom-Solver....
.....
return nu_re
}
```

4.4.2 Rendering Verfahren

Als *Rendering* bezeichnet man Ablauf, Kalkulation und Organisation der Strahlenpropagation. Man 'schießt' nacheinander einige Millionen Strahlen von einem Bildschirm auf das virtuelle Schwarz-Loch-Scheiben-System. Üblich ist im herkömmlichen Verfahren, den Bildschirm kartesisch zu pixeln, so dass jedem Pixel mit Position (x, y) auf dem Beobachterbildschirm ein Emissionsort (r, θ, Φ) auf der Scheibe zugeordnet ist. Das Bild würde in diesem Fall *zeilenweise gerendert* werden. *Fanton et al. (1997)* [22] haben ein trickreiches neues Verfahren erdacht, bei dem nicht kartesisch, sondern **elliptisch** 'gescannt' wird. Die beiden Freiheitsgrade auf der Empfangsfläche sind also nicht x und y , sondern $\tilde{r}$ und φ . Das Scannen würde durch eine Schrittweite in beiden Freiheitsgraden vorgegeben: r_{step} und φ_{step} . *Fanton et al. (1997)* haben jedoch eine Abhängigkeit $\varphi_{step}(r_{step})$ eingebaut, um eine **homogene Abdeckung der Detektionsfläche** zu gewährleisten. So wird das entstehende *elliptische Gitter* radial nach außen verfeinert, damit die Pixelgröße nicht von innen nach außen variiert. Konkret ist es so, dass mit zunehmendem r_{step} die Schrittweite des Winkels kleiner wird. Die Wahl, das elliptische Scannen dem kartesischen vorzuziehen, erklärt sich durch eine *bessere Linienqualität* und Auflösung, weil die Scheibe in erster Ordnung auf eine Ellipse abgebildet wird.

Vor dem Rendern sind gewisse Anfangsparameter festzulegen. Dazu gehören der Kerr-Parameter a , der Scheibeninnenradius r_{in} , der Scheibenaußenradius r_{out} und eine die Auflösung bzw. 'Pixelung' des Scheibenbildes bestimmende Größe r_{step} . Abstand und Orientierung des Beobachters zum Schwarzes Loch-Scheiben-System legen $rCamera$ und $thCamera$ fest, ersteres ist festgelegt auf $5000 r_g$, letzteres entspricht der Inklination. Das Abscannen der elliptischen Fläche geschieht nun über zwei for-Schleifen: die äußere durchläuft die radiale Richtung, die innere die ϕ -Richtung. Die Laufvariable r_{step} bestimmt die Schrittweite, um die die for-Schleifen weitergehen. Über die beiden for-Schleifen wird nun **für jedes Pixel** eine Reihe von Werten berechnet, wie die Erhaltungsgrößen λ und $\mathcal{C}$, die Geschwindigkeitskomponente v , der Photonen-Impuls p und die wesentlichen Elemente des Datenpaketes *CKerrData*, wie die Koordinaten x , y , r und ϕ auf der Scheibe, der Rotverschiebungsfaktor g , die Temperatur T und das Raumwinkelement $d\Omega$. Der Rückgabewert der Renderfunktion ist schließlich ein Zeiger auf ein *Array*, das diese Daten kapselt. Im Detail sieht das folgendermaßen aus:

```
aKerrDataArray CKerrWorld::Render(const double rCamera, const double thCame-
ra, const double a, const double rin, const double rout, const double rstep)
{
// wesentliche Radien
double rms = .....;
double rph = .....;
//wechsel von Grad nach Bogenmaß
```

```

thobs = thCamera/180.0*M_PI;
.....
// äußere for-Schleife
for(rem=rint; rem<=((rout+2.0)/cos(thobs)); rem+=r_step)
{
// innere for-Schleife
for (phi=1.0e-4; phi<=2.0*M_PI+1.0e-4; phi+=phistep)
{
// Abstand des Beobachters
r=robs=5000;
// Pixel
x=ro(rem, phi, th)*cos(phi);
y=ro(rem, phi, th)*sin(phi);
.....
// Bewegungskonstanten
lph=.....
qqph=.....
.....
// falls vier reelle Nullstellen
if (nu_re==4)
{
.....
}
// oder weniger als vier reelle Nullstellen
else
.....
// Sicherheitsabfrage an den Radius
if(r>=rin && r<=rout)
{
velocity v;
p_phot p;
// Einstein Faktor
double Gamma;
// verallgemeinerter Rotverschiebungsfaktor
double D;
v = Get_velocity(r,th);
p = Get_phot_momentum(r,th,lph,qqph);

// hier steckt die Kinematik!
Gamma = 1.0/sqrt(1.0-v.r*v.r-v.theta*v.theta-v.phi*v.phi);
D = 1.0 - omega(r,th)*lph
- alpha(r,th)*v.r*p.r
- alpha(r,th)*v.theta*p.theta
- omega_tild(r,th)*(Omega(r,th) - omega(r,th))*p.phi;
// Rotverschiebungsformel
D = alpha(r,th)/(Gamma*D);

} // Ende Sicherheitsabfrage
} // Ende innere Schleife

```



```

} // Ende äußere Schleife

// Rückgabe des Zeigers auf KerrData-Objekt
return p_KerrData;

} // Ende der Routine

```

4.4.3 Datenkapselung

Die Datenkapselung regeln die Klassen *CKerrData* und *CKerrDataHeader*. Der Header enthält die wesentlichen Parameter der Kerr-Welt. Die Klasse *CKerrData* bündelt das Daten-Tupel, bestehend aus

- x Pixelwert
- y Pixelwert
- Radius r (Auftreffpunkt auf der Scheibe)
- Winkel Φ (Auftreffpunkt auf der Scheibe)
- Rotverschiebungsfaktor g (im Auftreffpunkt auf der Scheibe)
- Temperatur T (im Auftreffpunkt auf der Scheibe)
- Determinante des Raumwinkels Ω .

Jedem Pixel des entstehenden Scheibenbildes sind also die sieben Werte zugeordnet. Diese Information äußert sich schließlich in einer Datengröße für Bitmaps (bmp) der Windows-Welt von einigen Megabytes. Sobald das Programm gestartet wird und die Eingabeparameter festgelegt wurden, wird die Render-Routine durchlaufen und für jeden einzelnen Strahl dieses Werte-Tupel im Arbeitsspeicher allokiert (Schlüsselwort *new*). Die Klasse *CKerrData* sind im Code folgendermaßen aus:

```

class CKerrData : public CObject
{
public:
//Konstruktor und Initialisierung
CKerrData() : x(0.0f), y(0.0f), radius(0.0f), phi(0.0f), Temperature(100.0f),
Redshift(0.0f), SolidAngle(0.0) {}

CKerrData(const float xS, const float yS, const float rDisk, const float phiDisk, const
float tDisk, const float rshiftDisk, const float omegaDisk) : x(xS), y(yS), radius(rDisk),
phi(phiDisk), Temperature(tDisk),
Redshift(rshiftDisk), SolidAngle(omegaDisk) {}

//Kopier-Konstruktor
CKerrData(const CKerrData& p_Data);

// Dummy Destruktor
virtual CKerrData();

//Überladung des -=Operators, um Kerrdaten-Array zu kopieren
CKerrData& operator = (const CKerrData& p_Data);

```

```

// Set-Funktionen
void SetScreen_x(const float xS) { x = xS; }
void SetScreen_y(const float yS) { y = yS; }
void SetRadius(const float rDisk) { radius = rDisk; }
void SetPhi(const float phiDisk) { phi = phiDisk; }
void SetRedshift(const float rshiftDisk) { Redshift = rshiftDisk; }
void SetTemperature(const float tDisk) { Temperature = tDisk; }
void SetSolidAngle(const float detJ) { SolidAngle = detJ; }

// Get-Funktionen
float GetScreen_x() const { return x; }
float GetScreen_y() const { return y; }
float GetRadius() const { return radius; }
float GetPhi() const { return phi; }
float GetRedshift() const { return Redshift; }
float GetTemperature() const { return Temperature; }
float GetSolidAngle() const { return SolidAngle; }

// Serialisierungsroutine
virtual void Serialize( CArchive& ar );

// Überladung des Ausgabe-Operators <<
// und Deklaration als 'Freund der Klasse'
friend ostream& operator << (ostream& s, CKerrData& data);

//Daten privat deklarieren, um Zugriffe zu unterbinden
private:
// Screen Koordinaten
float x;
float y;
// Scheiben Koordinaten und Attribute
float radius;
float phi;
float Redshift;
float Temperature;
float SolidAngle;
};

```

Die wesentlichen physikalischen Größen sind *floats* und *privat* deklariert, das heißt, dass nur die Klasse selbst Zugriff auf diese Werte hat. Die Set- und Get-Funktionen regeln den Zugriff auf die Größen, um sie zu ändern oder nur auszulesen. Die Verwaltung der Daten wird in der *Dokument-Klasse* des Projektes durchgeführt, in der Klasse *CKerrRayppDoc*. Hier erfolgt die Steuerung der Daten-Reihen, indem sie in ein *Datenarray* (Basisklasse *CArray*) geschrieben werden, die aus dem Arbeitsspeicher wieder abgerufen werden können. Die Darstellungsroutinen von *CKerrRayppView* übernehmen später die Umwandlung der Werte *Rotverschiebungsfaktor* und *Temperatur* in einen RGB-Wert (R, G, B), der dann visualisiert wird. Darauf werde ich im übernächsten Abschnitt 4.4.5 eingehen.

Zum anderen greifen die Linienberechnungsroutinen der Klasse *CLineProfile* auf diese Daten im

Speicher zu, um die Emissionslinie zu berechnen.

4.4.4 Linienkalkulation

Die emittierende Scheibe, farbkodiert durch die Rotverschiebung, wie sie aus dem Rendering hervorgeht, soll nun eine spektrale Linie werden, also eine Information Fluss bzw. Intensität über Energie bzw. Rotverschiebungsfaktor. Die Klassen *CLineProfile* und *CChartView* übernehmen genau diese Funktion.

```
class CLineProfile : public CKerrWorld
{
public:

//Standard-Konstruktor CLineProfile();
// Destruktor
virtual ~CLineProfile();

// Emissivitätsindizes
double Sing_Alpha;
double Alpha;
double Beta;
// Radius, bei dem das Emissivitätsgesetz springt
double Rbreak;
// spektrale Auflösung
double Res_Step;

// Boolesche Variablen, die Emissivitätsgesetz festlegen
BOOL IsSinglePower;
BOOL IsDoublePower;
BOOL IsFluxlike;

// Deklaration der Kalkulationsroutinen
// einfaches Potenz-Gesetz
double em_sing_law(const double r, const double Sing_Alpha);
// doppeltes Potenz-Gesetz
double em_doub_law(const double r, const double Rbreak,
const double Alpha, const double Beta);
// fluss-angepasstes Gesetz
double em_flux_law(const double r, const double a);

// Hilfsroutinen
double norm_sing_law(const double Sing_Alpha);
double norm_doub_law(const double Rbreak, const double Alpha, const double Beta);
double norm_flux();
};
```

In Bezug auf die Kalkulationsroutinen für die Emissivitätsgesetze übernehme ich abermals die Berechnungsroutinen von *Fanton et al. (1997)* [22]. An dieser Stelle geht nun auch das Emissivitätsgesetz ein, mit dem der spektrale Fluss (117) gewichtet ist. Die Berechnung erfolgt wiederum

in der Dokumentenklasse, genauer gesagt in der Routine *CKerrRayppDoc::CalculateLine()*.

```
Flux_Histo CKerrRayppDoc::CalculateLine(const double res_step)
{
// Deklarationen
// spektrale Auflösung des Spektrums
double Gstep(res_step);
double r, g, J, f;
double rint = max(m_KerrWorld.r_in - 2.0, 0.2);

long index;

int Ng = (int) (2.0/Gstep)+1;
int i_histo(0);

// Zeiger auf struct Flux_Histo
Flux_Histo *hflux;
// Zeiger auf double: Array der Fluss-Werte
double *flux1;

flux1 = new double[p_KerrDataArray->GetSize()];

hflux = new Flux_Histo[Ng];
// Initialisierung der Daten mit Null
for (int j =0; j<Ng; j++)
{
hflux[j].g = (double) (j*Gstep);
hflux[j].Fval = 0.0;
hflux[j].Area = 0.0;
}

// Bestimmung des spektralen Flusses
for (index=0; index<p_KerrDataArray->GetSize(); index++)
{
r = (double) p_KerrDataArray->GetAt(index).GetRadius();
g = (double) p_KerrDataArray->GetAt(index).GetRedshift();
J = (double) p_KerrDataArray->GetAt(index).GetSolidAngle();

// Unterscheidung nach gewähltem Emissivitätsgesetz
if(m_LineProfile.IsSinglePower)
{
flux1[index]=pow(g,4)/Gstep*J*
m_LineProfile.norm_sing_law(m_LineProfile.Sing_Alpha)*
m_LineProfile.em_sing_law(r, m_LineProfile.Sing_Alpha);
}

else if(m_LineProfile.IsDoublePower)
{
flux1[index]=pow(g,4)/Gstep*J*
```

```

m_LineProfile.norm_doub_law(m_LineProfile.Rbreak,
m_LineProfile.Alpha,m_LineProfile.Beta)*
m_LineProfile.em_doub_law(r,m_LineProfile.Rbreak,
m_LineProfile.Alpha,m_LineProfile.Beta);
}

else
{
flux1[index]=pow(g,4)/Gstep*J*m_LineProfile.norm_flux()*
m_LineProfile.em_flux_law(r,m_KerrWorld.a);
}
} // Ende der for-Schleife

// Schleife, um das Histogramm zu konstruieren
for (index=0; index<p_KerrDataArray->GetSize(); index++)
{
r = (double) p_KerrDataArray->GetAt(index).GetRadius();
g = (double) p_KerrDataArray->GetAt(index).GetRedshift();
f = (double) flux1[index];

// Sicherheitsabfrage, die relevanten Bereich von g und r prüft.
if(g<=2.0 && g>=0.0 && r>=rint && r<=m_KerrWorld.r_out)
{
// quantisiert den Rotverschiebungsfaktor g:
// g: [0.0, 2.0] -> i_histo: [0, 200]
i_histo = (int) (g/Gstep);
// Fval (Ordinate)
hflux[i_histo].g = g;
hflux[i_histo].Fval+=f;
++hflux[i_histo].Count;
hflux[i_histo].Area+=J;
}
} // Ende der for-Schleife

delete [ ] flux1;

// boolsche Variable auf 'WAHR' setzen
LineIsCalc = TRUE;

// Rückgabewert ist ein Zeiger auf ein struct
return hflux;

} // Ende der Routine

```

Der Rückgabewert ist demnach ein neues Datenarray, diesmal bestehend aus den Fluss-Daten, wie dem Rotverschiebungsfaktor g , dem spektralen Fluss $Fval$, einer Zählvariable $Count$, die sämtliche Datenpunkte der Linie durchzählt und der Fläche $Area$, insgesamt also dem Tupel $(g, Fval, Count, Area)$, die mit Hilfe des *structs* *Flux_Histo* gekapselt werden,

```

struct Flux_Histo
{
double g;
double Fval;
double Count;
double Area;
};

```

Mit einer *for-Schleife* werden hier die Daten (im wesentlichen der Roverschiebungsfaktor g) des Render-Arrays durchlaufen, mit dem Emissivitätsgesetz verknüpft und zu einen Fluss-Wert $Fval$ aufsummiert. Die **Diskretisierung des Fluss-Integrals** sieht also so aus:

$$\begin{aligned}
F_{\nu}^{obs} &= \int_{image} d\Omega g^3 \hat{I}_{\nu}^{em}(r^{em}, \theta^{em}, \vec{n}) \\
&= \sum_{pix} \Delta\Omega_{pix} g_{pix}^3 \hat{I}_{\nu}^{em}(pix, \vec{n}),
\end{aligned} \tag{174}$$

mit $\vec{n}$ als Vektor, der die Orientierung der Scheibe relativ zum Beobachter (Inklination) festlegt. Für weitere Details verweise ich auf den Code.

4.4.5 Visualisierung der Rotverschiebung und der Temperatur

Die eigentliche Visualisierung der Daten geschieht nach der MFC-Philosophie in den *View-Klassen* des Projekts. Die Klasse *CKerrRayppView* wandelt nun die Fließkomma-Werte *Rotverschiebungsfaktor* und *Temperatur* in RGB-Werte um (RGB steht für *RotGrünBlau* und ist letztlich ein Tripel (R, G, B) von Zahlen, deren Wertebereich hier 0 bis 255 ist, weil die hier verwendeten *True Colors* aus 256^3 Farben bestehen). *CKerrRayppView* löst nun ein Standardproblem der Visualisierung, nämlich wie man einen homogenen Verlauf der Farben von rot über weiß nach blau in Abhängigkeit vom Rotverschiebungsfaktor g , der den Wertebereich von 0 (rotverschoben) bis 2 (blauverschoben) abdeckt, erhält. Die Funktion *CKerrRayppView::OnDraw()* bewerkstelligt diese Prozedur.

```

void CKerrRayppView::OnDraw(CDC* pDC)
{
// index zählt sämtliche Pixel des Scheibenbildes
long index;
// Screen-Koordinaten
int sx, sy;
// Rotverschiebungsfaktor
float g;

// Daten aus der Dokumenten-Klasse in die View-Klasse holen
CKerrRayppDoc* pDoc = GetDocument();
// Gültigkeitsprüfung von dem Dokument pDoc
ASSERT_VALID(pDoc);

// Rahmen des Bildes
CRect m_Draw;
GetClientRect(&m_Draw);

// Sicherheitsabfrage nach Rendern
if (pDoc->sRendered)
{

```

```

// for-Schleife über alle Pixel
for (index=0; index<pDoc->p_KerrDataArray->GetSize(); index++)
{
// Extraktion der Koordinaten aus dem Array, dessen Zeiger die Render-Funktion
zurückgibt
sx=(int)(10.0*pDoc->p_KerrDataArray->GetAt(index).GetScreen_x());
sx += m_Draw.Width()/2;
sy=(int)(10.0*pDoc->p_KerrDataArray->GetAt(index).GetScreen_y());
sy=m_Draw.Height()/2-sy;
// Extraktion der Rotverschiebung
g=pDoc->p_KerrDataArray->GetAt(index).GetRedshift();

// Fallunterscheidung nach verschiedenen Domänen von g
// Rotverschiebung
if(g < 1.0f)
{
// rote Farbe
pDC->SetPixel(sx, sy, RGB((BYTE)(255*g), (BYTE)255*g*g*g*g*g*g,
(BYTE)255*g*g*g*g*g*g));
}

// Blauverschiebung
else if(g > 1.0f)
{
// blaue Farbe
pDC->SetPixel(sx, sy, RGB((BYTE)(255/(g*g*g*g*g*g)),
(BYTE)(255/(g*g*g*g*g*g)), (BYTE)(255*(2.0 - g*g))));
}

// falls  $g \equiv 1$  else
{ //weiße Farbe
pDC->SetPixel(sx, sy, RGB(255, 255, 255));
}
} Ende for-Schleife
} Ende Sicherheitsabfrage nach Rendern

// falls nicht gerendert wurde else
{
m_pDib->Draw(pDC, m_Draw.TopLeft(), m_Draw.Size());
}
}

```

Ähnliches gilt für die Darstellung des Temperaturverlaufs in der Scheibe, den ich in einer separaten View-Klasse *CTempView* geregelt habe. Der wesentliche Unterschied zu *CKerrRayppView* ist, dass die Temperatur einem T^4 -Gesetz folgt, gemäß

$$\text{Temperature} = 1.0\text{E}+5 * D * \text{pow}(\text{flux}(r, a) / F_{\text{max}}, 0.25);$$

und dann dieser numerische Wert in einen RGB-Wert umgewandelt wird. Hier bedeutet rot 'kalt' und blau 'heiß', in Anlehnung an die Energie-Farb-Korrelation des elektromagnetische Spektrums. Die Visualisierung der Fe- K_{α} -Emissionslinien regeln die Klassen *CChartView*, sowie *HMXChart*

und *HMXDataSet*. Hier werden mindestens 100 *g*-Werte auf der Abszisse durchlaufen, je nachdem welche spektrale Auflösung *res_{step}* der Anwender gewählt hat und zugehörige Fluss-Werte auf der Ordinate abgetragen. Ich habe einen *sequentiellen Renderer* implementiert, der es dem Anwender ermöglicht, statt einer, *mehrere Linien (drei oder fünf) im gleichen Diagramm* darzustellen. Dies hat den Vorteil bei der Interpretation direkt ein Gespür dafür zu bekommen, was die Variation *nur eines* Parameters am Linienprofil ändert. Die Routine *void CChartView::DisplayLine()* greift auf die Werte im *struct* der Fluss-Daten zu und stellt sie als Chart dar.

Damit sind die wesentlichen Elemente der Anwendung von der Render-Funktion bis zur Darstellung als Linien-Chart besprochen. Als abschließende Übersicht möchte ich das Schema 19 vorlegen. Es zeigt die wesentlichen Züge des Projektes *KerrRaypp*:

1. In den Dialogen *Setup*, *LineProfileDlg* und *VelocityDlg* legt der Anwender die Eingabeparameter fest.
2. Die Verwaltungsroutinen (Applikation) steuern die Wechselwirkung von Dialogen, Fenstern und den gesamtem Programmablauf.
3. In den wesentlichen *Kerr*-Klassen werden die Render-Daten berechnet und verwaltet.
4. Die Linien-Klassen berechnen aus den Render-Daten ein Linienprofil und allokatieren die Daten im Speicher.
5. In den Klassen für die Bildumwandlung werden *Geräte-unabhängige Bitmaps (DIBs)* und *Bitmaps (BMPs)* erzeugt, in die die zu visualisierenden Daten eingebettet werden können.
6. Schließlich werden die Daten in RGB-Werte konvertiert und können in Splitter-Fenstern als Scheibenbilder angezeigt werden. Dabei werden Rotverschiebung und Temperatur farbkodiert dargestellt. Die Linien-Daten werden in einem Chart dargestellt und liefern Informationen, die direkt mit Beobachtungsdaten verglichen werden können.

In den folgenden Kapiteln möchte ich auf die Parameter eingehen, die der Anwender steuern kann und danach die Parameter besprechen, die besonders für die Anpassung an Daten relevant sind.

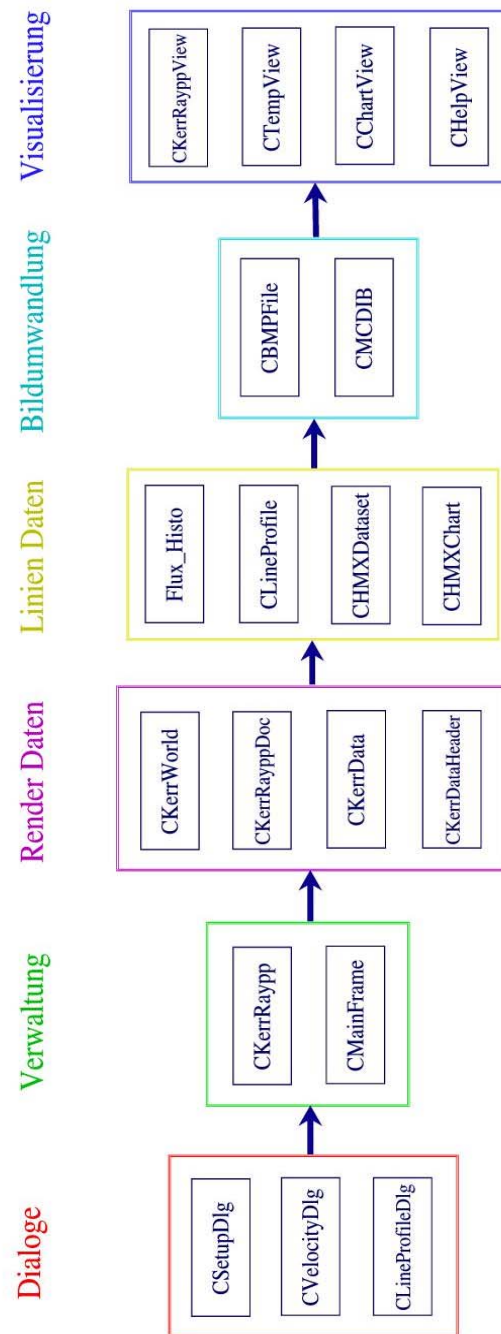


Abbildung 19: Die Klassenhierarchie des Projektes *KerrRaypp* (A. Müller, 2000)

4.5 Einstellparameter

Der Anwender des *objektorientierten Kerr Ray-Tracers* kann folgende Parameter vorgeben:

- Schwarzes Loch
 - ⇒ Drehimpulsparameter a
 - Dieser Parameter entscheidet über die Schwarzschild- oder die Kerr-Lösung
- Scheibe
 - ⇒ Inklination i (Aufsichtswinkel)
 - Die Orientierung des Beobachters relativ zur Scheibe.
 - ⇒ Scheibeninnenrand r_{in}
 - ⇒ Scheibenaußenrand r_{out}
 - ⇒ Schrittweitenparameter r_{step}
 - Diese Kalkulationsgröße entscheidet über die Auflösung (die 'Pixelung') des Bildes.
- Geschwindigkeitsfeld
 - ⇒ Standardscheibe
 - Die Standardscheibe berücksichtigt nur Keplersche Rotation, aber nimmt einen konstanten spezifischen Drehimpuls innerhalb der marginal stabilen Bahn mit. v^r und v^θ sind jedoch Null.
 - ⇒ Akkretionsscheibe
 - Dieses Scheibenmodell nimmt eine radiale Drift mit, indem ich für v^r ein Freifallgesetz angenommen habe.
 - ⇒ Jets und Winde
 - Die poloidale Komponente wird ungleich Null.
 - Zusätzlich zu ist nun v^θ ungleich Null.
 - v^r und v^θ korrelieren mit einer variabel wählbaren Stärke mit v^Φ .
- Emissionslinien
 - ⇒ radiales Emissivitätsgesetz
 - Es kann zwischen einfachem (α_s) oder doppelten ($\alpha_d, \beta_d, r_{break}$) Emissivitätsgesetz gewählt werden. Die Höhe der Indizes ist einstellbar, ebenso im zweiten Fall der Radius, wo das Gesetz springt.
 - ⇒ spektrale Auflösung res_{step}
 - Diese Größe entscheidet über die 'Feinheit' des Spektrums: kleine Werte lassen starke (numerisch bedingte) Fluktuationen erkennbar werden.

Der *Parameterzoo* umfasst somit mindestens 7 und höchstens 13 Werte. Die wirklich physikalischen Parameter sind weniger.

4.6 Wesentliche freie Parameter

Diese Parameter umfassen sämtliche Werte, die man einem *Datenfit* entnehmen könnte. Durch die Hinzunahme weiterer Geschwindigkeitskomponenten habe ich diesen Zahl im Vergleich zu vorhergehenden Modellen erhöht. Eine Diskussion zeigt, dass im Prinzip nur wenige der Einstellparameter freie Parameter sind. So kann man den Scheibenaußenradius r_{out} sicherlich wegdiskutieren, wenn man zur Kenntnis nimmt, dass das Emissivitätsgesetz nach außen hin stark abfällt: eine Variation dieses Radius verändert kaum die Linienprofile. Tests zeigen, dass ab Überschreiten eines gewissen kritischen Radius, der bei etwa 30 bis 50 r_g anzusetzen ist und der als Untergrenze angesehen werden muss, lediglich eine Glättung des Linienprofils durch weitere Erhöhung von r_{out} erreicht werden kann. Dies erklärt sich offensichtlich dadurch, dass eine Erhöhung des Scheibenaußenradius direkt das Integrationsgebiet des Fluss-Integrals, nämlich das Bild der Scheibe, vergrößert: in das diskretisierte Integral gehen mehr Terme ein, deren Gewichtung jedoch mit zunehmenden r_{out} abnimmt.

r_{step} und res_{step} sind *Hilfsparameter*, die nicht die Physik bestimmen, sondern nur die Güte der Simulation. Je kleiner r_{step} gewählt wird, um so feiner ist die Pixelung des Scheibenbildes. Der Arbeitsspeicher des Rechners limitiert direkt einen unteren Grenzwert für diese Größe. Der Anwender muss immer einen Kompromiss eingehen, zwischen Größe der Scheibe und deren Auflösung. res_{step} bestimmt die spektrale Auflösung der Linie. Je kleiner dieser Wert gewählt wird, um so feiner wird die Energie-Skala geteilt und um so mehr Struktur ist in der Linie erkennbar. Allerdings gewinnt ab einem gewissen, unteren Wert die numerisch bedingte Fluktuation der Linienform, ohne dass hier physikalische Effekte eine Rolle spielen.

Es bleibt also insgesamt das minimale Tupel an **physikalischen Fitparametern** (a, i, r_{in}, α_s) oder das maximale Tupel $(a, i, r_{in}, p_1, p_2, q_1, q_2, \alpha_d, \beta_d, r_{break})$. In dem nächsten Kapitel 5 werde ich Serien verschiedener Tupel zusammenstellen und diskutieren, welche Einflüsse jeder einzelne Parameter auf das Linienprofil hat. Außerdem möchte ich Interpretationsmöglichkeiten offenlegen, die einen Zugang zur Physik der Schwarzes Loch-Scheiben-Systeme eröffnen.

Es sei kritisch angemerkt, dass solche Fits an Beobachtungsdaten mit äußerster Vorsicht zu genießen sind. Einerseits ist schon lange bekannt, dass Seyfert-Galaxien variable Quellen sind, und daher auch das Linienprofil zeitlichen Fluktuationen unterlegen ist. Solche Unwägbarkeiten sind durch häufige Beobachtungen und dementsprechend häufigen Fits zu begegnen, die eine sichere Basis für stichhaltige Eigenschaften der Quellen sind. Zum anderen muss das Extraktionsverfahren der Linie aus dem Sammelsurium spektraler Komponenten ständigen Tests und Überprüfbarkeit ausgesetzt sein, damit eine Unsicherheit des Linienprofils, die hieraus erwachsen könnte, unterbunden werden kann. Im besten Falle finden sich alternative Methoden (beispielsweise in anderen Wellenlängenbereichen, in denen die Quelle strahlt), die ebenfalls eine Aussage über die diskutierten Parameter machen können. Damit könnte der Parameterraum stark eingeschränkt werden.

5 Beispiele von Linienprofilen für Akkretionsscheiben

In diesem Kapitel möchte ich diverse Modelle vorstellen, die sich in dem Geschwindigkeitsfeld des Plasmas unterscheiden. Es wird sich erweisen, dass die Wahl der räumlichen Geschwindigkeitskomponenten v^r, v^θ, v^Φ in charakteristischer Weise neue Linienprofile von emittierenden Scheiben um Schwarze Löcher bestimmt. Außerdem findet man hier alle Voraussetzungen an die Modelle. Der Ausgangspunkt ist die Topologie eines Schwarz Loch-Scheiben-Systems, wie sie in Abbildung 2 dargestellt ist.

- Schwarzes Loch (stellar oder supermassereich)
(Masse: irrelevant für die Linienform, nur ein Skalenfaktor)
Drehimpuls
- Scheibe
unendlich dünn
optisch dick
kalt: $kT_D \approx 0.1 - 1$ keV
akkretierend
evaporisiert nahe Korona
räumlich variabler Scheibeninnenrand!
- Jets und Winde
- Korona
Quelle der harten Primärstrahlung
heiß: $kT_C \approx 30 - 100$ keV
optisch dünn

Eine Beteiligung der Korona am Linienprofil wurde von *Dabrowski et al. (1997)* [13] und später von *Dabrowski & Lasenby (2000)* [14] untersucht, weil ihre Position Form und Äquivalentbreite beeinflusst (siehe dazu noch einmal Abbildung 10). Ich ziehe dieses Kriterium in meiner Arbeit nicht in Betracht. Ich gehe von einer geometrisch dünnen Scheibe aus, deren Geschwindigkeitsfeld ich in der Äquatorebene $\theta = \pi/2$ vorgeben kann. Die Primärstrahlung regt durch Fluoreszenz die Fe- K_α Linie an, deren Ruheenergie bei 6.4 keV liegt. Die Röntgenstrahlung propagiert in der Kerr-Metrik des Schwarzen Loches und erreicht schließlich den Schirm des Beobachters. Ich simuliere einerseits die Scheibenbilder (wegen mangelnder Auflösung nicht beobachtbar!) in einer farbkodierten Darstellung des Rotverschiebungsfaktors g und der Temperatur T , die der Beobachter unter verschiedenen Inklinationen i sehen würde, andererseits die Linienprofile (beobachtbar!), ein Diagramm, das den relativen, spektralen Fluss über dem Rotverschiebungsfaktor g zeigt.

5.1 Extraktion der Eisen-Emissionslinie aus den Röntgendaten

Die Emissionslinien sind nicht direkt an den Rohdaten des Röntgenobservatoriums ablesbar. Zwar ist aufgrund ihrer Stärke oft eine signifikante Erhöhung erkennbar, aber um relativistische Linienprofile diskutieren zu können, müssen zunächst überlagerte, andere spektrale Komponenten des globalen $X\gamma$ -Spektrums abgezogen werden. Üblich ist es nun, das Kontinuum der Primärquelle in Form des harten Potenz-Gesetzes inklusive exponentiellen Cut-Off sowie die Reflexionskomponente abzuziehen. Die Modelle für diese Komponenten sind wohlbekannt und allgemein akzeptiert, so dass die Zuverlässigkeit eines daraus extrahierten Linienprofils sehr hoch ist. Andere Komponenten, wie die warmen Absorber etc., stören das Energieband zwischen 3 und 10 keV nicht.

5.2 Vergleiche mit anderen Autoren

Ich werde zum Test meiner berechneten Linienprofile die Ergebnisse der Gruppen um *Fabian et al. (1989)* [18], *Dabrowski et al. (1997)* [13] und *Fanton et al. (1997)* [22] heranziehen.

Fabian et al. Ich habe bereits das 'Disk-Line-Model' dieser Gruppe vorgestellt, das seit 1989 sukzessiv weiterentwickelt wurde. Abbildung 20 zeigt einen Liniensatz dieser Kollaboration, wo die Inklination über die Werte 10° , 30° und 60° durchgestimmt wurde. Es handelt sich um ein Schwarzes Loch des Schwarzschild-Typs. Die Akkretionsscheibe, für die nur ein Keplersches Rotationsgesetz vorausgesetzt wurde hat einen Innenradius an der marginalen Stabilität, also $r_{in} = 6 r_g$ und reicht nach außen bis $30 r_g$. Zum Vergleich zeige ich nun die Linienformen mit dem identischen Satz an Parametern, allerdings mit meinem *objektorientierten Kerr Black Hole Ray-Tracer* gerechnet. Die Ergebnisse sind identisch. Sogar die Krümmungen der einzelnen Flanken stimmen sehr gut überein. Bei diesen Radien und verschwindendem Kerr-Parameter können die Resultate der Fabian-Kollaboration sehr gut reproduziert werden. Allerdings ist es mir nicht gelungen, die Linien für den maximalen Kerr-Fall nachzuvollziehen. Während bei *Fabian et al.* der blaue Ast in diesem Fall verkümmert, bleibt bei meinen Simulationen und im übrigen auch bei *Dabrowski et al. (1997)* [35] und *Fanton et al. (1997)* [22] ein signifikanter Peak erhalten (siehe später deren Ergebnisse: Abbildung 42).

5.3 Simulations-Modelle

In diesem Kapitel möchte ich den wesentlichen Teil meiner Arbeit beschreiben: Scheibenbilder und Linienprofile neuer Geschwindigkeitsfelder eines emittierenden Plasmas. Bei der Darstellung der Scheibenbilder ist es möglich, den Rotverschiebungsfaktor g oder die Temperatur T der Scheibe farbkodiert abzurufen. Dabei bedeutet einerseits blau $g > 1$ (Blauverschiebung), rot $g < 1$ (Rotverschiebung) andererseits blau hohe Temperatur und rot niedrige.

Rotverschiebung: Die Scheibenbilder von Standardscheiben mit Keplerscher Rotation zeigen bei hoher Inklination blaue Segmente und bei kleiner Inklination eine rote Scheibe. Dies ist auf den radialen Doppler-Effekt zurückzuführen, da bei hoch inklinierten Scheiben das Plasma auf den Beobachter zu rotiert und so die Strahlung blauverschoben wird (siehe später Abbildung 24). Eine Berücksichtigung der neuen Kinematik des Plasmas bildet ganz neue Strukturen ab: die Segmente treten vermehrt auf, werden in sich asymmetrisch oder deutliche blasenartige Strukturen schnüren sich ab (siehe zum Beispiel Abbildung 32). Eine detaillierte Diskussion dieser Strukturen möchte ich bei den einzelnen Modellen vertiefen.

Temperatur: Das Temperaturbild einer Scheibe resultiert aus der Annahme eines klassischen *Planckschen Strahlers*, also eines T^4 -Gesetzes für die emittierende Scheibe. Die Temperaturbilder enthüllen meist, dass der innere Bereich der Scheibe heiß (blau dargestellt) ist und sich nach außen hin abkühlt, weil das Plasma sich besonders in unmittelbarer Nähe zum Schwarzen Loch stark aufheizt. Dies dokumentiere ich beispielhaft anhand Abbildung 33.

Neue Emissionslinienprofile: Die neuen Emissionsprofile zeigen im Vergleich zu den bisherigen Modellen ganz neue Charakteristiken, die jedoch physikalisch plausibel sind. Ich möchte eine Unterscheidung in sechs Modelle vornehmen:

- Modell 1: Keplersche Rotation
- Modell 2: Keplersche Rotation mit Ausflüssen

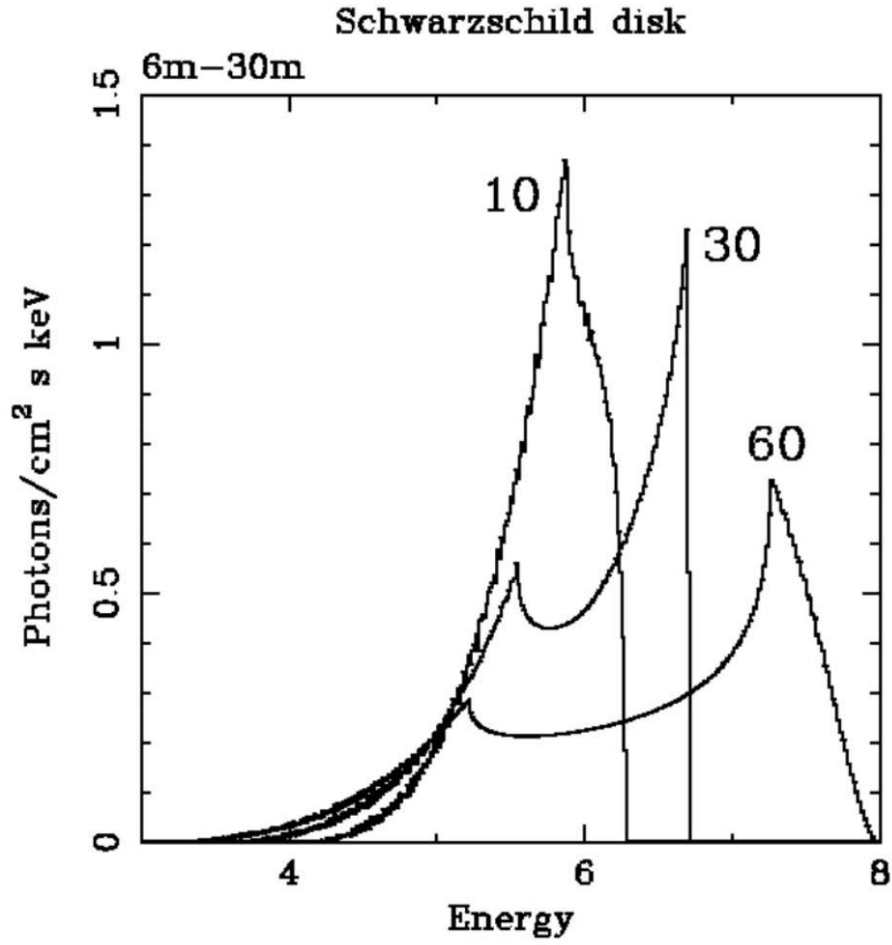


Abbildung 20: Emissionslinienprofile einer Scheibe um ein Schwarzes Loch des Schwarzschild-Typs bei verschiedenen Inklinationen (*Fabian et al., 2000* [21])

- Modell 3: Keplersche Rotation mit Akkretion (radiale Drift als einfaches Freifall-Gesetz)
- Modell 4: Keplersche Rotation mit Akkretion (Freifall-Gesetz nach *Cunningham*)
- Modell 5: Keplersche Rotation und Einflüsse auf koronalen Bögen
- Modell 6: Keplersche Rotation mit poloidalen Ausflüssen

Modell 1 ist in Bezug auf die Geschwindigkeitsfelder das klassische Standard-Modell, das nur die Φ -Komponente der Vierer-Geschwindigkeit nicht- verschwindend berücksichtigt. Die Ausflüsse in den Modellen 2 und 6 berücksichtigen Jets und Scheibenwinde, deren Entstehung ich in den vorangegangenen Kapiteln besprochen habe, in Form einer θ -Komponente bzw. einer r -Komponente und θ -Komponente. Die Akkretion in den Modellen 3 und 4 entspricht von der Bewegung her einer radialen Drift, die in Form eines Freifall-Gesetz Berücksichtigung findet. Dabei teste ich zwei mögliche Formulierungen. In Modell 5 liegt eine komplizierte Bewegung der Materie vor, die sich dadurch auszeichnet, dass sich die Teilchen zunächst senkrecht zur Scheibe und dann inwärts bewegen: sie folgen koronalen Bögen. Die r -Komponente ist in diesem Fall *negativ*; die θ -Komponente skaliert mit einem Kepler-Gesetz. Modell 6 beschreibt Ausflüsse auf poloidalen Bahnen. Im Unterschied zu Modell 5 ist die r -Komponente positiv.

Ich möchte nun die Resultate der einzelnen Modelle vorstellen und vereinzelt auf die Scheibenbilder in g und T sowie hauptsächlich auf die observablen Aspekte, nämlich die Phänomenologie der Emissionslinien eingehen. Dabei möchte ich besonders die neuen Erkenntnisse erörtern, die Ausfluss neuer Plasma-Kinematik sind.

Modell 1: Keplersche Rotation

Dies ist der klassische Fall: das emittierende Plasma hat nur einen Freiheitsgrad, nämlich die Rotation. Ich habe das bisherige Modell mit einer Rotation bis zur marginal stabilen Bahn ($r_{ms}^{Schwarzschild} = 6.0 r_g$, $r_{ms}^{Kerr} = 1.0 r_g$) modifiziert. Die Scheiben akkretieren, das heißt, es muss sich Materie **auch innerhalb** der marginal stabilen Bahn bewegen. Bisherige Modelle reißen abrupt an diesem Radius ab und generieren eine künstliche Lücke zwischen r_H und r_{ms} , die es real nicht geben kann. Ich nehme an, dass die Materie mit dem spezifischen Drehimpuls l , den sie bei r_{ms} hat, innerhalb der marginal stabilen Bahn mit $l = l(r_{ms}) = const$ rotiert. Hydrodynamische Modelle, wie sie an der Landessternwarte gerechnet werden, stützen dies. Auch ist es möglich, dass l eine schwache Funktion von r ist. Allerdings ist nicht zu erwarten, dass die Fluoreszenzlinie im innersten Bereich bis direkt vor den Horizont des Schwarzen Loches noch gebildet werden kann, weil dieser Bereich erwartungsgemäß so heiß sein wird, dass Eisen hier vollständig ionisiert sein wird. Abbildung 6 zeigt, dass bei hohen Ionisationsparametern ξ keine ausgeprägte Linie mehr generiert werden kann. Aus diesem Grund habe ich den Innenrand der modellierten Scheiben auch immer bei r_{ms} angenommen. Im oft diskutierten maximalen Kerr-Fall ist das gerade der Horizont des Schwarzen Loches. Das *modifizierte Rotationsgesetz* lässt jedoch die Möglichkeit offen, auch für ein Schwarzes Loch vom Schwarzschild-Typ eine Akkretion bis zum Horizont zu rechnen. Die Ergebnisse unterscheiden sich nicht wesentlich von den bisherigen Bildern. Die Diagnose für Modell 1 ist die folgende:

- kleine Inklinationen: das blaue Maximum tritt bei etwa $g = 1.0$ deutlich hervor. das rote Nebenmaximum links hat eine schwache Ausprägung. Die Ursache ist das speziell-relativistische Beaming.
- große Inklinationen: der blaue und der rote Ast sind 'gepeakt', wie es bei dem klassischen Profil emittierender, Newtonscher Scheiben ist. Jedoch ist der rote Flügel durch die Gravitationsrotverschiebung stark verkümmert.

Test 1: Fabian et al. (1998)

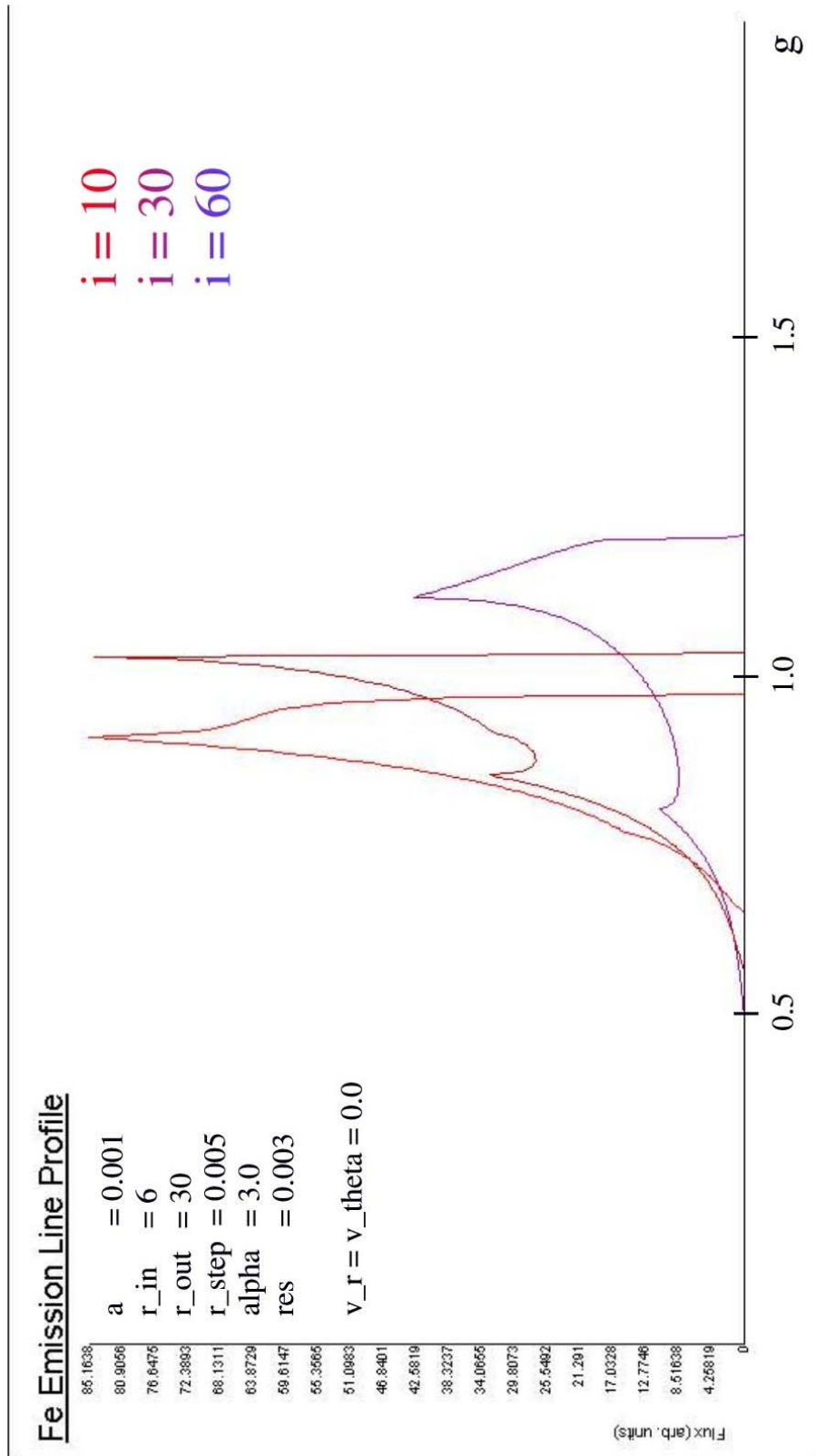


Abbildung 21: Test der Linienprofile von Fabian et al.: Emissionslinienprofile einer Scheibe um ein Schwarzes Loch des Schwarzschild-Typs bei verschiedenen Inklinationen. Hier mit dem Kerr Black Hole Ray- Tracer gerechnet! (A. Müller, 2000)

- bei zunehmender Rotation des Schwarzen Loches verschiebt sich die komplette Linie nach links zum energetisch kleineren Ende. Ursache ist eine zunehmende Gravitationsrotverschiebung.
- die meisten Linien haben global gesehen eine dreieckige Form.

Einfluss des Scheibeninnenrands in Modell 1: Der innerste Rand der emittierenden Akkretionsscheibe r_{in} ist ein wesentlicher Parameter, dessen Einfluss ich an dieser Stelle studieren möchte. Einerseits weiß man aus Beobachtungen (*Gilfanov et al. 2000* [25]), dass er bei ein und derselben Quelle variieren kann. Andererseits ist es interessant zu untersuchen, wo das innere Limit für Linienproduktion liegen könnte. Wie bereits gesagt, unterbindet die hohe Temperatur und die dadurch bedingte hohe Ionisation des Materials den Prozess der Linienbildung durch Fluoreszenz. Abbildung 22 zeigt nun für ein ausschließlich Keplersches Geschwindigkeitsfeld eine Studie des Einflusses von r_{in} für den maximalen Kerr-Fall bei einer üblichen mittleren Inklination für Seyfert-1-Galaxien von $i = 30^\circ$. r_{in} variiert nun über die Werte $\{1.0, 2.0, 4.0, 6.0, 8.0\}$, wobei $r_{in} = 1.0 r_g$ eine Rotation des emittierenden Plasmas bis auf den Horizont des Schwarzen Loches vom Kerr-Typ bedeutet.

Man erkennt, dass einerseits die gesamte Fläche unter der Linie für kleine Scheibeninnenradien r_{in} anwächst, was sich dadurch erklärt, dass die Scheibe in ihrer Dimension effektiv größer wird. Physikalisch interessant sind vor allem zwei Effekte:

1. Der rote Flügel wird weiter zu kleineren Energien ausgedehnt, wenn r_{in} schrumpft. Dies ist plausibel, weil der Einfluss der Gravitationsrotverschiebung unmittelbar am Horizont maximal ist und entsprechend die Scheibe rötet, weshalb die Linie stärker zum niederenergetischen Ende tendiert. Entsprechend ist das rote Nebenmaximum bei kleineren r_{in} überhöhter.
2. Der blaue Peak wird ebenfalls höher, weil das Beaming direkt vor dem Horizont auch effektiver ist: die Rotationsgeschwindigkeiten des Plasmas werden bei kleineren Radien immer größer, so dass die Strahlung um so mehr in Bewegungsrichtung kollimiert wird.

Einfluss des Scheibenaußenrands in Modell 1: Ebenso aufschlußreich ist es die Dimension der Scheibe in der anderen Richtung zu variieren. Im folgenden verändere ich den Außenradius r_{out} (in Einheiten von r_g) über das Tupel $\{100, 50, 35, 20, 10\}$, um den Einfluss einer Verkleinerung der emittierenden Zone von außen zu studieren. Wiederum rotiert das Schwarze Loch mit $a = 0.999$ nahezu maximal, die Scheibe ist auf 30° inkliniert und der Innenradius beträgt $1 r_g$. Für die Linienskalkulation verwende ich ebenfalls übliche Werte $\alpha = 3$ und eine spektrale Auflösung von 0.005. Wie Abbildung 23 zeigt,

- steigt verständlicherweise zunächst der Fluss mit höherem r_{out} an, weil die emittierende Region wächst.
- unterscheidet sich die globale Phänomenologie der Linien mit $r_{out} = 100, 50$ und 35 kaum, jedoch findet man bei kleinsten Außenradien eine signifikante Veränderung des Profils in Form eines Verlustes an ausgeprägten Spitzen, die nicht nur an der vertikalen Skalierung liegen können.

Der Fluss sollte demnach nicht beliebig verkleinert werden, indem man die Dimension der Scheibe zu klein ansetzt. Eine moderate Größe von mindestens $30 r_g$ ist empfehlenswert, wenn nicht aus anderen (physikalischen) Gründen die Emissionsregion sehr klein gewählt werden soll.

Einfluss der Inklination in Modell 1: Die Inklination i ist der dominante Parameter, der maßgeblich das Linienprofil bestimmt. Die Orientierung des Beobachters zum Schwarzen Loch-Scheiben-System ist entscheidend, ob man lediglich einen einzelnen, scharfen Peak oder eine rudimentäre Doppelhöcker-Struktur detektiert. Ich möchte die beiden Extreme in der Rotation eines Schwarzen Loches direkt gegenüberstellen: Schwarzschild ($a = 0$) gegenüber Kerr ($a = 1$).

Die Illustration 24 zeigt zunächst die Scheibenbilder, farbkodiert in der Rotverschiebung. Von unten nach oben nimmt die Neigung der Scheibe zum Beobachter zu. Wie man sieht,

- tauchen mit wachsendem i blaue Segmente in dem Bereich der Scheibe auf, der auf den Beobachter zu rotiert. Dies ist die Auswirkung des radialen Doppler-Effekts (hier: Blauverschiebung).
- ist der innerste Bereich der Scheibe direkt am Horizont des Schwarzen Loches stark gerötet, was den Effekt der Gravitationsrotverschiebung visualisiert.
- macht sich die Rotation des Schwarzen Loches in einer Verzerrung der Scheibenstruktur und besonders am Horizont bemerkbar.
- die Verzerrung der globalen Scheibenform ist besonders markant: die Strahlung wird um das Schwarze Loch herum gekrümmt (Linseneffekte), so dass ein Beobachter auch auf Teile schauen kann, die eigentlich direkt hinter dem Schwarzen Loch lokalisiert sind. Die Phänomene sind lange bekannt und decken sich mit den Ergebnissen anderer Autoren.

Abbildung 25 zeigt die Verhältnisse im Linienprofil: ich habe eine Linienserie aus fünf Linien in einem Diagramm dargestellt, bei denen ich sukzessive (von rot nach blau) die Inklination über die Werte-Schar $\{5^\circ, 15^\circ, 30^\circ, 45^\circ, 60^\circ\}$ erhöhe, oben für Schwarzschild, unten für Kerr. Den Innenrand der Scheibe habe ich jeweils an den Rotationsparameter a angepasst, weil anzunehmen ist, dass die Scheibe bis zum Radius marginaler Stabilität reichen wird. Für Schwarzschild sind das gerade $6 r_g$ und für Kerr $1 r_g$. Als Außenrand nehme ich $30 r_g$ an, das Emissivitätsgesetz ist ein einfaches Potenz-Gesetz mit $\alpha = 3.0$ und einer spektralen Auflösung von 0.005. Das Geschwindigkeitsfeld ist nur Keplersch.

Die Studie des Parameters Inklination gemäß Abbildung 25 fasse ich folgendermaßen zusammen:

- Mit wachsender Inklination verbreitert sich das Linienprofil: ein rudimentäres Doppelhöcker-Profil wird nach und nach sichtbar, bestehend aus einem scharfen, engen blauen Peak und einem breiten, roten Nebenmaximum.
- Der blaue Ast ist durch das Beaming immer intensiver als der rote Ast.
- Mit wachsender Inklination wird der Maximalwert des Flusses allmählich herabgesenkt, allerdings gibt es einen Sprung bei 45° .
- Alle Linien siedeln sich ohne große Streuung um etwa $g = 1.0$ an; dort ist der Maximalwert des Flusses, also der Ruheenergie der Emissionslinie.
- Bis auf die Linie mit $i = 60^\circ$ unterscheidet sich Schwarzschild kaum von Kerr. Bei $i = 60^\circ$ ist die blaue Flanke im Kerr-Fall wesentlich intensiver: schaut man mehr von der Kante in die Scheibe, bewegen sich viele Plasma-Teilchen auf der einen Seite der Scheibe auf den Beobachter zu. Für hohe Inklinationen ist die Φ -Komponente der Geschwindigkeit projiziert auf die Sichtlinie sehr groß. Außerdem habe ich für den Kerr-Fall den Innenrand bei $r_{in} = 1 r_g$ angesetzt. Je näher man an das Schwarze Loch kommt, um so schneller rotieren die Teilchen. Der Beaming-Effekt ist also für $a = 1$ sehr effizient: die Strahlung aus dem innersten, auf den Beobachter sich zubewegenden Teil ist also stark kollimiert und wird so sehr intensiv.

Diese Beobachtungen und Interpretationen decken sich mit bisherigen Modellen und sind auch physikalisch plausibel.

Variabler Scheibeninnenrand

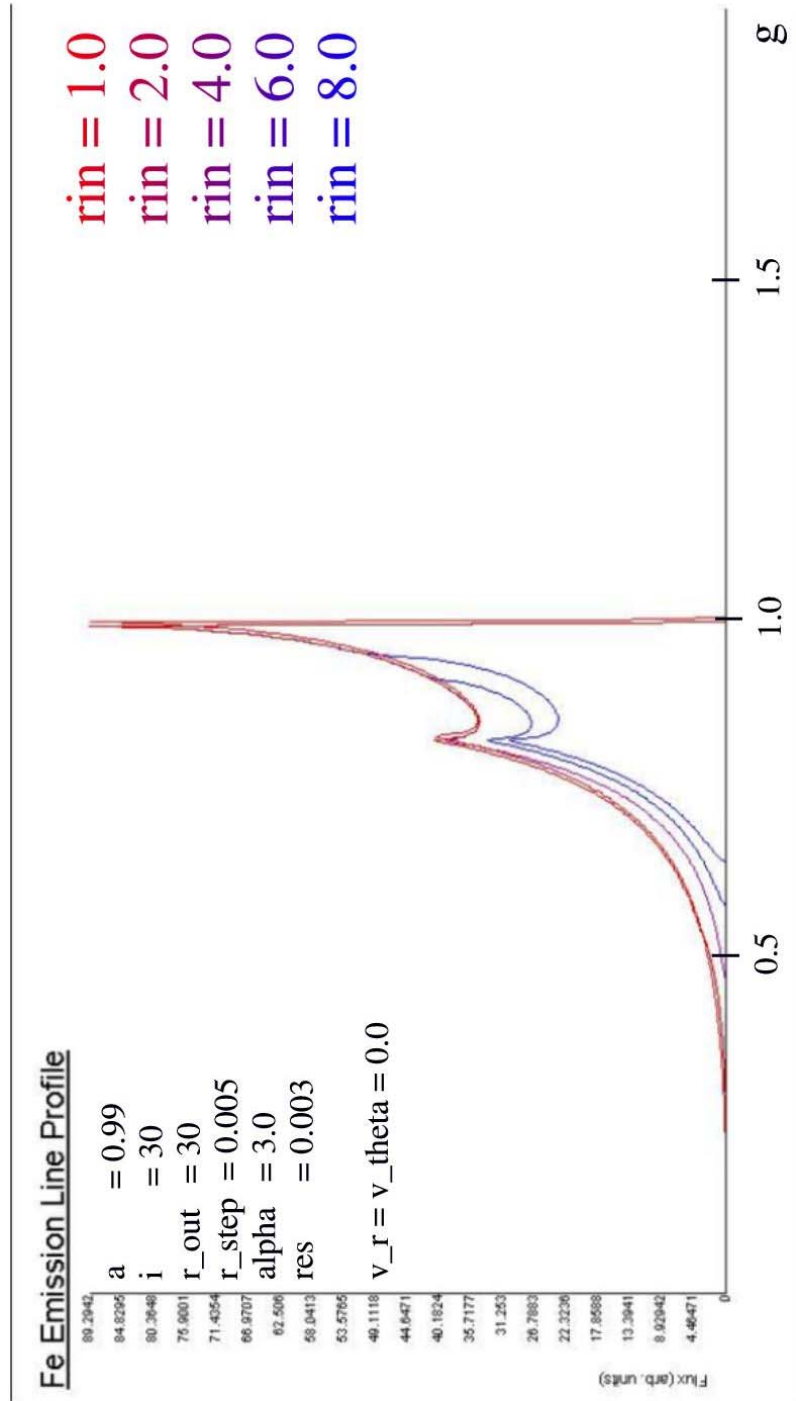


Abbildung 22: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen Scheibeninnenradien für den Kerr-Fall bei einem Keplerschen Geschwindigkeitsfeld (*A. Müller, 2000*)

Variabler Scheibenaußenrand

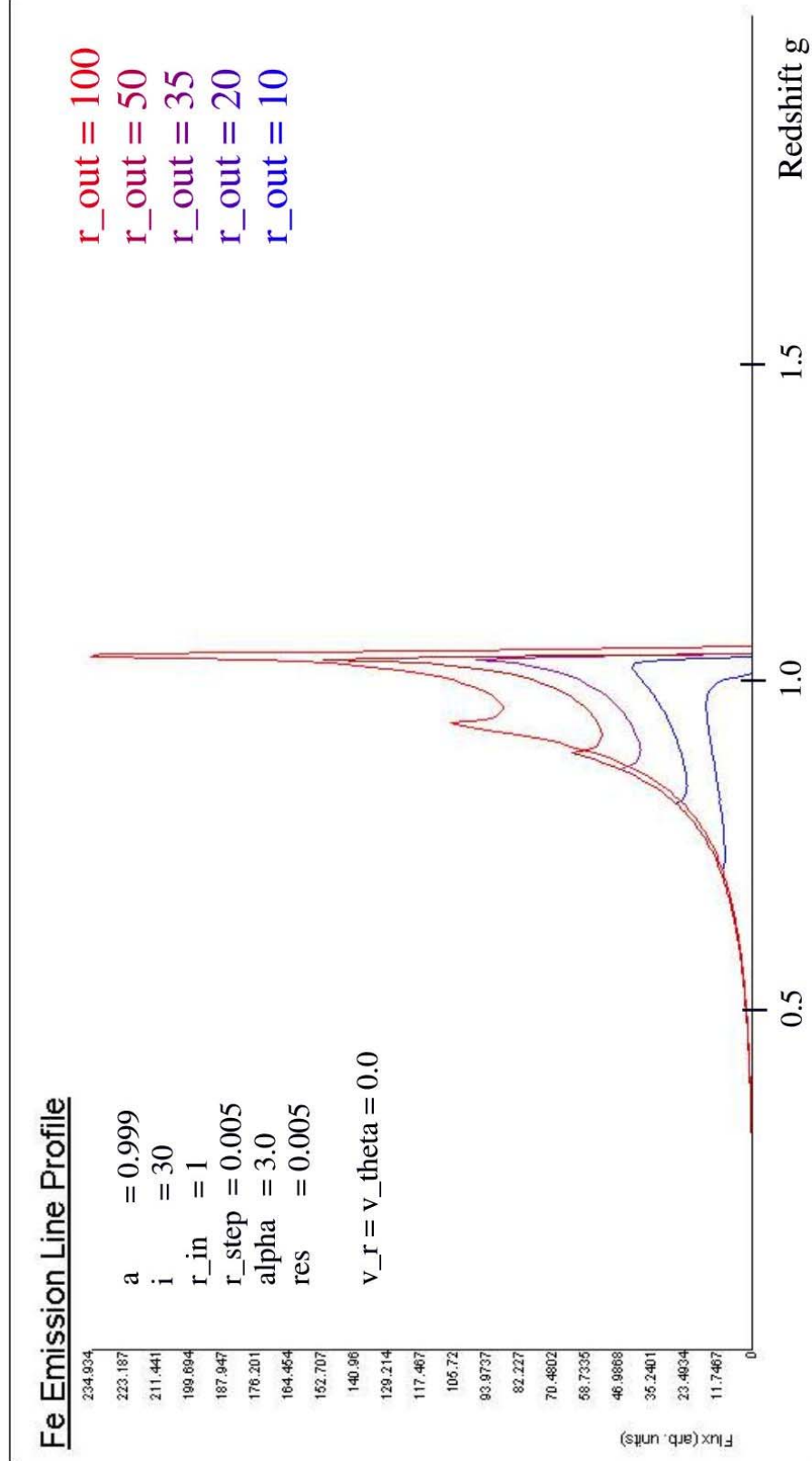


Abbildung 23: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen Scheibenaußenradien für den Kerr-Fall bei einem Keplerschen Geschwindigkeitsfeld (*A. Müller, 2000*)

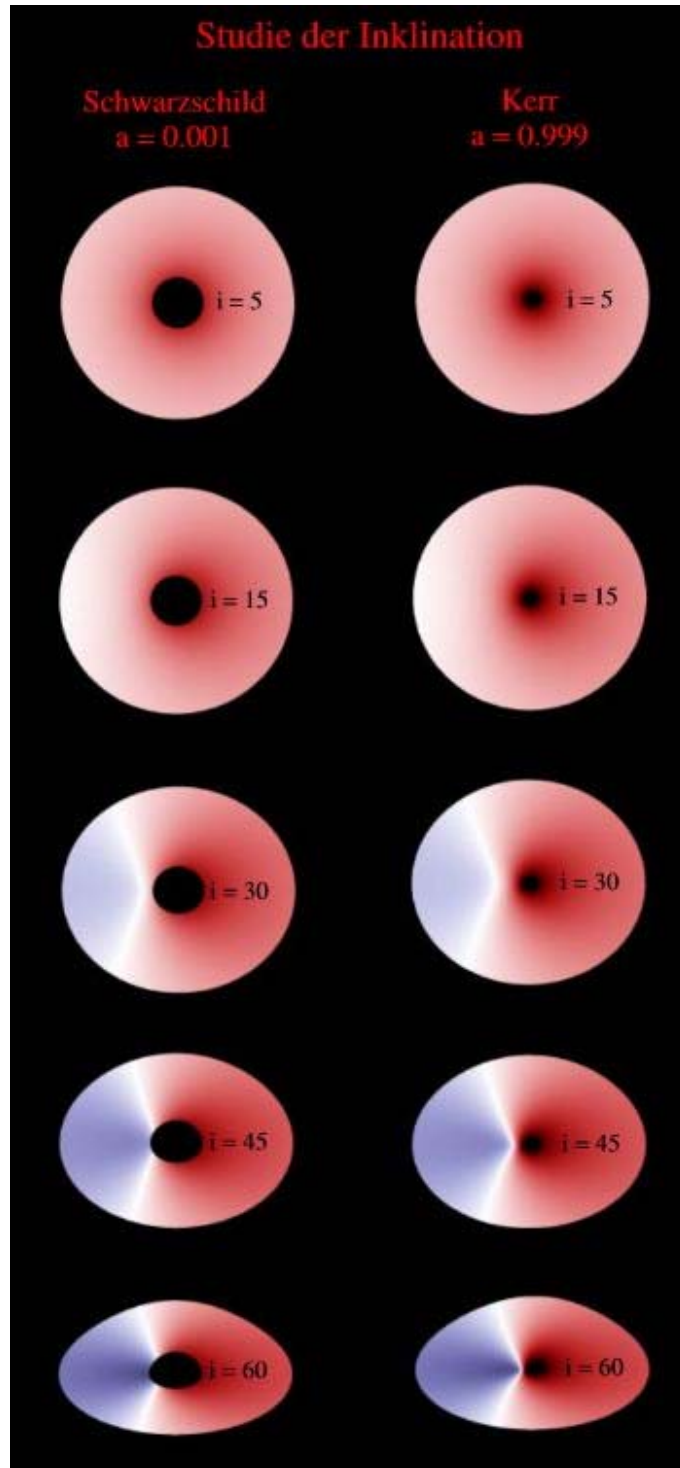
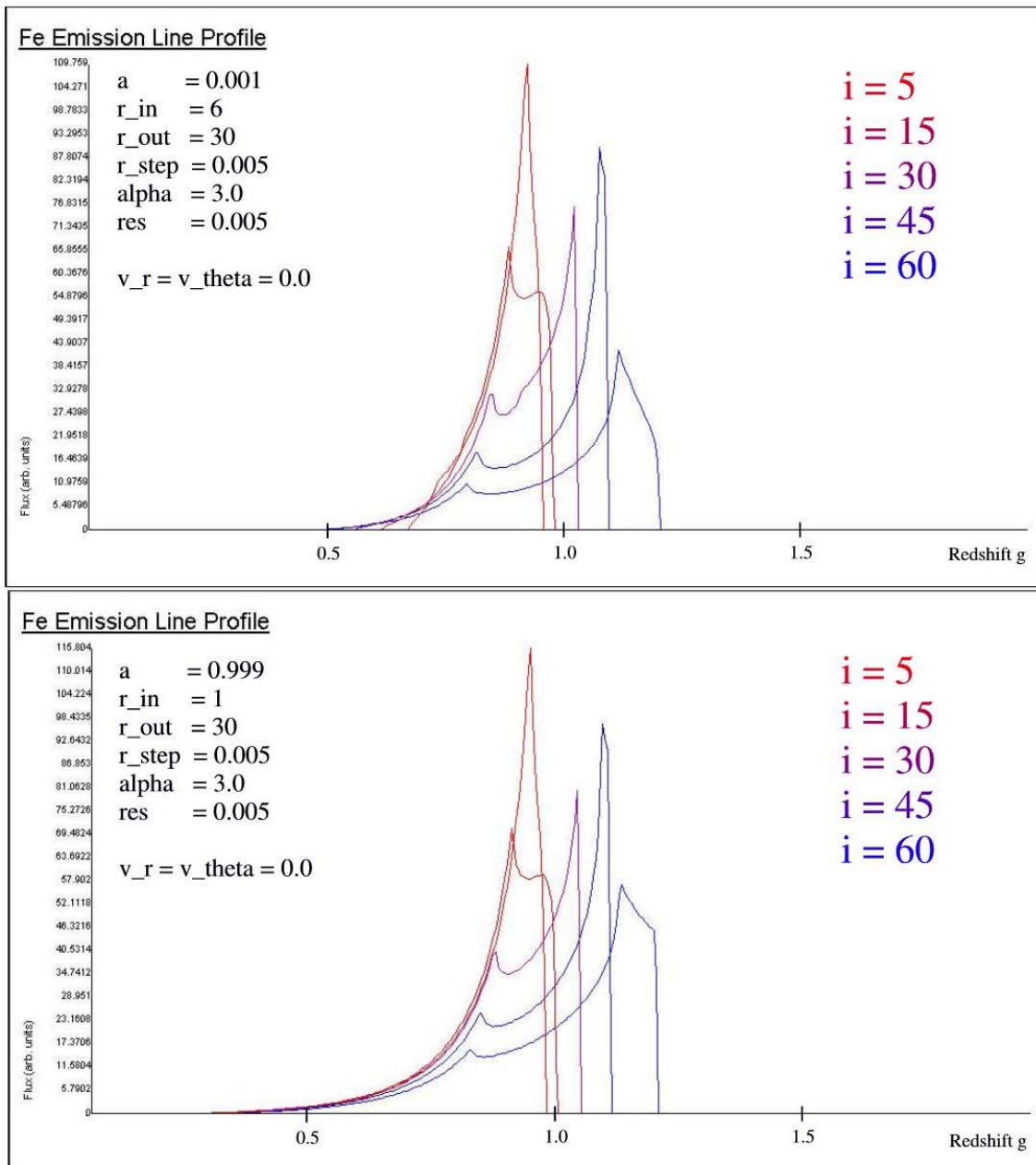


Abbildung 24: Einfluss der Inklination für Keplersche Rotation in Schwarzschild (links) verglichen mit Kerr (rechts): die Neigung nimmt von oben nach unten über die Werte 5° , 15° , 30° , 45° und 60° zu. (A. Müller, 2000)

Studie der Inklination: Schwarzschild vs. Kerr



Modell 2: Keplersche Rotation mit Ausflüssen

In diesem Modell nehme ich zur Rotation Materie-Ausflüsse in Form von Jets und Winden hinzu, indem ich die Geschwindigkeitskomponente v^θ von der Rotationskomponente v^Φ abhängen lasse. In gleichem Maße, wie die Rotation nach innen hin stark zunimmt, steigt diese Komponente senkrecht zur Scheibe, versehen mit einem Skalenfaktor c , auch an. Abbildung 26 zeigt eine Variation des Profils für verschiedene Stärke-Koeffizienten c , die die Ausflüsse gewichten. Je größer c wird, um so blauer wird die Scheibe. Dies zieht also eine Verschiebung der gesamten Linie nach rechts, zu höheren Energien hin, nach sich. Gleichzeitig wird das rote Nebenmaximum abgesenkt. Besonders interessant ist, dass die in allen bisherigen Modellen scharf abfallende, blaue Flanke nun neue Strukturen aufweist: sie fällt flacher ab und bildet sogar 'Schultern' aus. Bei großen Inklinationen verformt sich die blaue Schulter in eine auffällige blaue Stufe. Diese Eigenschaft zeigen zahlreiche Quellen in den ASCA-Daten von *Nandra et al. (1997)* [45]. Vor allem die kürzlich untersuchte Quelle NGC 4151 (*Wang et al. 1999* [67]), auf die ich noch eingehen werde, zeigt zwischen 7 und 8 keV gerade eine solche Struktur.

Weiterhin konstatiere ich:

- Kleine Inklinationen und schwacher Ausfluss: keine deutlichen Veränderungen verglichen mit Modell 1.
Eine Erhöhung des Ausflusses verschiebt die Linie signifikant nach rechts, weil blauverschobene Anteile zunehmen.
Bei maximalem Ausfluss ist am blauen Ast eine Stufe sichtbar.
Dieses Phänomen tauchte nie bei bisherigen Modellen auf!
- Große Inklinationen:
Die Linie zeigt zwei Maxima, wie auch schon für den Fall nur mit Rotation. Außerdem bilden sich dann 'treppen- und plateau-förmige' Strukturen an der blauen Flanke aus, was bisher kein Modell prognostizieren konnte.
- Eine Zunahme des Ausflusses durch Erhöhung des Skalenfaktors c senkt das rote Nebenmaximum ab. Das liegt daran, weil mehr Bereiche der Scheibe blauverschoben werden, dadurch dass nun viel mehr Materie auf den Beobachter zu rotiert.
- Bei zunehmender Rotation des Schwarzen Loches wird der rote Flügel immer abgesenkt.

Wie die folgenden Linienprofile 26 und 27 zeigen, nimmt die Struktur am blauen Flügel bei höheren Inklinationen zu.

Modell 3: Keplersche Rotation mit Akkretion (radiale Drift als einfaches Freifall-Gesetz)

Dieses Modell unterscheidet sich vom einfachen Rotationsmodell durch eine Berücksichtigung einer *nicht-verschwindenden, negativen* radialen Komponente v^r . Ich wähle für diese Komponente ein *Freifall-Gesetz*, das proportional zu $r^{-1/2}$ ist (im Code: $p = 1/2$). Der freie Fall dürfte allerdings durch relativistische Effekte und Druckgradienten des Gases abgebremst werden, so dass hier eine Modifikation in Form anderer Exponenten p denkbar ist. Ich habe diese Wahl dem Anwender des Projektes *KerrRaypp* freigelassen. Die Geschwindigkeitskomponente v^θ bleibt in diesem Modell null.

Abbildung 28 zeigt nun die Variation des Profils mit unterschiedlich starker radialer Drift: der Stärke-Koeffizient q wird langsam über die Werte $\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5\}$ erhöht. Wiederum betrachte ich den maximalen Kerr-Fall und eine Inklination von 30° . Die Scheibe reicht vom Horizont

bis zu $r_{out} = 20 r_g$. Auffällig ist nun, dass eine Erhöhung der radialen Drift den blauen Ast vermindert. Offensichtlich dominiert der Einfall der Materie die Rotation. Das rote Nebenmaximum bleibt in der Serie unverändert. So kann der interessante Fall eintreten, dass rotes und blaues Maximum gleich groß sind. Dies Variante wäre für die später zu diskutierende stellare Quelle GRO J1655-40 interessant. Ich beobachte außerdem an den Linienformen:

- Kleine Inklinationen und eine geringe Drift ändern die Linienform kaum verglichen mit Modell 1, allerdings sind die Linien geringfügig zum niederenergetischen Ende verschoben worden, und das blaue Maximum wurde enger und spitzer.
- Kleine Inklinationen: eine stärker werdende Drift hebt den roten Flügel an.
- Große Inklinationen:
Die Linie ist weit nach links verschoben; der rote Peak wird ausgeprägter, während das blaue Maximum zu einem 'Buckel' verkümmert.
- Große Inklination und starke radiale Drift senkt den blauen Buckel weiter ab.
- Rotation des Schwarzen Loches verschiebt die komplette Linie nach links und senkt das Schwarzschild-Profil ab (Abrundung der Linie).

Abbildung 29 zeigt nun die radiale Drift, diesmal formuliert mit einem schwächeren Abfall in Form eines $1/r$ -Gesetzes ($p = 1.0$). Die anderen Parameter sind $a = 0.999, i = 30^\circ, r_{in} = 1 r_g, r_{out} = 30 r_g$. Man erkennt sofort, dass für eine Variation über den Stärkefaktor $q = 0.1, 0.3, 0.5$ das Linienprofil kaum variiert, weil der Einfall einfach eine zu schwache Ausprägung besitzt. Die Akkretion macht sich nur dann signifikant im Linienprofil bemerkbar, wenn sie mindestens mit r^{-2} abfällt. Ein Übergang zum Schwarzschild-Fall mit einem Innenradius der Scheibe von $6 r_g$ ändert die Erkenntnisse, die man Abbildung 28 abgewinnen kann kaum. Abbildung 30 illustriert bei gleicher Inklination, aber einem Innenradius von $6 r_g$ bei gleicher Variation über q die gleichen Tendenzen. Allerdings zeigt die Position des roten Nebenmaximums nun eine stärkere Variation: es verschiebt sich allmählich zu kleineren Energien, wenn die radiale Drift zunimmt. Evident ist jedoch noch, dass der rote Ast für $a = 0$ sehr abrupt abbricht und die Abszisse bei etwas $g = 0.5$ schneidet. Im Kerr-Fall hingegen wird der rote Flügel zu einem Schwanz ausgezogen, weil die Gravitationsrotverschiebung infolge der unmittelbaren Nähe zum Schwarzen Loch ($r_{in} = 1 r_g$) hier dominanter ist.

Ausflüsse

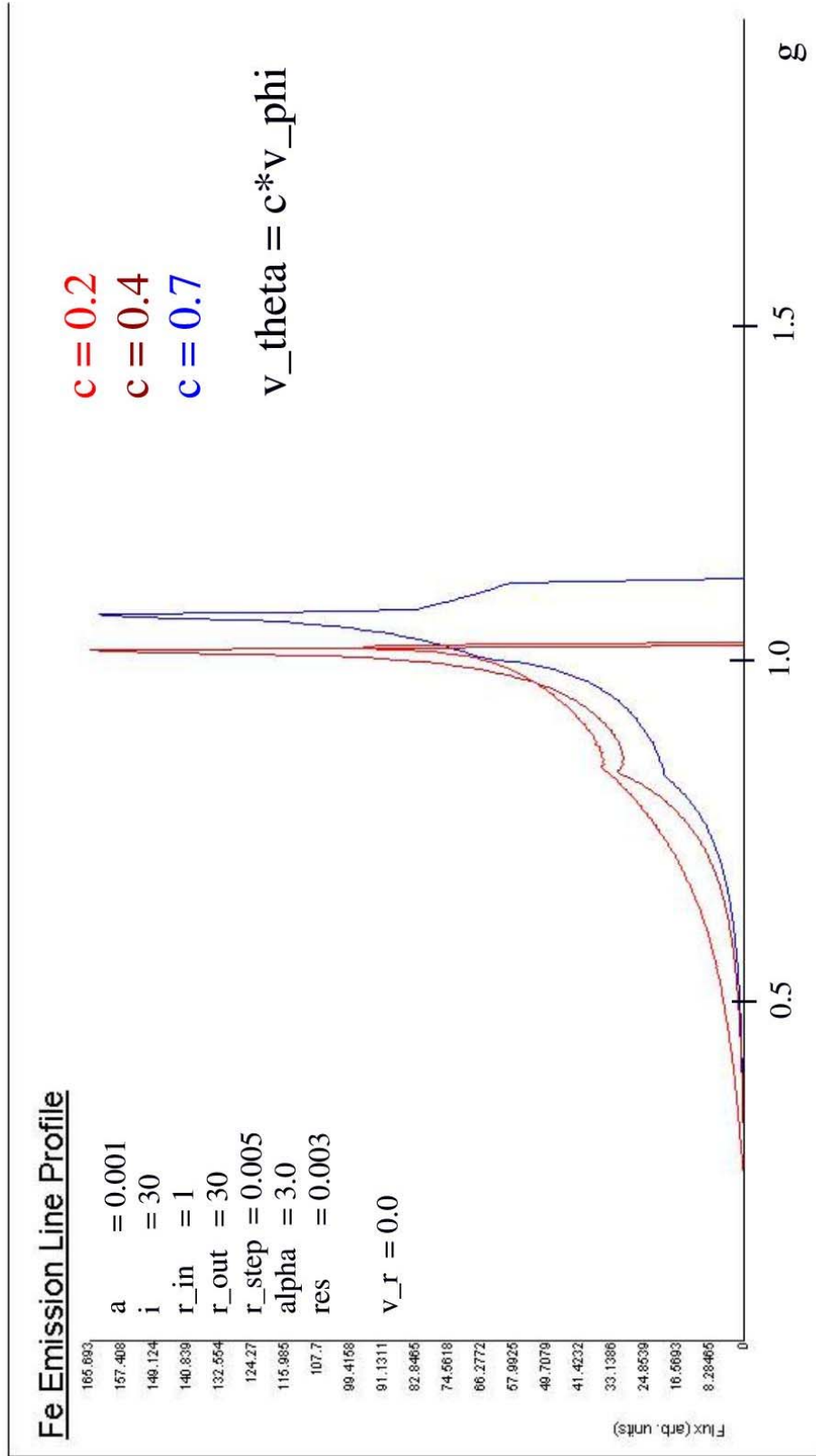


Abbildung 26: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken Ausflüssen für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination beträgt hier 30° . (A. Müller, 2000)

Ausflüsse

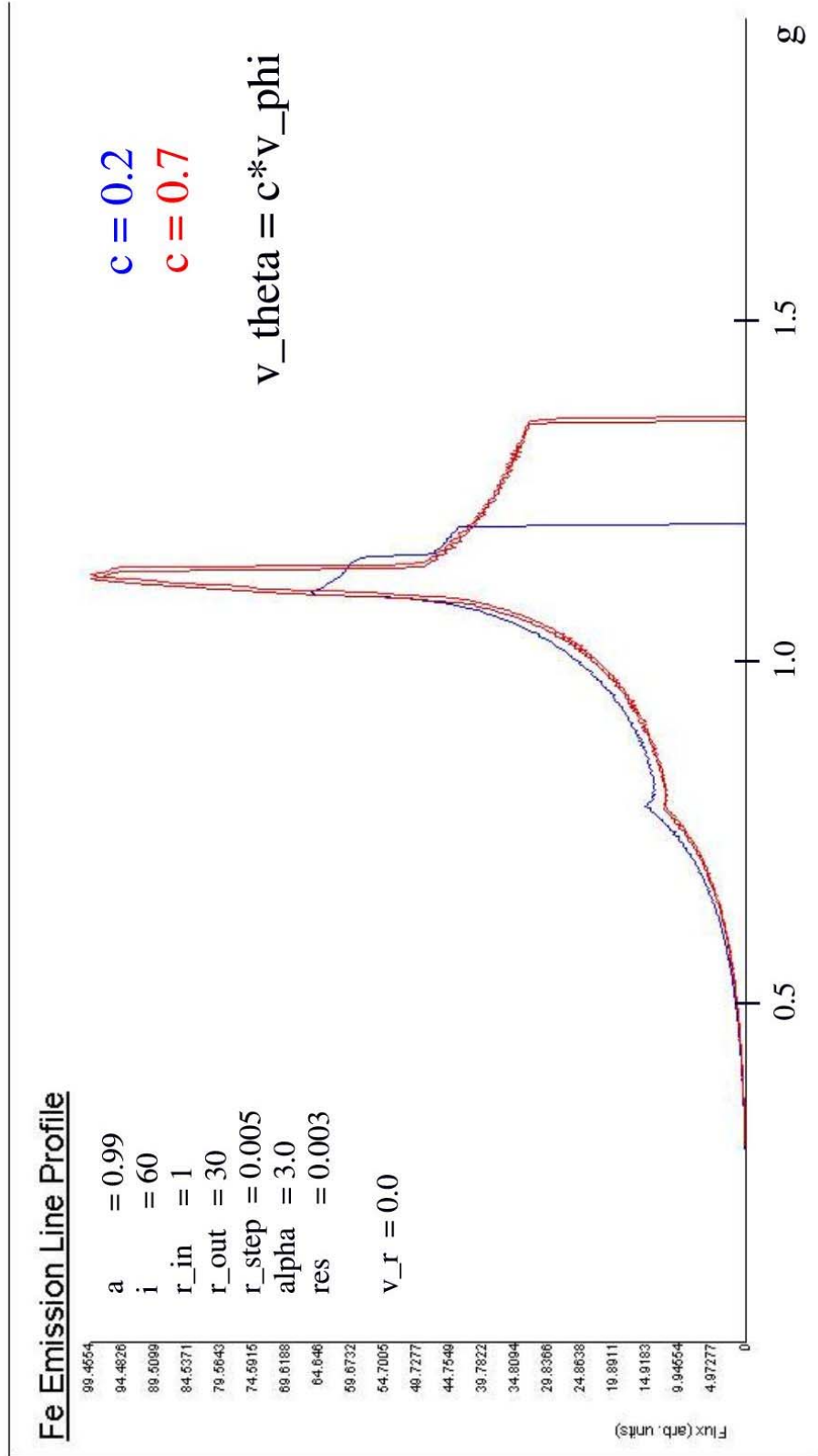


Abbildung 27: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken Ausflüssen für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination beträgt hier 60° . (*A. Müller, 2000*)

radiale Drift

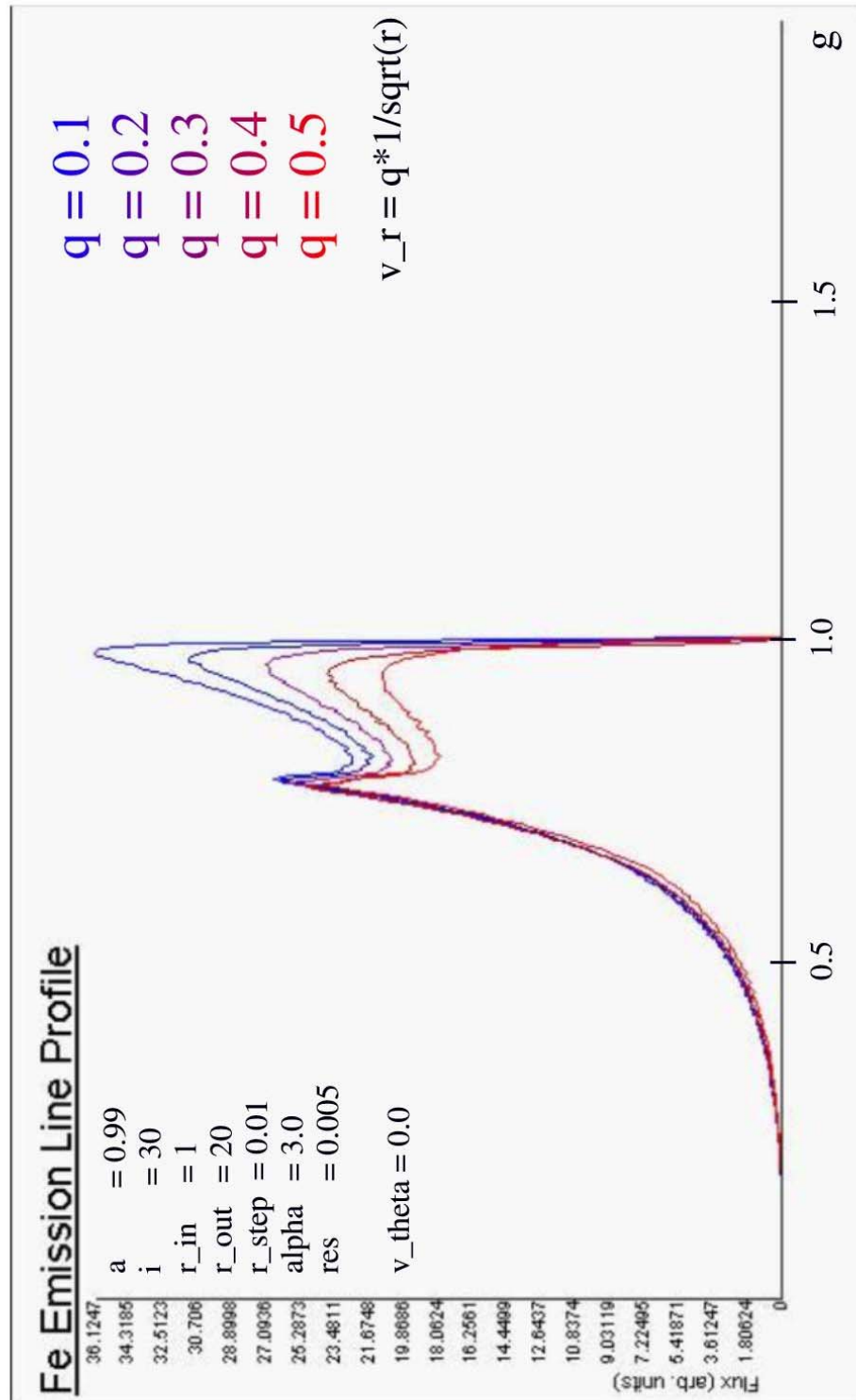


Abbildung 28: Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld (*A. Müller, 2000*)

Studium der radialen Drift in Kerr

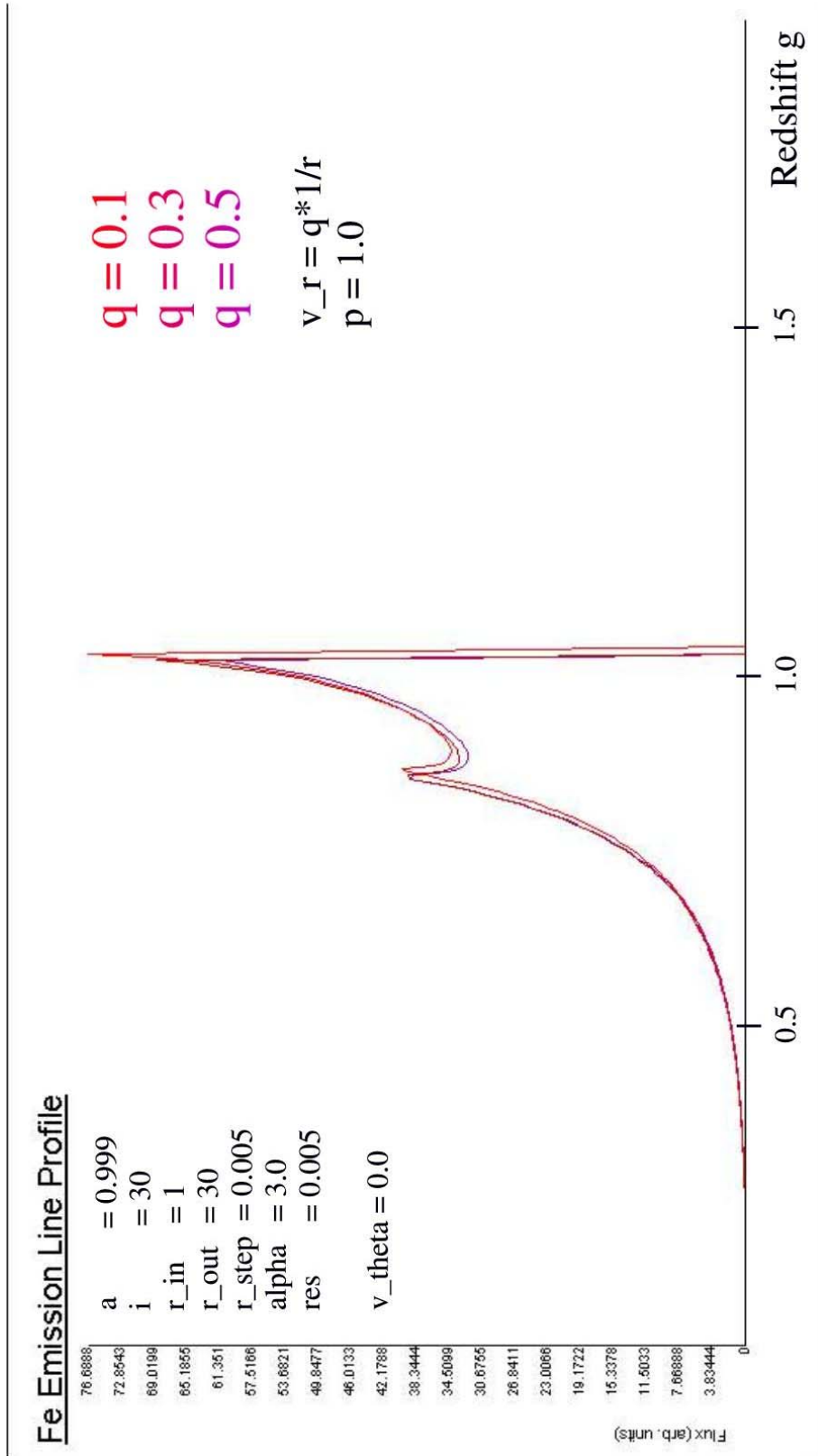


Abbildung 29: Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift in Form eines schwach abfallenden $1/r$ -Gesetzes für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld (A. Müller, 2000)

Studium der radialen Drift in Schwarzschild

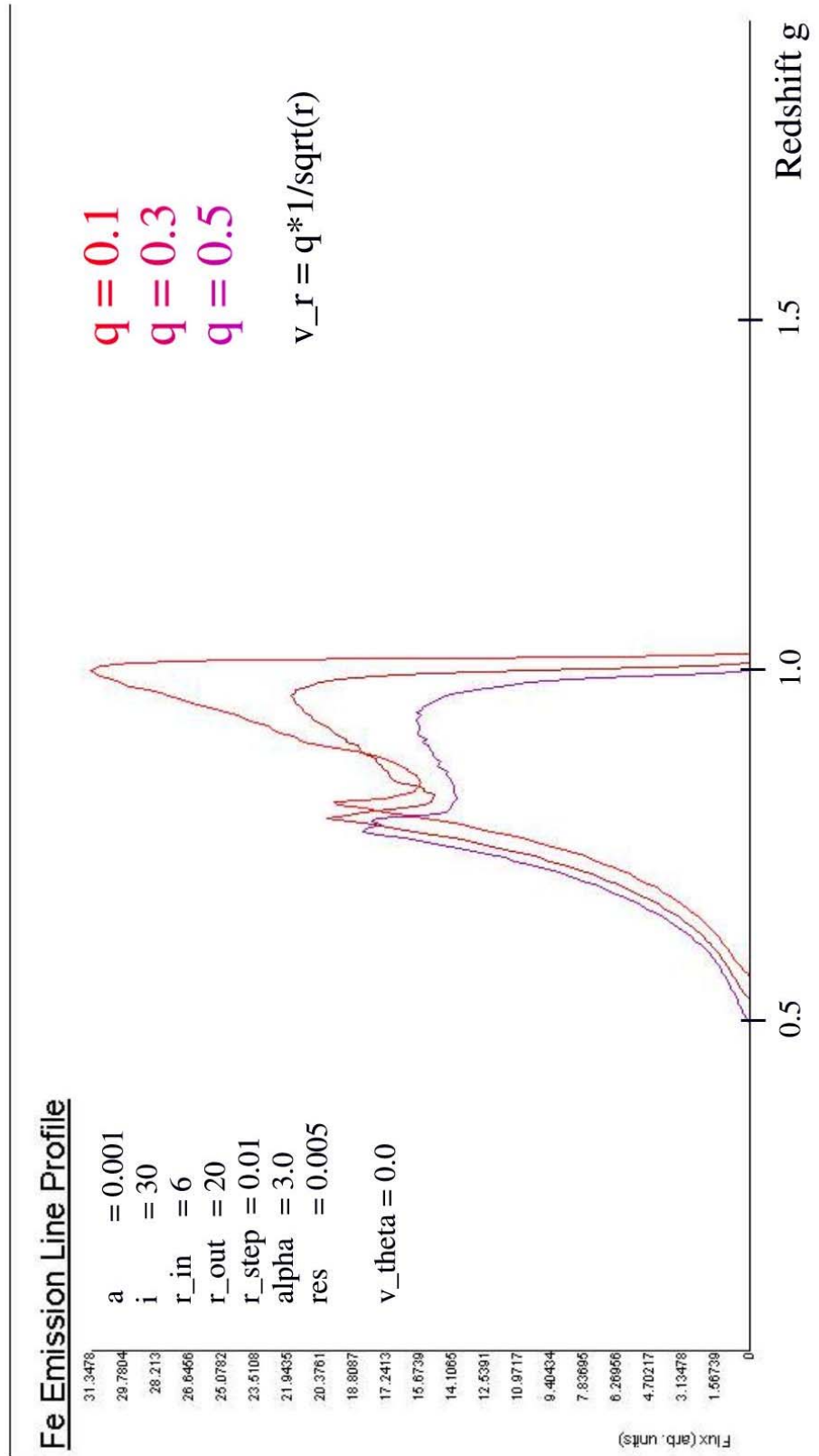


Abbildung 30: Simulierte Linienprofile bei verschieden starker radialer Drift für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld (A. Müller, 2000)

Modell 4: Keplersche Rotation mit Akkretion (Freifall-Gesetz nach *Cunningham*)

Im *Cunningham Modell* von 1975 [11] wird für die radiale Geschwindigkeitskomponente ein Freifall-Gesetz proportional zu $r^{-3/2}$ angenommen. Es hat für $r < r_{ms}$ die konkrete Form:

$$v^r = -\sqrt{\frac{2}{3r_{ms}}\left(\frac{r_{ms}}{r} - 1\right)^3} \quad (175)$$

Für $r > r_{ms}$ ist $v^r = 0$.

v^Φ ist weiterhin das oben beschriebene, modifizierte Kepler-Rotationsgesetz. v^θ ist Null. Ich stelle anhand Abbildung 31 fest:

- Das Gesetz zeigt ein sehr ähnliches Verhalten zu dem obigen Freifall-Gesetz $\propto r^{-1/2}$, jedoch fällt es sehr viel schneller ab mit $\propto r^{-3/2}$: Die Scheibenbilder in *g* zeigen in den Simulationen eine stärkere Rötung am Innenrand für *Cunninghams* Gesetz.
- ein fundamentaler Unterschied ist der Wirkungsbereich beider radialer Driften: während *Cunninghams* Gesetz am Radius marginaler Stabilität eine verschwindende radiale Drift nach sich zieht, ist sie in dem von mir verwendeten Gesetz über den gesamten Scheibenbereich ungleich null, aber gering bei großen Radien. Als Folge ist für *Cunninghams* Gesetz die blaue Flanke stärker ausgeprägt, weil blaue Segmente im äußeren Bereich der Scheibe nicht durch die radiale Drift gerötet werden.
- Rotation des Schwarzen Loches verschiebt auch hier die Linie tendenziell nach links.
- Eine wachsende Skalierung der radialen Drift nach *Cunningham* erhöht den roten Flügel der Linie und rote Sub-Maxima.
- große Inklinationen: Das rote Nebenmaximum wird abgesenkt.
- Bei maximaler Skalierung ist das blaue Hauptmaximum dominant, aber auch rote Nebenmaxima treten deutlich hervor.

Ich möchte anmerken, dass ein Doppelhöcker-Profil wie es die mittlere violette Linie zeigt, bei dem stellaren Objekt *GRO J1655-40* angewendet werden könnte. In Kapitel 5.5 beschreibe ich diese Quelle detailliert.

Modell 5: Keplersche Rotation und Einflüsse auf koronalen Bögen

In diesem Modell verschwindet verglichen mit den Modellen 3 und 4 nun die Komponente v^θ nicht, wie in Modell 2. Ich berücksichtige hier die Einflüsse in einer komplizierteren Art und Weise: das Plasma bewegt sich auf koronalen Bögen. Die Bewegung ist eine Überlagerung aus radialer Drift (v^r), die auf das Schwarze Loch gerichtet ist und einer Komponente senkrecht dazu (v^θ), die Materie aus der Scheibenebene hinaus transportiert. Die Approximation einer geometrisch dünnen Scheibe kann bei solchen Geschwindigkeitsfeldern verletzt werden. Der Anwender kann über die Stärkekoeffizienten q (Akkretion) und c (Ausflüsse) steuern, wie sehr jeweils die Effekte eingehen. Es sei angemerkt, dass nach wie vor $q < 0$ gilt.

Zunächst möchte ich die Scheibenbilder diskutieren. Abbildung 32 zeigt eine Gegenüberstellung von schwacher (linke Spalte) zu starker radialer Komponente (rechte Spalte) in der Schwarzschild-Metrik, dargestellt in der Rotverschiebung *g*. Als Inklination wähle ich einen üblichen Wert von $i = 30^\circ$, der Innenradius ist an der marginal stabilen Bahn $r_{in} = 6$. Von unten nach oben wächst nun der Einfluss der poloidalen Komponente, indem ich c erhöhe. Man erkennt, dass

- die sukzessive Erhöhung von c beiderseits blaue Segmente der Scheibe vergrößert: die Struktur der Scheibe gesehen in der Rotverschiebung wird, verglichen mit Standard-Modellen, sehr bizarr. Blaue Zonen bilden sich aus, die die Scheibe dominieren können.
- blaue Bereiche stark hervortreten, wenn die radiale Drift schwach ist. Die Ausflüsse, die senkrecht von der Scheibe abströmen, 'nähren' die blauverschobenen Gebiete.
- die konkurrierende, starke, radiale Drift die poloidalen Ausflüsse dominieren kann und so blaue Gebiete verkleinert werden. Die Materie fällt so schnell in das Schwarze Loch, dass poloidale Geschwindigkeitskomponenten fast irrelevant werden: in der rechten Spalte ist die Blauverschiebung stark unterdrückt.

Die Temperatur-Scheibenbilder enthalten bei weitem nicht soviel Information, wie die der Rotverschiebung, wie Abbildung 33 illustriert. Man erkennt lediglich, dass die Temperatur erwartungsgemäß höher direkt in der Nähe des Horizontes ist. Die linke Spalte zeigt durchweg heißere Regionen im Innern. Die Abbildungen 34 und 35 zeigen nun die entsprechenden Linienansätze zu den oben besprochenen Scheibenbildern. Sie bestätigen die obige Aussage, dass eine schwache, radiale Drift und starke, poloidale Komponenten weit nach rechts verschobene Linien zur Folge haben und sogar weitere Spitzen am blauen Flügel der Linie zu sehen sind. Bei starker Drift wird dieser Effekt reduziert: die Linien erscheinen unterdrückt an der blauen Flanke und zeigen einen intensiven, roten Ast.

Ich diagnostiziere im weiteren:

- Die Hinzunahme von poloidalen Einflüssen setzt weiter Nebenmaxima auf die blaue Schulter. Sogar Zwillingsmaxima können am blauen Ende auftreten.
- Kleine Inklinationen:
Die üblichen Zwei-Peak-Strukturen werden sichtbar.
- Große Inklinationen:
Senkrecht abströmen geringer Stärke ändert wenig im Vergleich zu Modell 3. Große Stärken heben den blauen Ast an, der meist 'Stufen- oder Buckelstrukturen' trägt.
- Bei kleinen Inklinationen und wachsender Rotation des Schwarzen Loches sieht man ein ausgeprägtes, spitzes, blaues Maximum.
- Vergleichbare Stärken von r - zu θ -Komponente der Geschwindigkeit lassen die Liniencharakteristik wie in Modell 3 erscheinen.

Für die folgenden Fälle rotiert das Schwarze Loch nun fast maximal. Wie die Linienprofile zeigen ändert sich nichts Gravierendes und das oben Gesagte bleibt gültig. Allerdings wird der maximale Fluss-Wert weiter gesteigert, weil Beaming nahe am Horizont den blauen Flügel intensiviert. Für einen letzten Kerr-Fall beginnt die Scheibe bei $1 r_g$ und endet bei $20 r_g$. Ich wähle beide Stärke-Koeffizienten q und c jeweils identisch, einmal 0.2, dann 0.8. Abbildung 38 zeigt die Verhältnisse bei einer Inklination von 30° . Die Linie wird deutlich 'blauer', wenn man die Stärke-Koeffizienten erhöht. Der blaue Ast zeigt dann einen engen, scharfen Peak; das rote Nebenmaximum ist auch zu hohen Energien verschoben und hebt sich deutlich ab.

radiale Drift: Cunningham-Gesetz vs. Freier Fall

Fe Emission Line Profile

$a = 0.001$
 $i = 30$
 $r_{in} = 1$
 $r_{out} = 50$
 $r_{step} = 0.005$
 $\alpha = 3.0$
 $res = 0.005$
 $v_{theta} = 0.0$

Cunningham-Gesetz mit
 $v_r = -\sqrt{1/9 * \text{pow}(6/r-1, 3)}$
 für $r < 6$

$q=0.3, p=0.5, r_{br}=50$

$q=0.9, p=0.5, r_{br}=50$

$v_r = -q * (r/r_H, -p)$
 für $r < r_{br}$

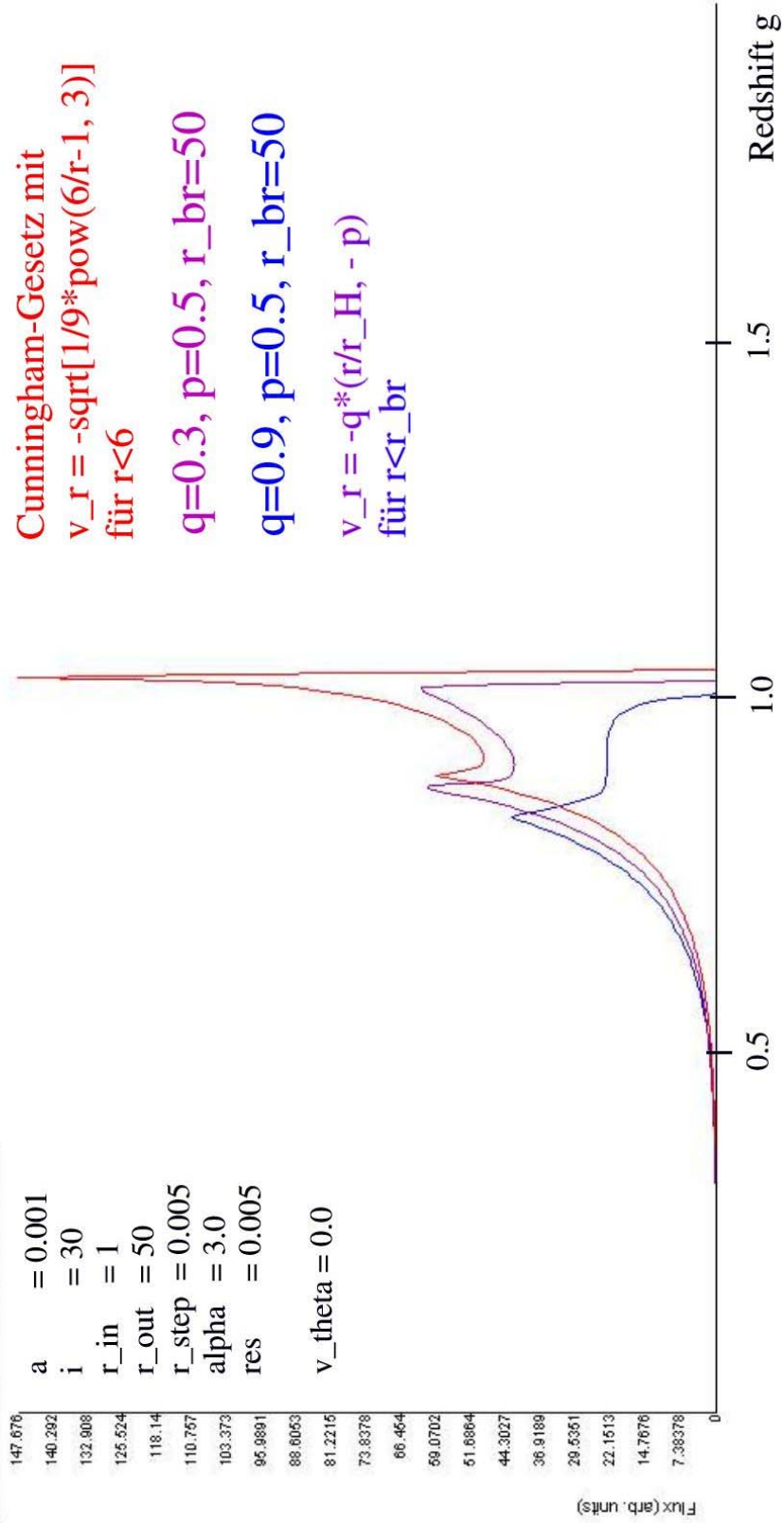


Abbildung 31: Simulierte Linienprofile mit Akkretion nach *Cunningham* (rot) verglichen mit freiem Fall (violett und blau) in der Schwarzschild-Metrik. (*A. Müller, 2000*)

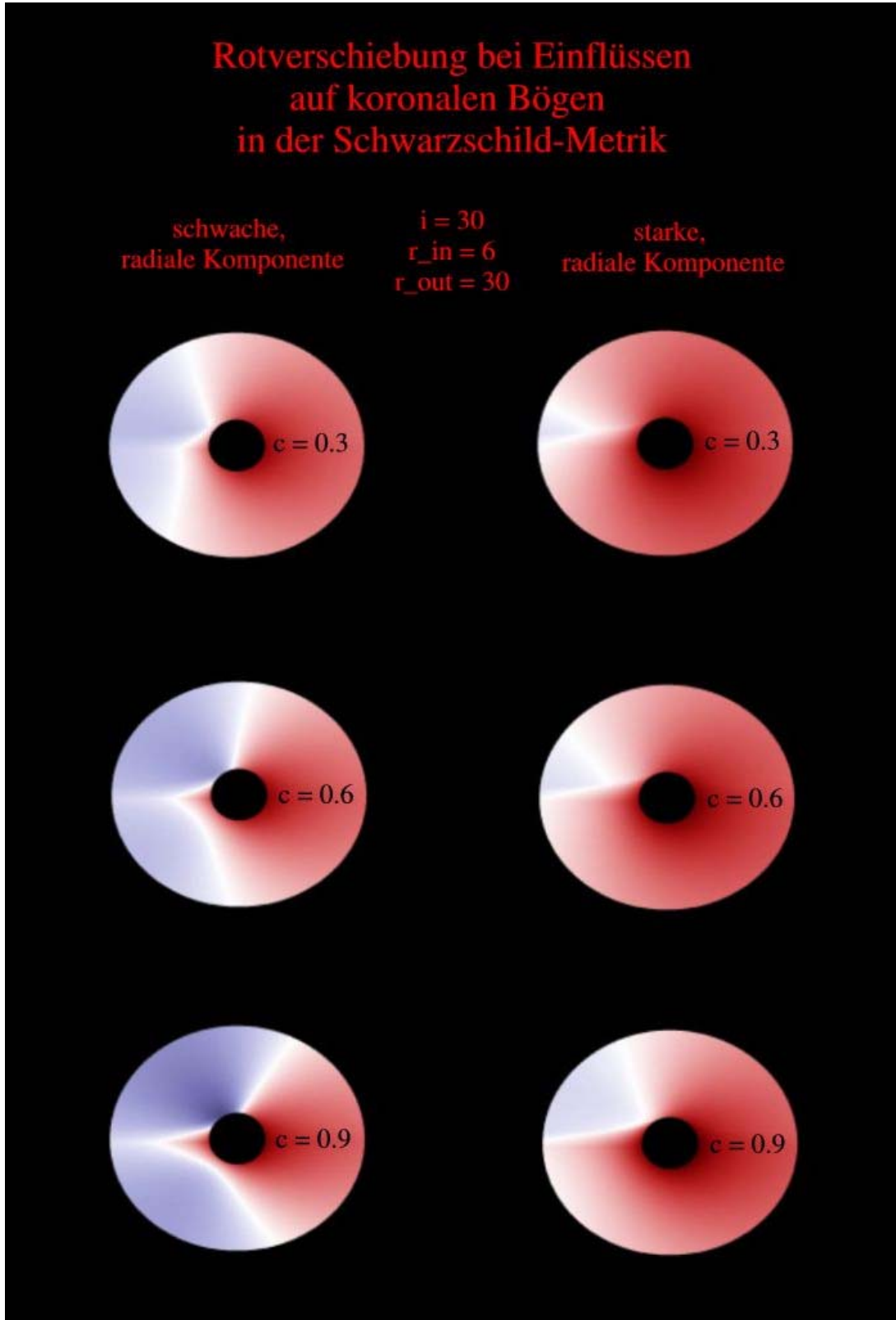


Abbildung 32: Simulierte Scheibenbilder, farbkodiert durch den Rotverschiebungsfaktor bei verschieden starken poloidalen Einflüssen und schwacher (links) sowie starker v^r -Komponente (rechts) für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (*A. Müller, 2000*)

Temperatur bei Einflüssen auf koronalen Bögen in der Schwarzschild-Metrik

schwache,
radiale Komponente
 $i = 30$
 $r_{\text{in}} = 6$
 $r_{\text{out}} = 30$
starke,
radiale Komponente



Abbildung 33: Simulierte Scheibenbilder, farbkodiert durch die Temperatur bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen und schwacher (links) sowie starker v^r -Komponente (rechts) für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (*A. Müller, 2000*)

schwache Einflüsse auf koronalen Bögen in Schwarzschild

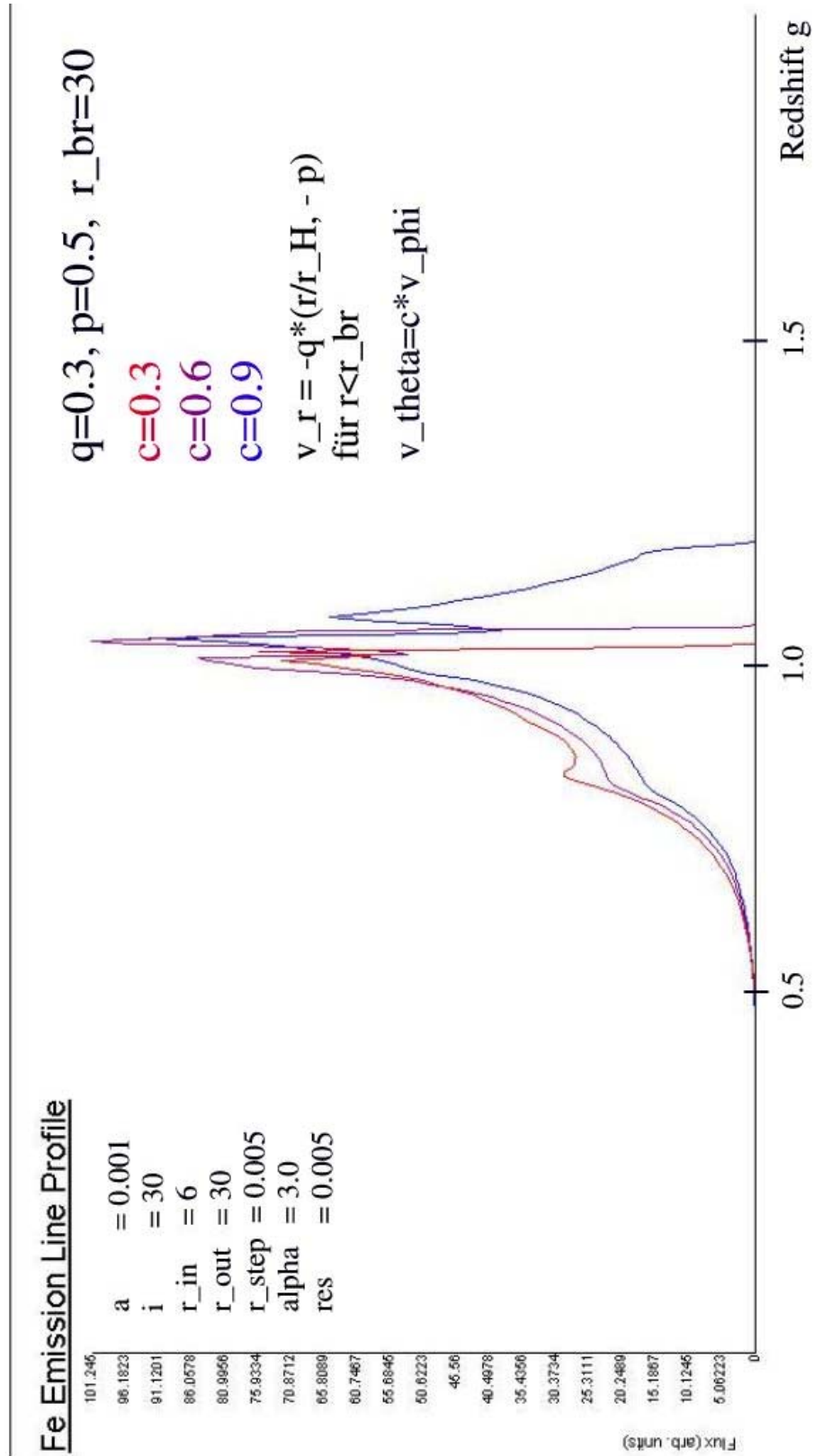


Abbildung 34: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen und schwacher, radialer Drift für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (A. Müller, 2000)

starke Einflüsse auf koronalen Bögen in Schwarzschild

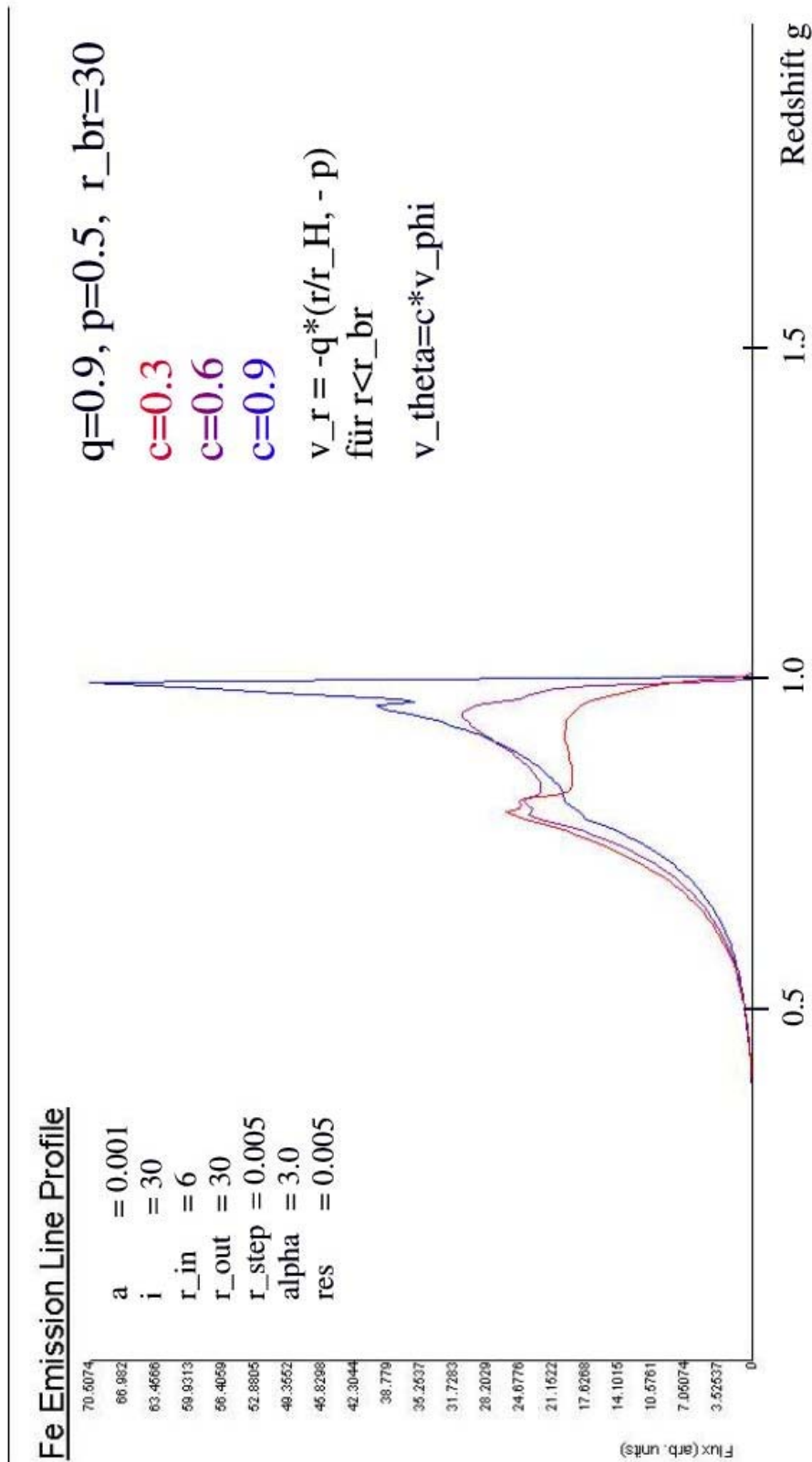


Abbildung 35: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen und starker, radialer Drift für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (A. Müller, 2000)

schwache Einflüsse auf koronalen Bögen in Kerr

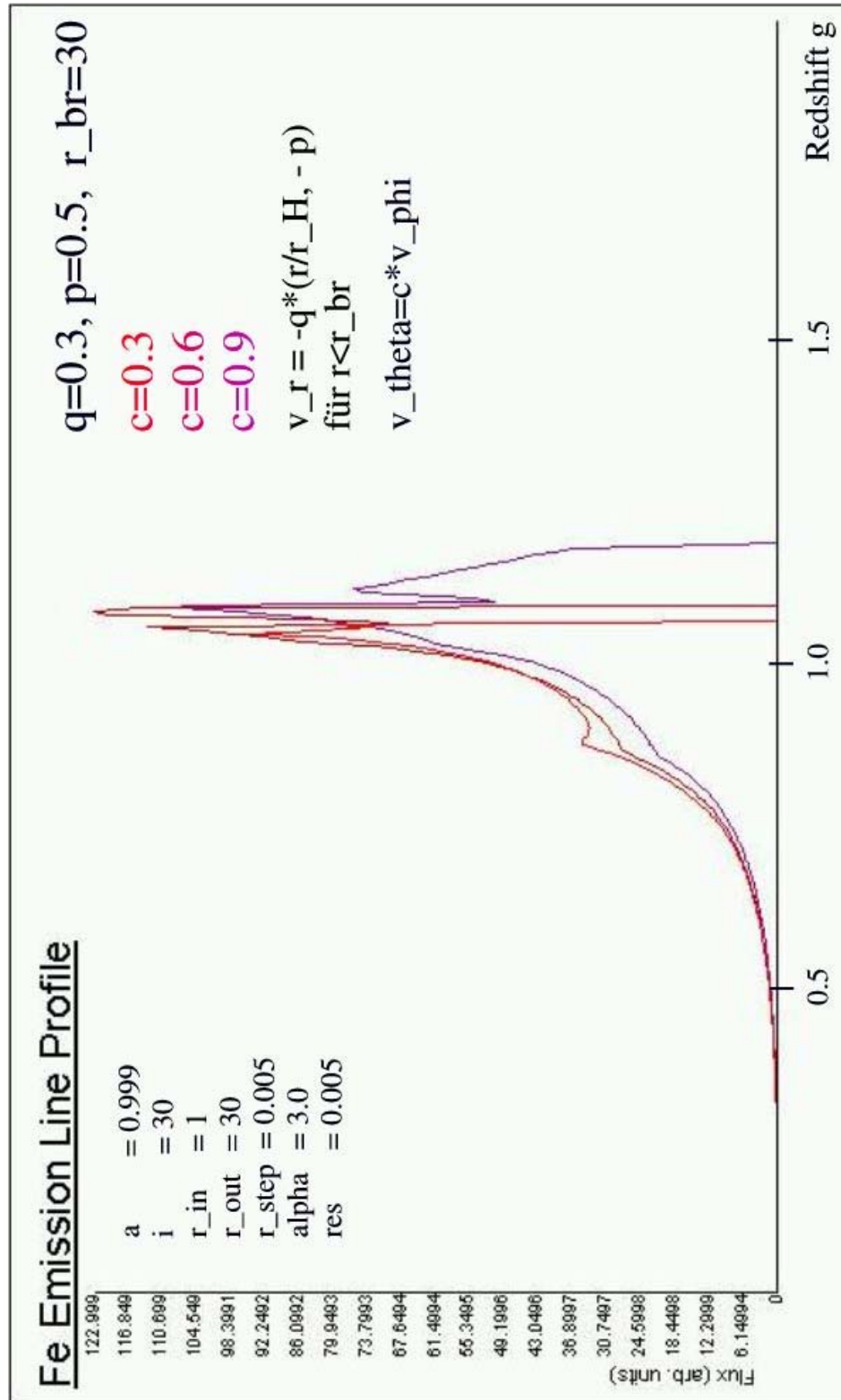


Abbildung 36: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen und schwacher, radialer Drift für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (A. Müller, 2000)

starke Einflüsse auf koronalen Bögen in Kerr

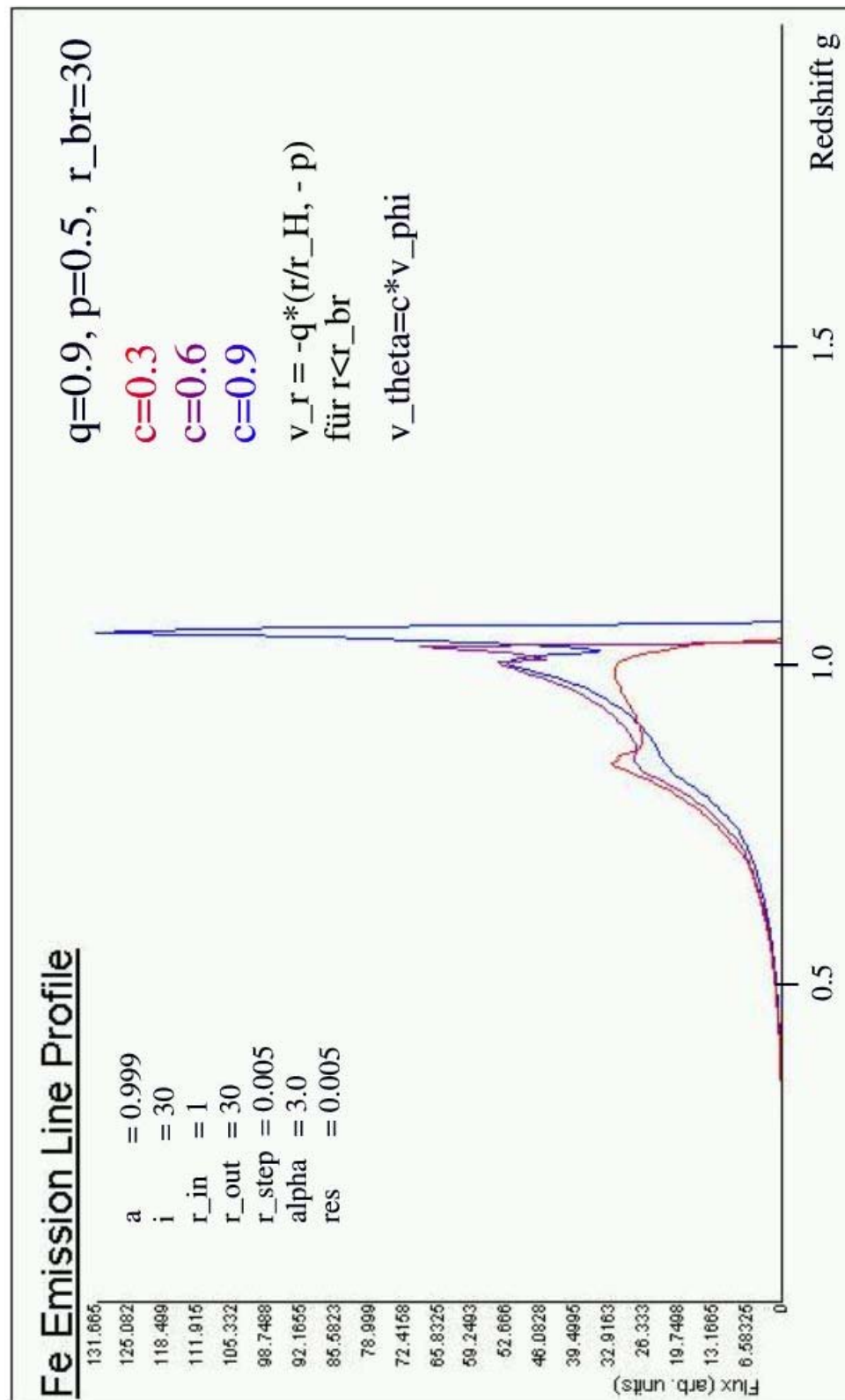


Abbildung 37: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen und starker, radialer Komponente für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (A. Müller, 2000)

Einflüsse auf koronalen Bögen in Kerr

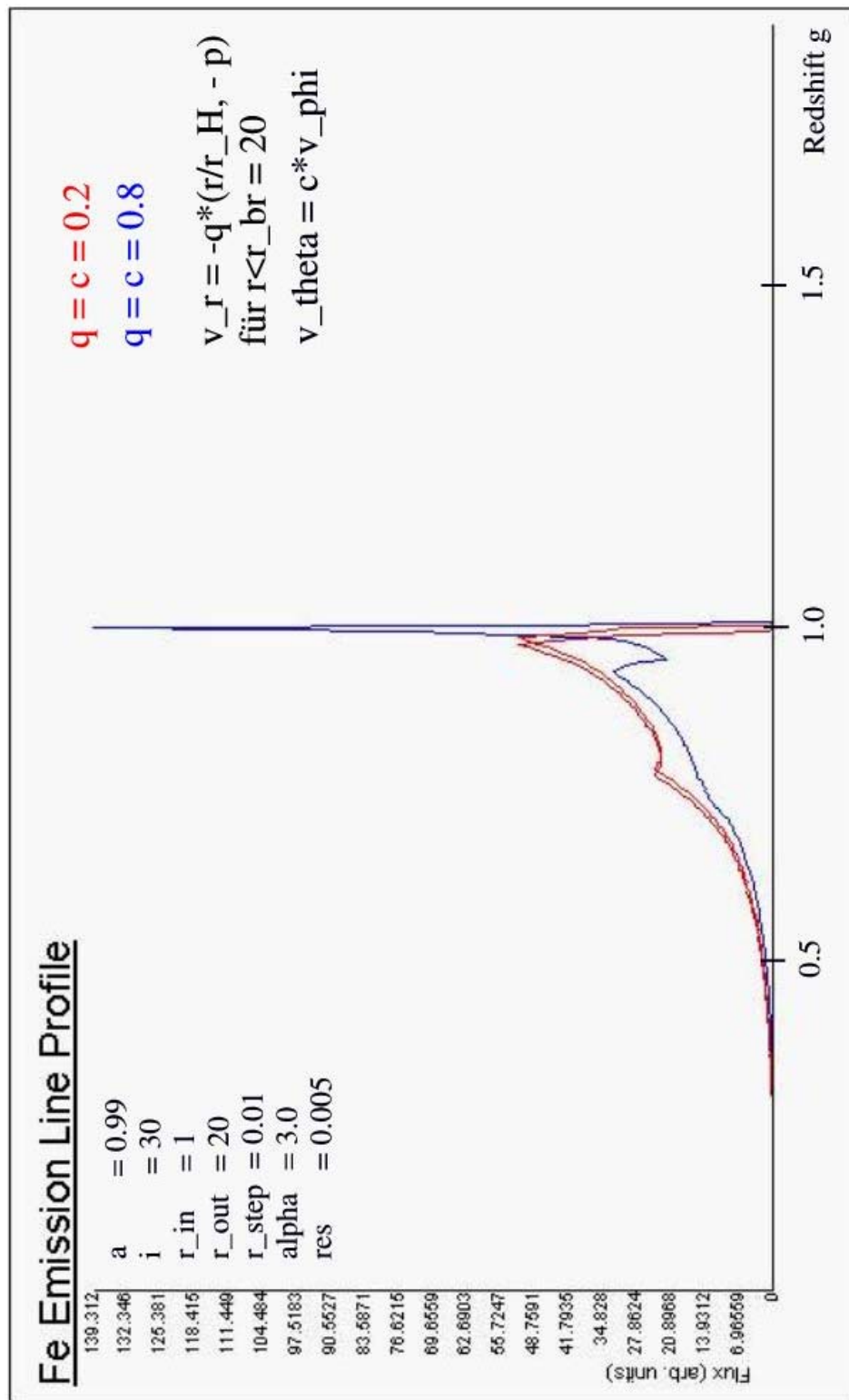


Abbildung 38: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Einflüssen für den Kerr-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (A. Müller, 2000)

Modell 6: Keplersche Rotation mit poloidalen Ausflüssen

Hier ändert, verglichen mit Modell 5, nun die radiale Geschwindigkeitskomponente ihr Vorzeichen: $v^r > 0$; die Komponente v^θ bleibt in gleicher Form bestehen. Ich berücksichtige also nun die Jets/Winde in Form von poloidalen Ausflüssen.

Abbildung 39 zeigt eine Gegenüberstellung der Scheibenbilder von schwacher (linke Spalte) zu starker, radialer Komponente (rechte Spalte) in der Schwarzschild-Metrik, dargestellt in der Rotverschiebung g . Als Inklination wähle ich wiederum $i = 30^\circ$, der Innenradius ist an der marginal stabilen Bahn $r_{in} = 6 r_g$. Von oben nach unten wächst nun der Einfluss der θ -Komponente, indem ich c erhöhe. Ich subsummiere, dass

- bei diesem Modell besonders blaue Scheiben resultieren, weil das eingehende Geschwindigkeitsfeld vom Schwarzen Loch weg und mehr auf den Beobachter zeigt.
- die Erhöhung von c beiderseits blaue Segmente der Scheibe vergrößert, wie schon in Modell 5.
- ein erhöhtes radiales Ausströmen die Scheibe im linken Bereich wieder rötet (siehe rechte Spalte).

Die Abbildungen 40 und 41 zeigen nun die Liniensätze. Alle Linien sind weit nach rechts verschoben, weil sämtliche Scheiben nun signifikant blauer sind. Wie man im direkten Vergleich sieht, wird das Linienprofil für $q = 0.9$ **in beide Richtungen** verbreitert! Der rote Flügel reicht zu kleineren Werten von g , während der blaue Flügel weit in Form einer Schulter über Werte von $g = 1.5$ (entsprechend 9.6 keV bei $E_0 = 6.4$ keV) hinaus gezogen ist. Dies war bereits bei den Scheibenbildern 39 abzusehen: dort zeigt die linke Spalte einerseits ein größeres, rotes Segment links vom Schwarzen Loch und andererseits rechts davon eine tiefere Blaufärbung. Physikalisch wird dies dadurch plausibel, weil die Materie geradezu hinausgeschleudert wird und sich auf poloidalen Bahnen auf den Beobachter zu bewegt.

Ich habe hier nur exemplarisch den Schwarzschild-Fall vorgestellt, weil eine Rotation des Schwarzen Loches die Verhältnisse unwesentlich ändert: die Tendenzen bei den Linienformen bleiben bestehen.

Rotverschiebung bei radialen und poloidalen Ausflüssen in der Schwarzschild-Metrik

schwache,
radiale Komponente

$i = 30$
 $r_{\text{in}} = 6$
 $r_{\text{out}} = 30$

starke,
radiale Komponente

$q = 0.3$

$q = 0.9$

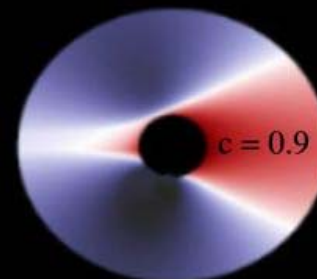
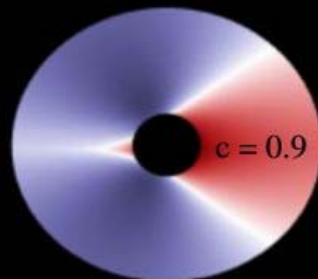
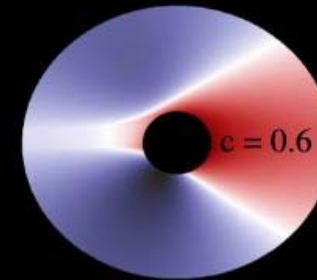
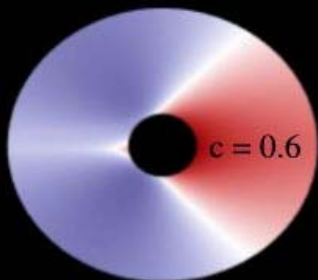
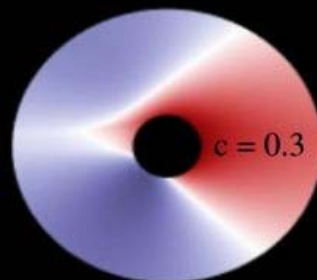
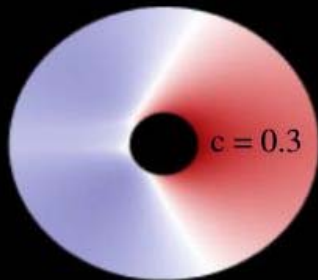


Abbildung 39: Simulierte Scheibenbilder, farbkodiert durch den Rotverschiebungsfaktor bei verschiedenen starken poloidalen Ausflüssen und schwachem (links) sowie starkem, radialen Ausfluss (rechts) für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination beträgt 30° . (*A. Müller, 2000*)

schwache radiale und poloidale Ausflüsse in Schwarzschild

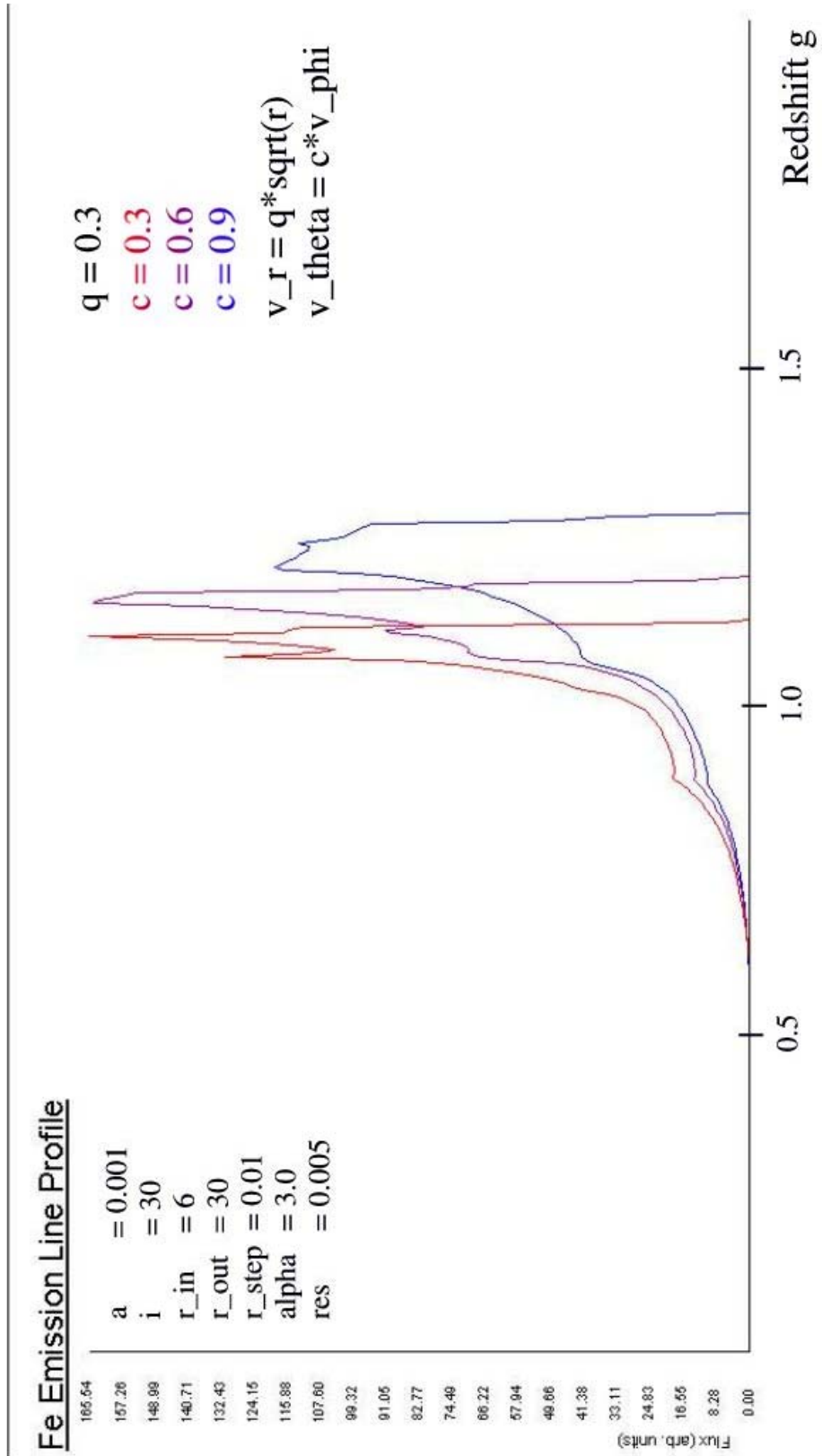


Abbildung 40: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Ausflüssen und schwachem, radialen Ausfluss für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Kepler-schen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (*A. Müller, 2000*)

starke radiale und poloidale Ausflüsse in Schwarzschild

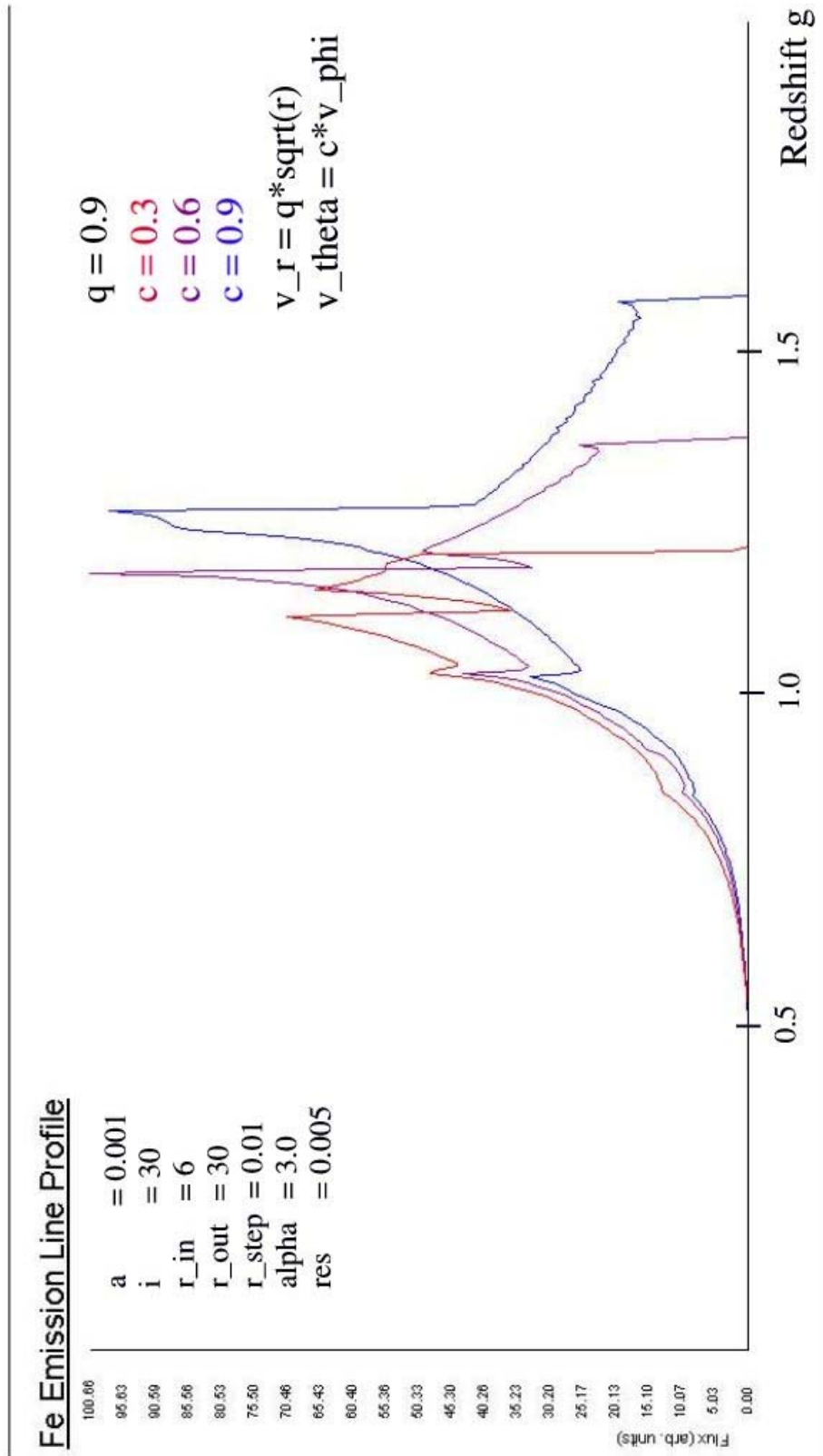


Abbildung 41: Simulierte Linienprofile bei verschiedenen starken poloidalen Ausflüssen und starkem, radialen Ausfluss für den Schwarzschild-Fall bei einem zusätzlichen Keplerschen Geschwindigkeitsfeld. Die Inklination ist 30° . (*A. Müller, 2000*)

5.4 Alternative Modelle

In diesem Abschnitt möchte ich verfolgen, wie zuverlässig dieses favorisierte Modell von der Linienentstehung in unmittelbarer Nähe von einem rotierenden Schwarzen Loch ist. Die ersten Daten, die man durch ASCA gewonnen hat, häuften sich speziell bei der Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 in ausreichendem Maße an und konnten als Test für diverse Alternativen gebraucht werden. So testeten *Fabian et. al (1995)* [19], ob Comptonisierung durch eine heiße, ionisierte Korona-Wolke eine Alternative für die Ausbildung solcher breiten Emissionslinien sein könnten. Diese Idee wurde wieder aufgegriffen von *Misra & Kembhavi (1998)* [43] und *Misra & Sutaria (1999)* [44]. Ihr Argument bestand darin, dass das Spektrum aus einer engen Linie überlagert mit dem harten Potenz-Gesetz bestünde und eine umgebende Wolke mit einer optischen Tiefe $\tau \sim 4$ die breite Linie formen würde. Die Comptonisierungs-Wolke müsste den Anforderungen genügen, dass sie kalt ($kT < 0.5 \text{ keV}$) sein müsste, um die Linien-Photonen eher zu kleineren als zu höheren Energien zu streuen, aber auch dass sie vollständig ionisiert sein müsste, weil keine starken Absorptionskanten von Eisen beobachtbar sind. Das Postulat, dass die Kontinuumsquelle eine sehr leuchtkräftige optische/UV Komponente habe, hätte diese Eigenschaften ermöglicht.

Nun gibt es aber gute Argumente gegen ein solches Alternativ-Modell:

- Die harte Primärstrahlung sollte auch die Wolke mit optischer Tiefe $\tau \sim 4$ passieren, was sich in einem Einbruch im Spektrum bei etwa $E_{br} \sim m_e c^2 / \tau^2 \sim 30 \text{ keV}$ bemerkbar machen sollte. Weder BeppoSax noch RXTE konnten dies beobachten.
- Variabilität und Ionisation limitieren die Größe der Comptonisierungs-Wolke in MCG-6-30-15 auf $R < 10^{12} \text{ cm}$. Nun muss der Ionisationsparameter $\xi \propto 1/R$ groß genug sein, um alle Metalle der Wolke vollständig zu ionisieren. Im Falle von MCG-6-30-15 würde diese Beschränkung durch obiges Postulat die Grenze eines Schwarzkörpers verletzen (*Reynolds & Wilms, 2000* [53]).

Aus diesen Gründen reicht Comptonisierung als Mechanismus für die Verbreiterung der Emissionslinie nicht aus. Zudem könnte sie nicht die an vielen Quellen beobachtete Asymmetrie der Linie erklären.

Skibo (1997) [61] schlug eine weitere Alternative vor, nämlich dass hochenergetische Photonen das Eisen auf der Scheibenoberfläche in Chrom oder andere Elemente mit kleinerem Z über Kernspaltung verwandeln könnten. Dies würde nach Abbildung 5 die Palette fluoreszierender Materialien erweitern und so durch eine Häufung bzw. Mischung von Linien insgesamt das Profil verbreitern, das sogar der Forderung nach Asymmetrie genügen könnte. Bei dieser Alternative gibt es theoretische wie beobachtungstechnische Bedenken:

- Einerseits müssen die hochenergetischen Photonen irgendwo produziert werden und die innere Region der Akkretionsscheibe mit hoher Effizienz erreichen können.
- Andererseits reicht die Auflösung von ASCA (und erst recht die von Chandra) aus, um mögliche separierte Linien trennen zu können, was aber nicht beobachtet wurde.

Auch eine zusätzliche Doppler-Verbreiterung würde dieses Dilemma nicht lösen, weshalb diese gute, aber kühne Idee ebenfalls verworfen werden muss.

Andere Spekulationen wurden nicht ernsthaft in Erwägung gezogen. Was bleibt, ist also eine Emissionslinien-Modell, das sehr gut an die Daten angepasst werden kann.

Dabrowski et al. 1997 Die Kollaboration um *Dabrowski* [35] wählte einen alternativen Zugang über die so genannte *Spacetime Algebra (STA)*, einer *Raumzeit-Algebra*. Erste Arbeiten gehen auf *Lasenby, Doran* und *Gull* ab 1994 zurück [34]. Es handelt sich dabei im Prinzip um einen Zugang über die Eichtheorie der Gravitation. Durch die Einführung von Eichfeldern auf

dem Hintergrund der flachen Minkowski-Raumzeit, wendet die Gruppe diese Theorie auf rotierende, astrophysikalische Systeme, wie einem Schwarzes Loch-Scheiben-System in AGN an. Die volle Basis der STA sind die γ -Matrizen, wie sie aus der Quantenfeldtheorie bekannt sind. Die grundlegende Idee ist es, die Algebra der Skalare auf eine solche von Vektoren auszudehnen. Dies geschieht mit dem Formalismus der *Clifford Algebra*. Mit deren Hilfe gelingt eine Formulierung der Einsteinschen Gleichungen auf der Basis der STA. Letztendlich führt diese Behandlung auf die Geodäten-Gleichung in der Kerr-Metrik, die durch direkte Integration auf einer *Cray* gelöst wurde. Die Linienkalkulation mit verschiedenen Eingabeparametern zeigt Abbildung 42. Der Innenradius wurde für alle Berechnungen bei $2.5 r_g$ festgehalten. Das radiale Emissivitätsgesetz wurde sogar als einfaches Potenz-Gesetz abgeleitet (siehe noch einmal Abbildung 16)! Die Linienprofile zeigen, dass

- die Emissionslinie bei kleinen Inklinationen (linke Spalte im Bild) sehr eng und scharf wird. Der Beobachter schaut dann genau senkrecht auf die Scheibe und sieht kaum rotverschobene Anteile in der Linie. Sie erscheint dem entfernten Beobachter fast genauso wie im Ruhesystem des emittierenden Plasmas.
- der rote Peak bei hohen Inklinationen sichtbar wird (im Bild von links nach rechts). Der Beobachter schaut dann fast genau in die Scheibenebene, und es gibt Teile, die auf ihn zu oder von ihm weg rotieren.
- die Gravitationsrotverschiebung besonders beim sehr schnell rotierenden Schwarzen Loch und bei hoher Inklination (rechts oben im Bild) sehr ausgeprägt ist. Den Photonen wird es hier besonders erschwert dem Anziehungsbereich des Kerr-Loches zu entkommen.
- der blaue Peak immer durch den Effekt des Beamings sehr ausgeprägt ist, unabhängig von Rotation und Inklination. *Dabrowski et al.* konnten genauso wenig wie ich eine Emissionslinie produzieren, wo der blaue Ast stark unterdrückt ist. Dies war jedoch ein Resultat von *Fanton et al. (1998)* [20]!

Die Vorhersagen von *Dabrowski et al.* erscheinen sehr plausibel und können sowohl von *Fanton et al. (1997)* [22], als auch von mir bestätigt werden. Die Quelle MCG-6-30-15, die sehr detailliert mit ASCA untersucht wurde stützt das Modell der *Dabrowski*-Kollaboration.

Emissionslinienprofile selbstgravitierender Tori um Schwarze

Löcher - Usui, Nishida & Eriguchi (1998) Die Gruppe um *Usui et al.* [66] wählte eine andere Geometrie als üblicherweise angenommen: keine flache Scheibe, sondern einen Torus, dessen Eigengravitation zudem berücksichtigt wurde. Sie verwendeten ebenfalls rekursives Ray-Tracing, jedoch in einer verallgemeinerten Geometrie, weil der massebehaftete Torus die Metrik beeinflusst, so dass das Schwarze Loch im Zentrum weder vom Schwarzschild-Typ noch vom Kerr-Typ ist (*Nishida & Eriguchi, 1994* [46]). Das Linienelement muss daher in einer *pseudo-isotropischen* Form verwendet werden:

$$ds^2 = -e^{2\Psi} dt^2 + e^{2\zeta} r^2 \sin^2 \theta (d\Phi - \omega dt)^2 + e^{2\xi} \left(\frac{1}{1 - \frac{2M}{r} + \frac{J^2}{(Mr)^2}} dr^2 + r^2 d\theta^2 \right) \quad (176)$$

Als Zustandsgleichung für die Materie im Torus wurde eine *Polytropsen-Gleichung* angenommen, wie sie aus der Theorie der Sternatmosphären bekannt ist:

$$p = K \rho^{1+\frac{1}{N}}, \quad \epsilon = \rho + Np, \quad (177)$$

dabei sind p, ρ, ϵ, N und K der Druck, die Ruhemassendichte, die Energiedichte, der Polytropenindex und eine Konstante. Der Polytropenindex wurde zu $N = 3$ gewählt. Der numerische Code

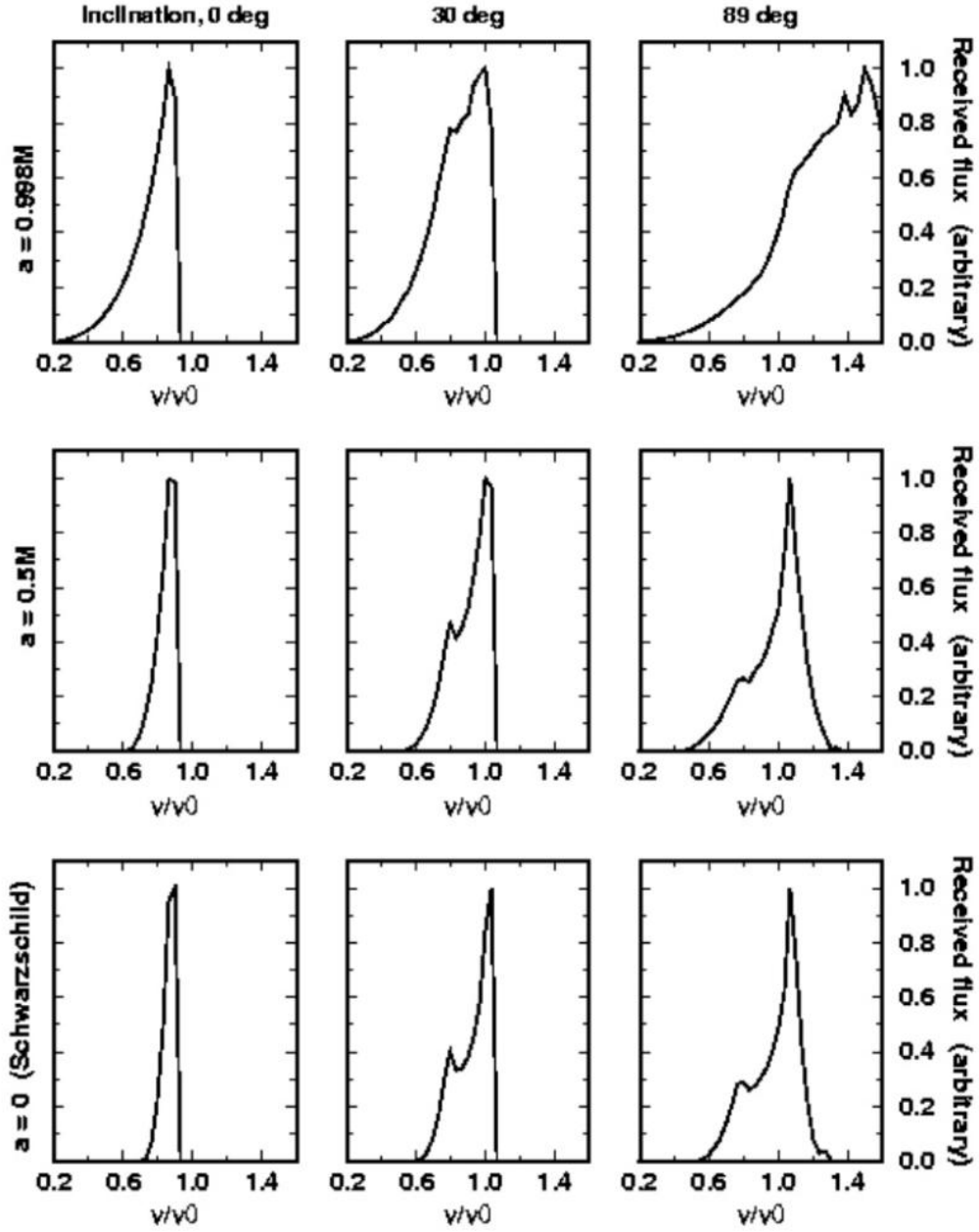


Abbildung 42: Kalkulierte Linienprofile der *Dabrowski-Kollaboration* (1997) [35] mit Hilfe der STA wie sie ein entfernter Beobachter wahrnimmt. Die linke Spalte zeigt Inklinationen von 0° , in der Mitte 30° und rechts 89° . Von unten nach oben nimmt die Rotation des Schwarzen Loches zu: $a = 0.0, 0.5, 0.998$

von *Nishida & Eriguchi (1994)* integriert direkt die Geodäten-Gleichung für Photonen, wie sie zum Beispiel in der affinen Form (50) notiert ist. Die Methode ist im weiteren Verlauf des Algorithmus identisch: es wird monochromatische Emission sowie ein radiales Emissivitätsgesetz in Form eines einfachen Potenz-Gesetzes angenommen und schließlich das Fluss-Integral bestimmt.

Es sei angemerkt, dass das Rotationsgesetz eines rotierenden Toroids aufgrund seiner Geometrie **nicht Keplersch** ist! Aus diesem Grund, können Tori viel näher an das Schwarze Loch reichen, als der Radius marginaler Stabilität einer Keplerschen Scheibe. Zum anderen wurden bei diesen Rechnungen die Beobachter sehr nahe beim Schwarzes Loch-Torus-System angenommen, nämlich $10.5 r_H$, mit r_H dem Horisonradius des Schwarzen Loches. In Abbildung 43 zeige ich die Ergebnisse berechneter Linienprofile von *Usui et al.* Die Linien zeigen meist ein dreieckiges Profil, wie die Emissionslinien des Standard-Modells nach *Fabian et al.* Allerdings können spezielle Strukturen im blauen Ast, wie zum Beispiel Stufen oder 'Schultern', die bei diversen Quellen beobachtet werden, nicht reproduziert werden. Außerdem muss eine Modifikation durchgeführt werden, die den Beobachter im Unendlichen lokalisiert. Dies dürfte weitere Änderungen am Linienprofil nach sich ziehen. Allerdings zeigt dieses Modell, wie ausgedehnte Strukturen, die darüber hinaus selbstgravitierend sind, charakteristische Linienformen bilden, die jedoch nicht wesentlich von den Profilen üblicher Modelle abweichen.

Emissionslinienprofile verformter Akkretionsscheiben - Hartnoll & Blackman (1999) Es gibt noch weitere Freiheitsgrade, die man für die Linienemission berücksichtigen kann. So berücksichtigen *Hartnoll & Blackman* [27] eine nicht-flache Scheibe, die verformt (*twist-free warped disk*) und sogar in sich verdreht (*twisted warped disk*) sein kann (siehe Abbildung 44). Diese Effekte beruhen physikalisch darauf, dass diese Verformungen Strahlungsdruck-getrieben sind (*Wijers & Pringle 1999* [68]). Dies könnte beispielsweise für die bekannte, stellare Röntgenquelle Cyg X-1 der Fall sein. In solchen emittierenden Scheiben können Abschattungseffekte auftreten, die stark von der Inklination abhängen und zu ganz erstaunlichen Linienprofilen führen können. Zum anderen kommt zusätzlich zur Inklination ein Parameter hinzu: es ist wesentlich, von welcher Φ -Richtung aus der Beobachter in die x - y -Ebene der Scheibe hineinschaut. Die Autoren rechneten nur mit Schwarzen Löchern vom Schwarzschild-Typ und gingen davon aus, dass die Primärquelle harter Röntgenstrahlung auf der Symmetrieachse des Systems in einer Höhe von $10 r_g$ sitzt. Die Scheiben besitzen als Geschwindigkeitsfeld jedoch nur das Kepler-Gesetz für Rotation des Plasmas. Akkretion und Ausflüsse finden in diesem Modell **keine Berücksichtigung**. Der Algorithmus löst die Geodäten-Gleichung in der Schwarzschild-Metrik über ein Runge-Kutta-Integrationsverfahren. Als Außenradien für die Scheiben wurden recht große Werte von $r_{out} = 10^2, 10^3$ und $10^4 r_g$ angenommen. Als Inklinationen wurde jeweils ein Satz von $i = 10^\circ, 30^\circ$ und 70° betrachtet. Ich möchte ich nur eine kleine Auswahl an Linienprofilen vorstellen, die *Hartnoll & Blackman* berechnet haben. Abbildung 45 zeigt die Profile von in sich verdrehten Scheiben, während Abbildung 46 solche zeigt, die nur verbogen sind. Wie man sieht unterscheiden sich die Linienprofile klassischer Modelle auf eklatante Weise von solchen nicht-flacher Scheiben. So sind sehr scharfe Peaks und breite 'Buckel' anzutreffen, die den 'Linien-Zoo' erweitern. Neue Strukturen sind die blauen Flanken, für die es auch von der Beobachtung her Evidenzen gibt, wie ich bei der Quelle NGC 4151 diskutiert habe. Die Ambivalenz der Inklination, die ich bei *Wang et al. (1999)* [67] darstellen werde, könnte ebenfalls mit Hilfe verformter Scheiben ohne weiteres erklärt werden.

Nichtsdestoweniger zeigen die meisten Seyfert-1-Galaxien keine blauen Schultern, so dass für sie von den Autoren das Modell der *twisted warped* Scheiben eher ausgeschlossen wird. Allerdings ist für beobachtete Seyfert-2-Galaxien (*Turner et al. 1998* [65]), die nach dem Unifikationsmodell naturgemäß hohe Inklinationen haben, eine Ähnlichkeit mit den durchgezogenen Linien ($i = 70^\circ$) aus Abbildung 46 erkennbar: Die Linienstruktur ist stark herab gesenkt und zeigt einen schärferen Abfall am roten Flügel der Linie.

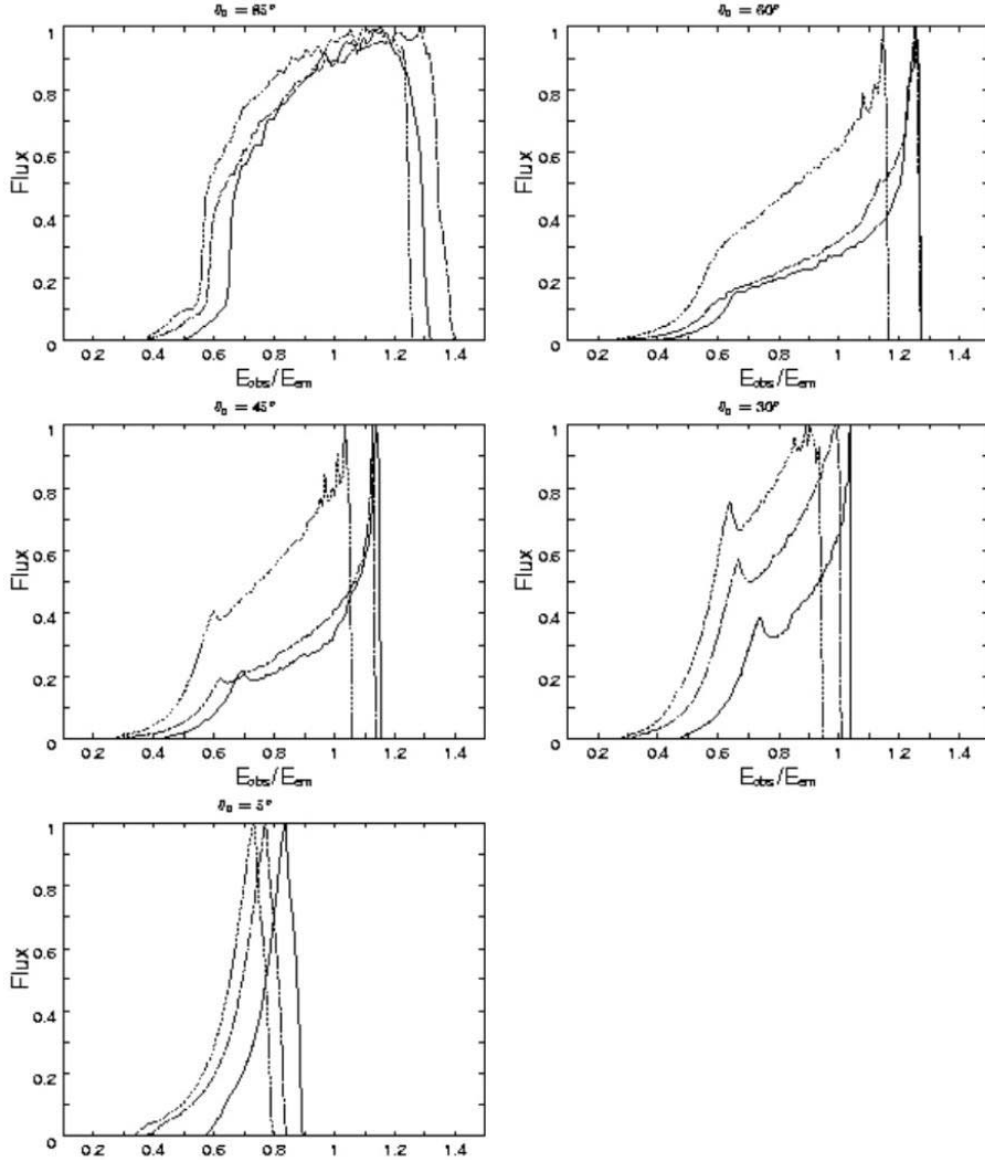


Table 1. Model parameters of toroid – black hole systems

Model	q	$J\varepsilon_0$	$M\varepsilon_0^{1/2}$	$\omega_H/\varepsilon_0^{1/2}$	J/M^2	r_{in}/r_H	r_{out}/r_H
A	1.2×10^{-2}	7.42×10^{-6}	6.23×10^{-3}	1.0×10^1	0.191	2.04	5.56
B	8.0×10^{-2}	3.86×10^{-4}	2.34×10^{-2}	1.0×10^1	0.706	1.37	4.59
C	4.9×10^{-1}	1.60×10^{-3}	4.61×10^{-2}	4.0	0.751	1.46	5.06

Abbildung 43: Kalkulierte Emissionslinien selbstgravitierender Tori um Schwarze Löcher nach *Usui et al.*. Dargestellt sind Modell A (durchgezogene Linie), B (gestrichelt-punktierte Linie) und C (punktierte Linie) für verschiedene Inklinationen θ_0 und einen Emissivitätsindex $s = -1$ (Modelle in Tabelle). (*Usui et al.*, 1998 [66])

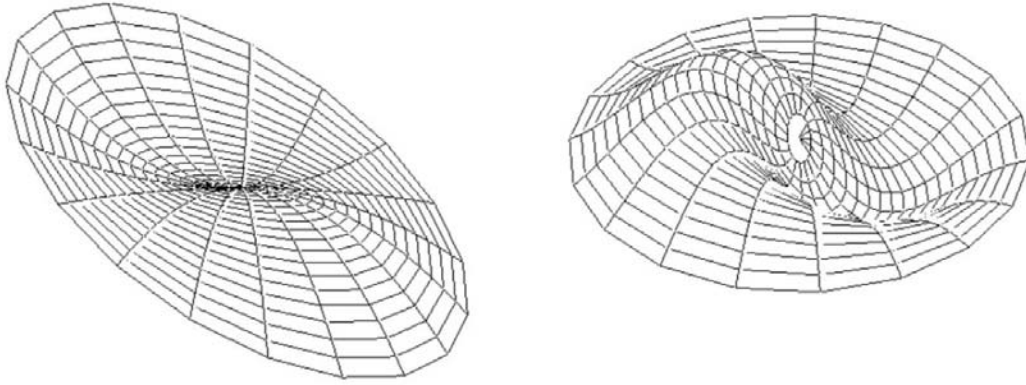


Abbildung 44: Geometrie nicht-flacher Scheiben: links *twist-free warped* Typus; rechts *twisted warped* Typus (Hartnoll & Blackman, 1999 [27])

Einige Linienprofile zeigen auch gerade bei hohen Inklinationen eine klare Doppelhöcker-Struktur (Abbildung 46, (c) und (g)), die Anlass zu der Vermutung gibt, dass zum Beispiel die stellare Quelle GRO J1655-40 durch *twisted-free* Scheiben beschrieben werden könnte.

Zum anderen zeigen die Diagramme (b) bis (d) in Abbildung 46 bei kleiner Inklinationen von 10° bis 30° eine ähnliche Form, wie sie bei der Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 beobachtet wurde: das so genannte 'tiefe Minimum'. Iwasawa *et al.* (1996) [32] erklärten dies durch Ionisationseffekte, während Hartnoll & Blackman hierfür eine solche verbogene Scheibe nahelegen, die im Inneren eher *face-on* und im Außenbereich der Scheibe eher *edge-on* orientiert sein möge. Abschließend kann man also sagen, dass verformte Scheiben den Parameterwald von Emissionslinienprofilen bereichern und für einige Quellen sicherlich in Erwägung zu ziehen sind. Es bleibt abzuwarten, ob mit dem besseren Auflösungsvermögen zukünftiger Röntgenobservatorien eine klare Aussage über die Scheiben-Geometrie gemacht werden kann, die zum Beispiel mit Methoden wie *reverberation mapping* oder Raumwinkel-Studien gewonnen werden könnten.

5.5 Vergleich mit Daten

Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15 - Misra *et al.* (1999) Das Objekt MCG-6-30-15 gehört zu den wohlbekannten Seyfert-1-Galaxien, die sehr genau untersucht wurden. Berühmt wurde sie dadurch, dass Tanaka *et al.* 1995 [64] hier erstmals die breite Eisen-Emissionslinie mit dem Röntgenobservatorium ASCA in einer 4.2 Tage dauernden Beobachtung messen konnten. Iwasawa *et al.* [32] wiederholten die Messung 1996 und bestätigten die breite Linienstruktur. Sie teilten die Daten in drei Gruppen: Low Intensity Data (LI), Medium Intensity Data (MI) und High Intensity Data (HI). Während drei Viertel der Beobachtungszeit blieb die Quelle im MI-Bereich. Misra *et al.* [44] haben nun diese ASCA-Daten, aber auch BeppoSax-Daten wieder aufgegriffen und sie nochmals analysiert. Sie zogen vom Gesamtspektrum das harte Potenz-Gesetz mit dem exponentiellen Cut-Off und die Reflexionskomponente ab, um ein Linienprofil zu extrahieren. Dazu verwendeten sie das PEXRAV-Modell nach Magdziarz & Zdziarski 1995 [37]. Die BeppoSax-Daten schließen das alternative Comptonisierungsmodell, das erstmals von Czerny, Zbyszewska & Raine 1991 formuliert wurde aus. Misra *et al.* verwendeten nun drei Modelle, um die Daten zu fitten:

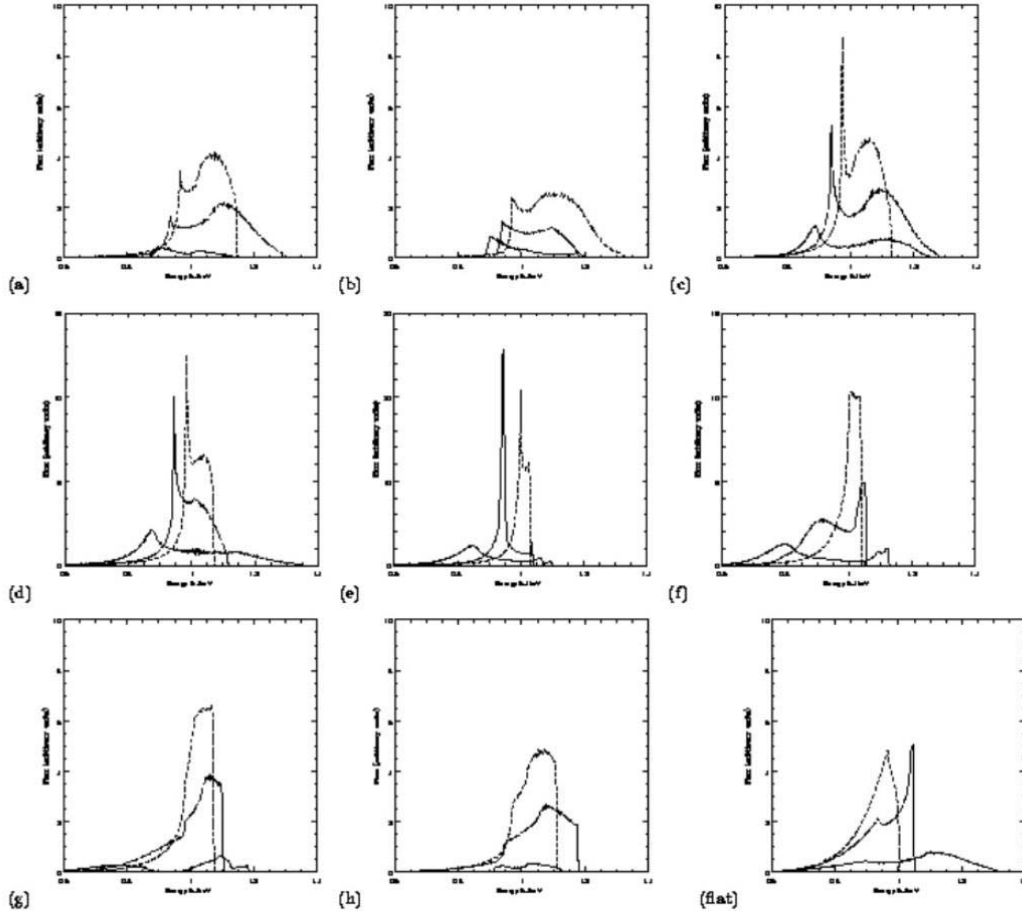


Abbildung 45: Berechnete Linienprofile von in sich verdrehten Scheiben; zum Vergleich rechts unten eine flache Scheibe. Die gestrichelten, punktierten und durchgezogenen Linien markieren Inklinationen von 10° , 30° und 70° bezogen auf die x - y -Ebene. Der Außenradius ist auf $10^2 r_g$ festgelegt. Man beachte unterschiedliche Skalierungen der y-Achse. Die Diagramme (a) bis (h) unterscheiden sich durch eine unterschiedliche Position des Beobachters in der Φ -Richtung: der Beobachter bewegt sich im Uhrzeigersinn zwischen den Winkeln $\Phi = 0$ bis $\Phi = 2\pi$ in 45° -Schritten um die Scheibe. (*Hartnoll & Blackman, 1998 [27]*)

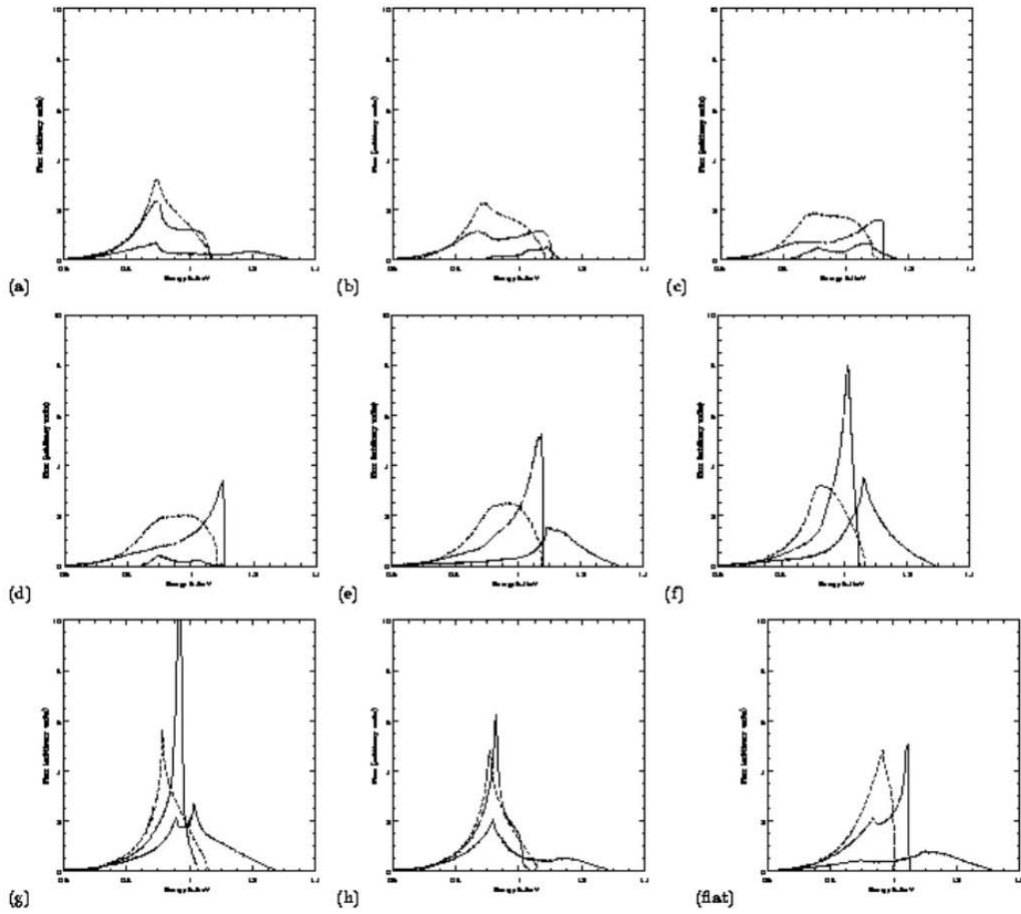


Abbildung 46: Berechnete Linienprofile von verbogenen Scheiben; zum Vergleich rechts unten eine flache Scheibe. Die gestrichelten, punktierten und durchgezogenen Linien markieren Inklinierungen von 10° , 30° und 70° bezogen auf die x - y -Ebene. Der Außenradius ist auf $10^3 r_g$ festgelegt. Man beachte unterschiedliche Skalierungen der y-Achse. Die Diagramme (a) bis (h) unterscheiden sich durch eine unterschiedliche Position des Beobachters in der Φ -Richtung: der Beobachter bewegt sich im Uhrzeigersinn zwischen den Winkeln $\Phi = 0$ bis $\Phi = 2\pi$ in 45° -Schritten um die Scheibe. (*Hartnoll & Blackman, 1998* [27])

1. das Standard-Akkretionsscheiben-Modell nach *Fabian et al. (1989)* [18], mit einer Emissionszone;
2. das XSPEC-Laor-Modell mit nahezu maximal rotierenden Schwarzen Löchern nach *Laor et al. (1991)* [33], das den Innenrand der Scheibe auf $1.2 r_g$ festlegt. Auch hier handelt es sich nur um *eine* emittierende Region;
3. und das neue das *Zwei-Zonen-Modell*, das zwei Emissionsregionen vorsieht, die jeweils mit dem XSPEC-Modell beschrieben werden.

Das neue am Zwei-Zonen-Modell ist, dass man zwei räumlich voneinander getrennte, emittierende Regionen annimmt. Motiviert wurde dies durch einen positiv detektierten Emissivitätsindex α , wie er im als Potenz-Gesetz angenommenen Emissivitätsgesetz $I_\nu \propto r^{-\alpha}$ steht. Für die beiden Zonen wurde nun angenommen, dass für $6 r_g < R < 10 r_g$ $\alpha > 0$ und für $10 r_g < R < \infty$ $\alpha < 0$ gilt. Verschiedene Parameter wurden nun festgelegt, jedoch war der Übergangsradius der Zone ein freier Parameter.

Beide Standard-Modelle beschränken die Inklination i nach oben auf einen Wert von 30° . *Misra et al.* passten nun mit dem Zwei-Zonen-Modell eine Inklination von 10° an die Daten an, was *Rokaki & Boisson (1999)* [58] mit $i = 12^\circ$ ziemlich gut bestätigen können. Die ASCA-Daten legen außerdem einen Emissivitätsindex α nahe, der im inneren Bereich innerhalb $10 r_g$ positiv ist. Das bedeutet, dass die harte Primärquelle im inneren Bereich der Scheibe zwischen 1.2 und $6 r_g$ lokalisiert sein muss. Alte Vorhersagen mit einer Lage bei etwa $10 r_g$ werden damit falsifiziert: sie hätten sich durch negative Indizes bemerkbar machen müssen. Abbildung 47 zeigt nun das von ASCA gemessene Profil der Eisen-Emissionslinie, das *Nandra et al. 1997* [45] ermittelt haben. Die Beobachtungen wurden sämtlich im 3 bis 10 keV-Band gemacht. Die Doppelhöcker-Struktur ist noch erkennbar, allerdings ist das rote Nebenmaximum - wie in den meisten Fällen - stark reduziert worden durch den Einfluss der Gravitationsrotverschiebung.

Seyfert-Galaxien NGC 4151 - Wang et al. (1999) NGC 4151 ist eine Seyfert-Galaxie vom Typ 1.5, die mit $z = 0.0033$ zu den nächsten AGN gehört und so ein ideales Studienobjekt ist. Die Daten von MCG-6-30-15 und NGC 4151 wurden in diesem Papier verglichen. Beide Quellen wurden mit dem Röntgen-Observatorium ASCA untersucht. *Wang et al.* [67] stellen neue Daten vor, die Emissionslinienprofile zeigen und bei NGC 4151 eine sehr gute Statistik haben.

NGC 4151 ist insofern eine etwas problematische Quelle, weil man zwei sehr unterschiedliche Inklinationen messen kann: im $X\gamma$ -Bereich erscheint sie eher *face-on* (etwa 0°), während man im Optischen/UV fast auf die Kante (*edge-on*, etwa 90°) zu blicken scheint. Letzteres wird durch eine bikonale Struktur gestützt, die im OIII-Filter mit $\lambda 5007$ gesehen wird (*Evans et al., 1993* [17], *Pedlar et al., 1993* [50]). Diese Orientierung betrifft wohl nur den Nukleus, wobei eine Inklination von 65° geschätzt wurde.

Abbildung 48 zeigt nun beide Spektren nach der Behandlung mit der ASCA-Standard-Software XSELECT. Sofort fällt die bessere Statistik für NGC 4151 auf. Weiterhin, dass beide Spektren global recht ähnlich sind. Beide zeigen einen signifikant höheren blauen Peak, aber ein kleineres rotes Nebenmaximum, der durch die beschriebenen Effekte verkümmerte rote Ast einer symmetrischen Doppelhorn-Struktur. NGC 4151 zeigt

- einen starken, engen Peak bei 6.4 keV,
- einen breiten roten Flügel
- einen schwachen roten Peak bei etwa 5.2 keV, der bis nach etwa 4.5 keV ausläuft
- eine Absorptionsstruktur bei ca. 4 keV

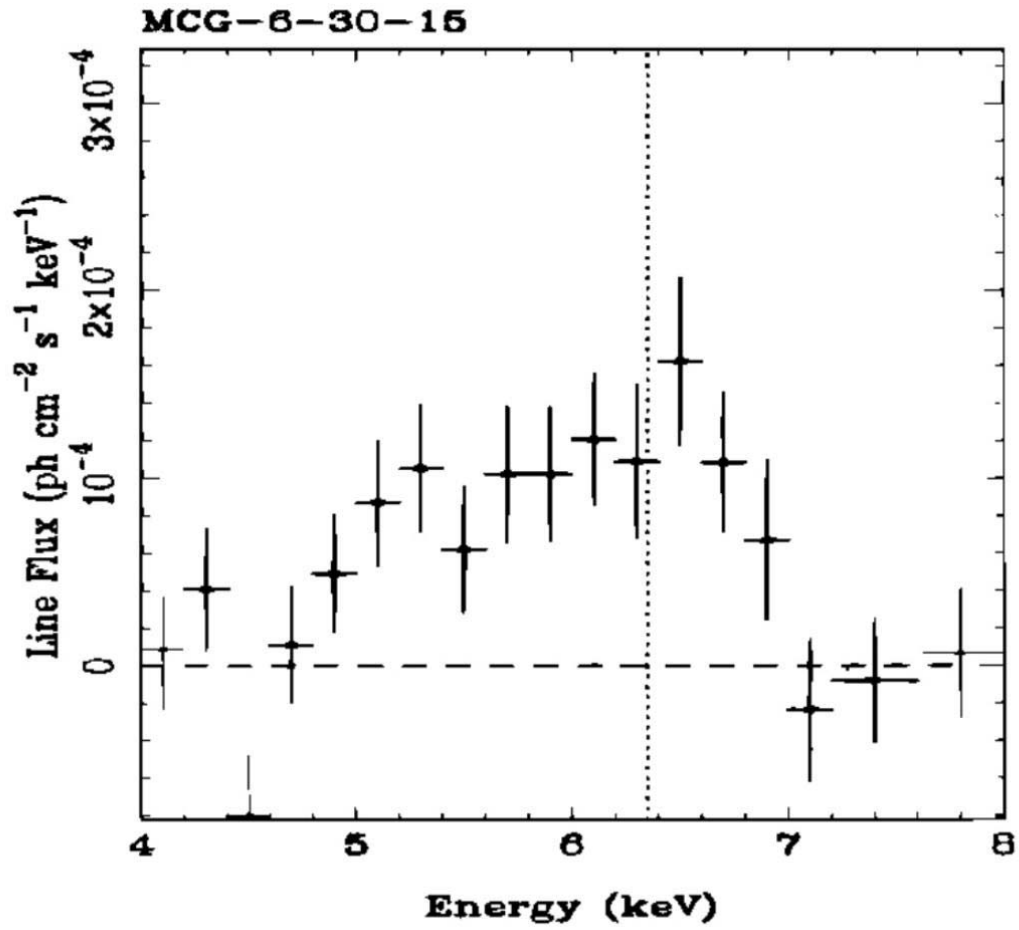


Abbildung 47: Linienprofil der Seyfert-1-Galaxie MCG-6-30-15, gemessen mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45]

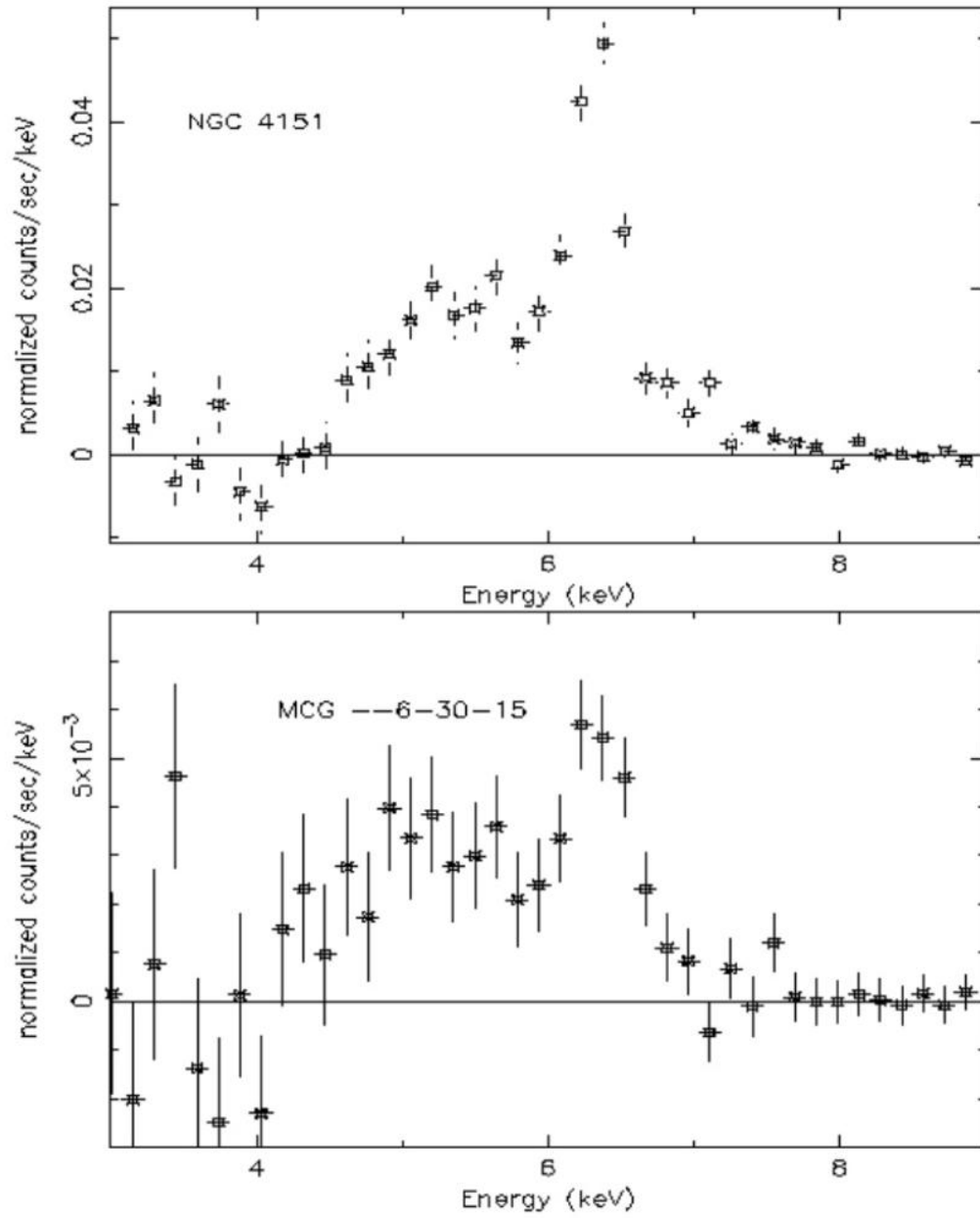


Abbildung 48: Linienprofile der Seyfert-1-Galaxien NGC 4151 und MCG-6-30-15, gemessen mit ASCA (*Wang et al. 1999* [67])

- und vor allem - das ist ein Novum - einen schwachen blauen Flügel, der bis etwa 8 keV hinaus läuft!

Der Datenfit wurde nun mit einer Fe- $K\alpha$ -Linie mit einer Inklination von $i = 0^\circ$ durchgeführt. Verwendet wurde das 'Disk-Line-Model' von *Fabian (1989)* [18], das ich bereits beschrieben habe. Der blaue Flügel wurde mit einer Fe- $K\beta$ -Komponente berücksichtigt, deren Übergang bei 7.06 keV ist. Alternativ oder additiv wäre eine Berücksichtigung der Ni- $K\alpha$ -Linie bei 7.48 keV denkbar. Die Residuen zeigen dann einen besseren Fit im Bereich von 7 bis 8 keV.

Röntgendoppelstern GRO J1655-40 - Balucinska-Church & Church (1999)

Diese stellare Quelle zeigt die ersten Indizien für Linienemission bei Röntgendoppelsternen. GRO J1655-40 ($\equiv$ Nova Scorpii 1994) gehört neben GRS 1915+105 zu den so genannten *Mikroquasaren*, weil sie einen superluminalen Jet zeigt (siehe Kapitel 2.1). Die Geschwindigkeiten des Plasmas sind mit 0.92c nah der Lichtgeschwindigkeit (*Hjellming & Rupen 1995* [29]). Optische Beobachtungen legen nahe, dass die Masse des zentralen Objekts etwa $7 M_\odot$ und die Inklination 70° beträgt (*Orosz & Bailyn, 1997* [47], *van der Hooft, 1998* [30]). Es liegen sogar Fits des Kerr-Parameters a vor, der mit 0.93 angesetzt wird. *Balucinska-Church & Church* [3] präsentieren Daten des Röntgen-Observatoriums RXTE von 1997, die zwischen 5 und 9 keV eine auffällige Doppelhöcker-Struktur zeigen (siehe Abbildung 49). Sie assoziieren diese Struktur mit der roten und blauen Komponente der Eisenlinie von 6.4 keV Ruheenergie, die durch 'Doppler-Boosting' aufgespalten wird. Diese Interpretation legt Doppler-Geschwindigkeiten von 0.33c nahe. Der Fit wurde mit zwei Gauß-Kurven bei 5.85 und 7.32 keV durchgeführt. Das Splitting wird als direkte Evidenz für ein Schwarzes Loch angesehen, weil ein Neutronenstern nicht die große Aufspaltung erzeugen könnte.

Es konnte keine Reflektionskomponente festgestellt werden. Als spektrale Komponenten wurden nur ein hartes Potenz-Gesetz aus der Comptonisierung, ein Schwarzkörper-Spektrum der Scheibe, sowie ein 'Disk-Line-Model' von *Laor (1991)* [33], das auch Absorption berücksichtigt, in Erwägung gezogen. Diese Komponenten zeigt Abbildung 50. Das Fehlen der Reflektionskomponente könnte durch einen sehr hohen Ionisationsparameter ξ (siehe Kapitel 2.5.2) von 10^4 erklärt werden. Dann ist der Beitrag der Reflektionskomponente zum Gesamtfluss unter 1% und kann vom harten Potenz-Gesetz kaum unterschieden werden. Allerdings darf ξ nicht so gross werden, dass die Linienemission unterdrückt ist (vergleiche nochmal Abbildung 6). Das *Laor*-Modell liefert eine mittlere Ruheenergie der Linie von 6.56 ± 0.14 keV. Dies impliziert die Ionensorte FeXXII. Die Dimension der emittierenden Scheibe in diesem Modell wird zu $r_{in} = 10 r_g$ und $r_{out} > 50 r_g$ abgeleitet. Es ist wahrscheinlich anzunehmen, dass innerhalb von $10 r_g$ die Scheibe vollständig ionisiert ist und daher hier kein Beitrag zur Fluoreszenzlinie produziert wird.

Die Quelle IC 4329A IC 4329A ist eine weitere Seyfert-1-Galaxie, die kürzlich von *Done, Madejski & Zycki 2000* [15] untersucht wurde. Diese Quelle zeigt verglichen mit MCG-6-30-15 eine engere Emissionslinie. Die Autoren passten eine Reihe unterschiedlicher Modelle an die Daten von ASCA und RXTE an, das aus zugrundeliegendem Potenz-Gesetz, Reflektionskomponente einer neutralen Scheibe und auch einem relativistischen Linien-Modell bestand. Es gab meist ähnliche Ergebnisse:

- das intrinsische Potenz-Gesetz konnte mit einem Index $\Gamma = 1.85$ angepasst werden,
- für den Reflektionsraumwinkel, der die Größe des Gebietes wiedergibt, das die harte Strahlung zum Beobachter reflektiert, wurde immer $\frac{\Omega}{2\pi} < 1$ festgestellt,
- die Eisen-Linie peakt meist bei 6.4 keV und hat eine Äquivalenzlinienbreite von 180 eV,

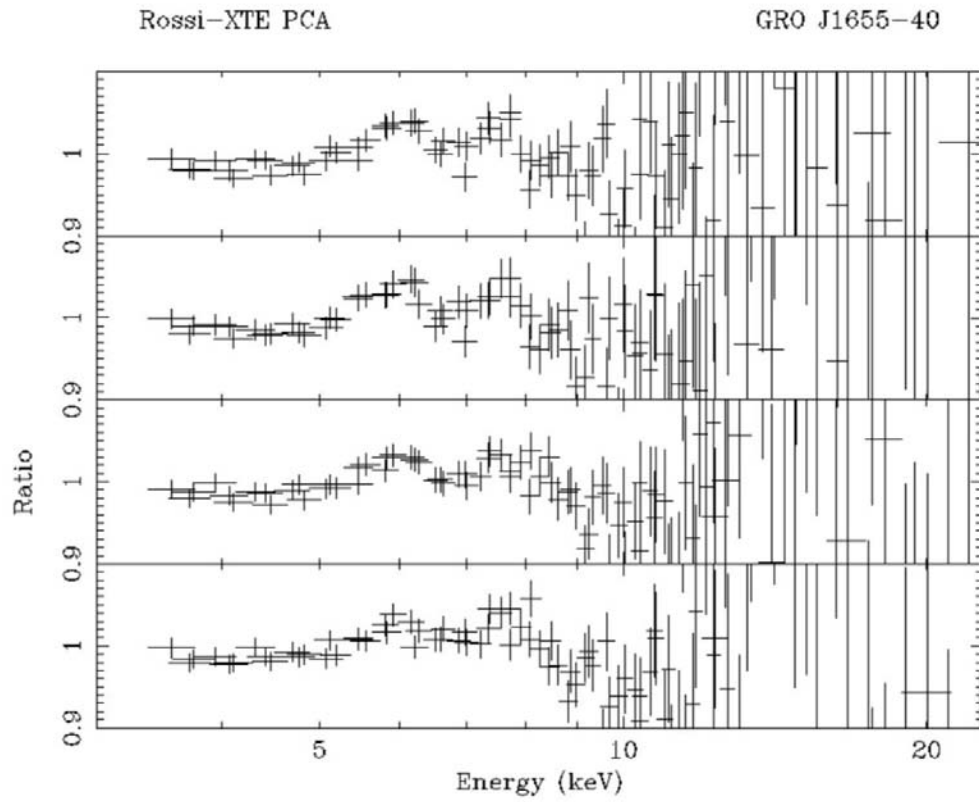


Abbildung 49: Verhältnis von RXTE-Daten zu Modell bei GRO J1655-40 für vier verschiedene Beobachtungen. Man erkennt deutlich das Doppelhöcker-Profil zwischen 5 und 9 keV, welches als rot- und blauverschobene Komponente der Eisenlinie interpretiert wird. (*Balucinska-Church & Church, 1999* [3])

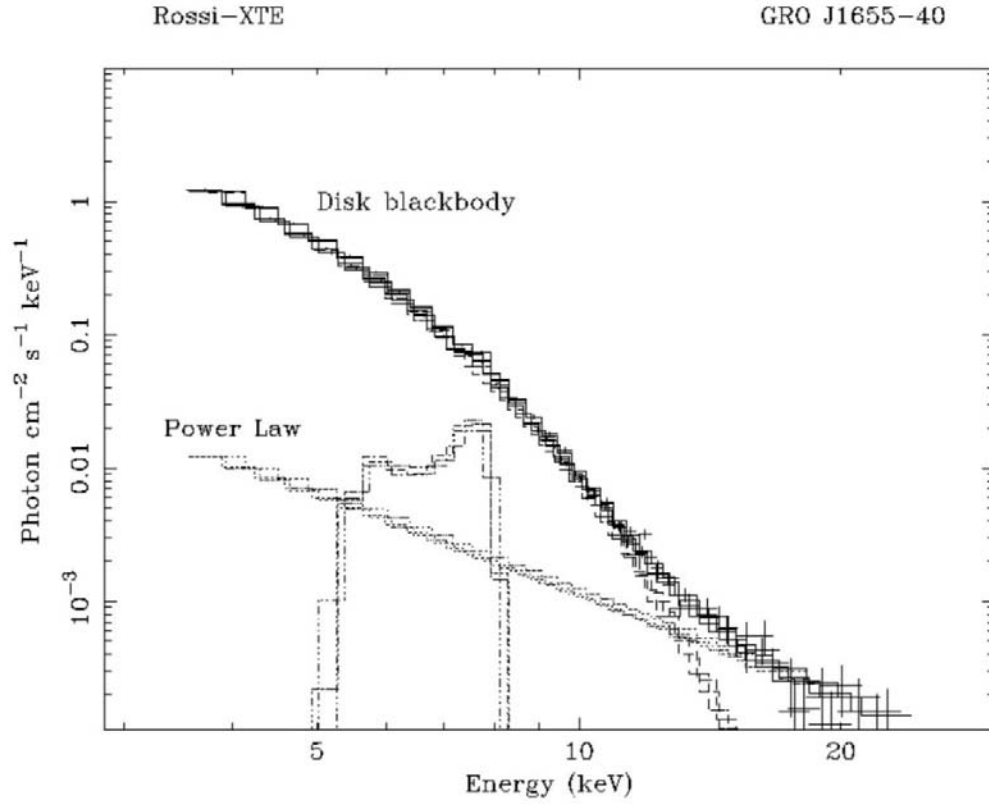


Abbildung 50: Berücksichtigte, spektrale Komponenten von GRO J1655-40: hartes Potenz-Gesetz aus der Comptonisierung, Schwarzkörper-Strahlung der Scheibe sowie *Laor*-Disk-Line-Absorption-Model. Die Absorptionslinie kann aufgrund negativer Normalisierung nicht dargestellt werden. Die Dominanz der Schwarzkörper-Strahlung ist ersichtlich. (*Balucinska-Church & Church, 1999* [3])

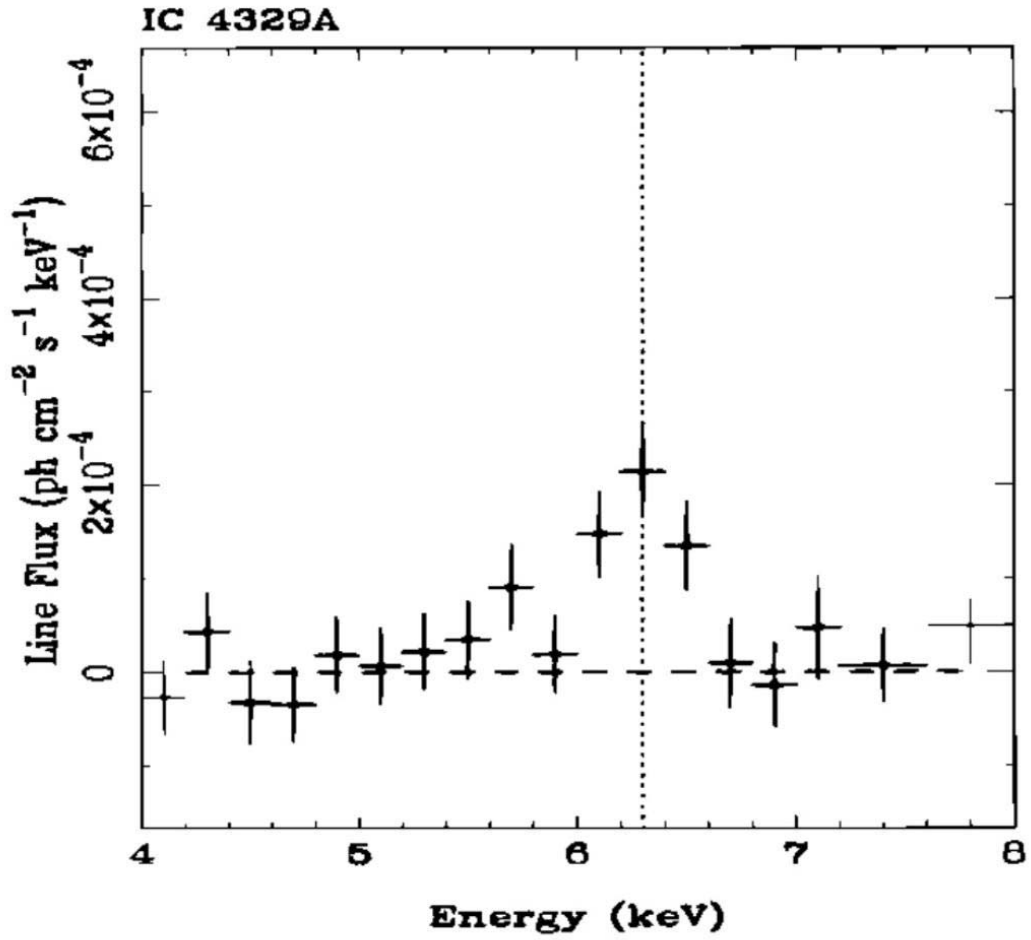


Abbildung 51: Emissionslinienprofil der Seyfert-1-Galaxie IC 4329A, gemessen mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45]

- der Scheibeninnenradius r_{in} wurde so gefittet, dass die Scheibe erst erstaunlich weit vom Schwarzen Loch entfernt die Linie effektiv produzieren kann:
 $r_{in} \simeq 45 r_g$,
- die Inklination wurde mit $i = 30^\circ$ und der Emissivitätsindex mit $\alpha = 3$ angesetzt, was für die meisten Seyfert-1-Galaxien beobachtet wurde und plausibel klingt.

Eine besondere Behandlung fand in diesem Papier die Ionisationsstruktur der Scheibe. Üblicherweise wird vereinfachend angenommen, dass sie über die gesamte Scheibe konstant ist. *Matt et al. (1993)* [40] gehörten zu den ersten, die eine radiale Abhängigkeit der Ionisation miteinbezogen. Sie könnte erklären, warum der innere Bereich $r < 45 r_g$ nicht an der Linienbildung beteiligt ist: dieser Bereich ist einfach zu heiß und infolgedessen zu stark ionisiert. Ob es sich in diesem Bereich um einen *advection dominated accretion flow (ADAF)* handelt, vermutet zwar diese Kollaboration. Es gibt jedoch auch die These, dass ADAFs nicht heiß genug sind, um eine Korona im innersten Bereich zu bilden. Möglich ist eine schwache radiale Abhängigkeit des Ionisationsparameters $\xi(r)$ in Form eines $1/r$ -Gesetzes. *Done, Madejski & Zycki 2000* [15] konnten dies nicht an den Daten ablesen und vermuten daher eine kompliziertere Ionisationsstruktur. Deren zeitliche Umformierung könnte für die Variabilität der Seyfert-Galaxien eine Ursache sein.

Weiterhin geben die Daten Grund zur Annahme, dass Eisen in diesen Scheiben höhere Häufigkeiten aufweist, als die solaren Häufigkeiten. Ein Studium der Äquivalenzlinienbreite lässt auf diese Größe schließen. *Henry & Worthey (1999)* [28] erwarten einen radialen Häufigkeitsgradienten, wie er bei Spiralgalaxien vorkommt, so dass supersolare Häufigkeiten zu erwarten sind, konkret etwa die doppelte solare Häufigkeit.

Done, Madejski & Zycki 2000 interpretieren nun das Fehlen eines relativistischen Linienprofils bei IC 4329A auf zwei mögliche Weisen:

- Entweder ist die innere Akkretionsscheibe für $r < 45 r_g$ einfach nicht vorhanden, und es befindet sich ein heißer Fluss von Plasma in diesem Bereich, der harte Röntgenstrahlung emittiert. Dies entspräche einem alten Bild, dem Zwei-Temperatur-Modell nach *Shapiro, Lightman & Eardley 1976* [59] und könnte möglicherweise ein ADAF sein.
- Oder eine innere Akkretionsscheibe ist vorhanden, aber nicht an der Reflexionskomponente ablesbar, weil die oberste Schicht der Scheibe zu stark ionisiert ist, um Fluoreszenz zu ermöglichen.

IC 4329A ist in der Beobachtungsreihe von ASCA (*Nandra et al. 1997* [45]) zu finden. Abbildung 51 illustriert diese Messung nach Abzug des Kontinuums, das wie gewöhnlich mit einem Potenz-Gesetz angepasst wurde. Der Gesamtfluss ist verglichen mit MCG-6-30-15 reduzierter, wie man an der Ordinate ablesen kann. Das rote Nebenmaximum ist nur andeutungsweise bei etwa 4.9 keV erkennbar. Am blauen Flügel könnte eine weitere Struktur erahnt werden, die aber durch die schlechte Statistik nicht gesichert ist. Ebenso ist die Interpretation von *Done, Madejski & Zycki 2000* denkbar, dass hier eine fast dreieckige Linienform vorliegt, die keine relativistischen Phänomene abbildet.

Die Quelle NGC 3227 Das Profil dieser Linie ist recht markant, wie Abbildung 52 zeigt. Es ist ein sehr dreieckige Form, die bei etwa 5.3 keV das rote Nebenmaximum zeigt. Der spektrale Fluss dieser Quelle ist mit $10^4 \text{ Photonen} \times \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1} \text{keV}^{-1}$ im mittleren Bereich verglichen mit anderen ASCA-Quellen anzusiedeln. Der blaue Flügel ist nicht steil abfallend, wie bei anderen Quellen, sondern läuft - ähnlich wie bei NGC 4151 (*Wang et al. 1999* [67]) vorgestellt - flacher aus.

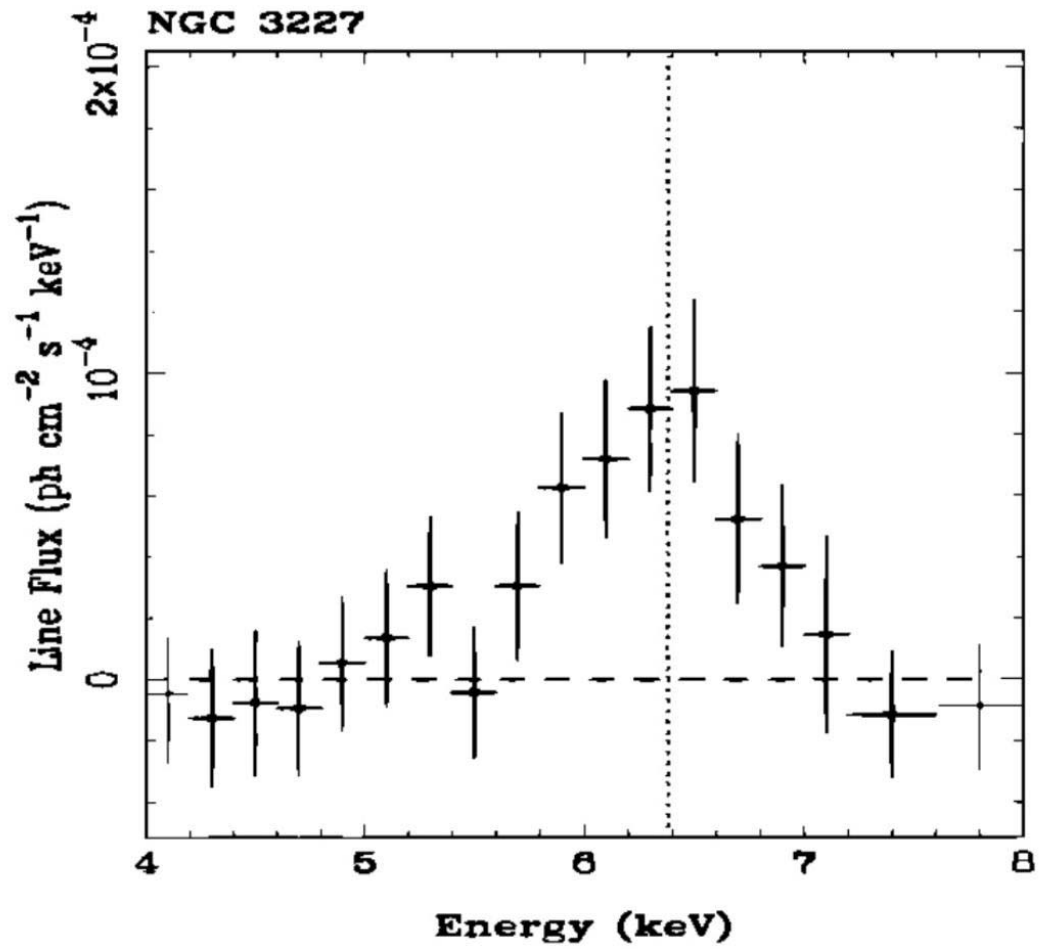


Abbildung 52: Emissionslinienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 3227, gemessen mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45]

Die Quelle NGC 3516 Diese Profil wählte ich auch bei *Nandra et al. (1997)* [45] aus, weil der blaue Peak sehr markant hervorsticht. Es ist eine scharfe, enge Spitze bei ca. 6.3 keV. Das rote Nebenmaximum fällt auch recht auffällig aus und sitzt bei 5.4 keV. Frappierend ist auch der 'Dip' bei etwa 6.8 keV, gefolgt von einem Buckel, der bis etwa 7.6 keV ausläuft. Dies dürfte mit den Schwellwerten für photo-elektrische Absorption assoziiert sein.

Die Quelle NGC 5548 *Chiang et al.* [9] haben 1999 die Daten von ASCA und RXTE von dieser Seyfert-1-Galaxie analysiert und eine Anpassung vorgenommen, um verschiedene Fitparameter zu ermitteln. Dazu wurde die Absorption, das harte Potenz-Gesetz, die Reflexionskomponente abgezogen, um die Fluoreszenz-Eisenlinie zu erhalten. Die Residuen lassen dieses Profil dann erkennen. Auch hier wurde die Emissionslinie mit einem relativistischen Scheibenlinien-Modell gefittet. NGC 5548 ist auch in der Beobachtungsreihe mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45] enthalten und zeigt wiederum die typischen Elemente relativistischer Emissionslinien: ein dominantes blaues Maximum, hier bei etwa 6.3 keV und einen rudimentäres, rotes Nebenmaximum, hier bei ca. 5.1 keV. Der Abfall zwischen beiden Maxima ist bei dieser Quelle auffällig. Die Fits von *Chiang et al. (1999)* [9] ergaben nun

- für r_{in} 7 bis 12 r_g
- und für i 25 bis 41°

Betrachtet man die Güte des Fits anhand von χ^2 , so ist das Wertepaar $r_{in} = 16r_g$ und $i = 37^\circ$ zu favorisieren.

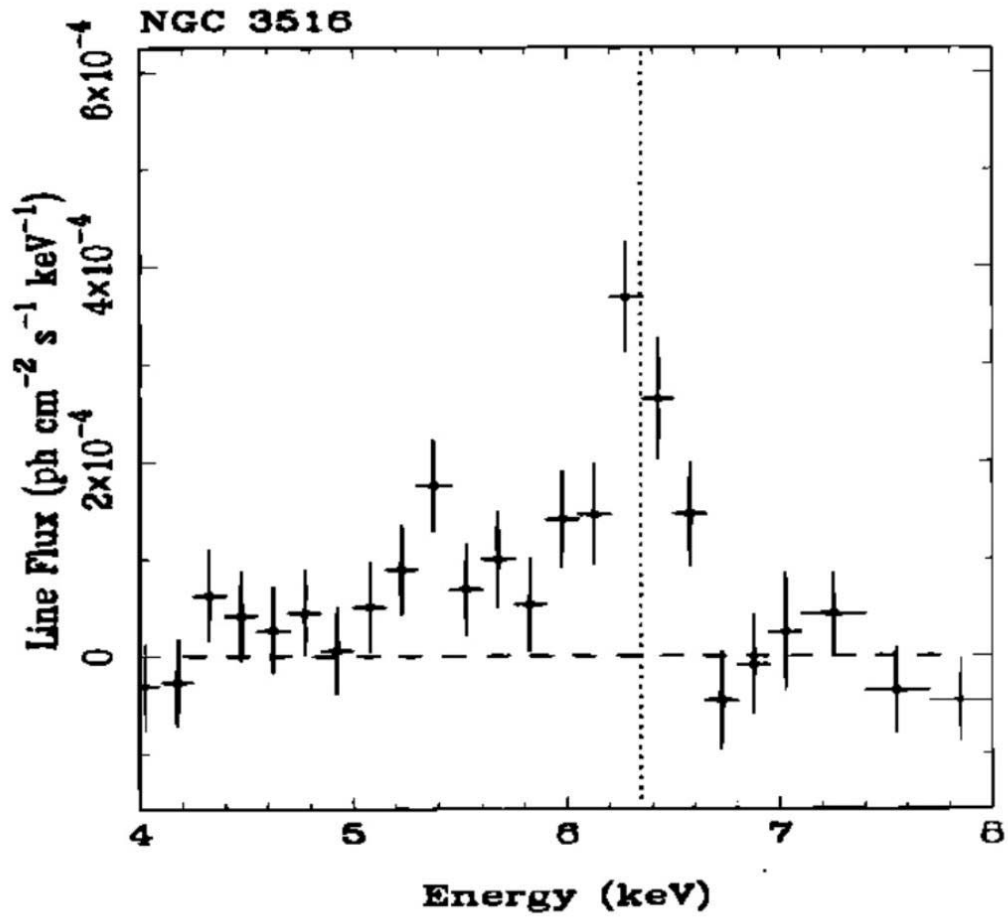


Abbildung 53: Emissionslinienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 3516, gemessen mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45]

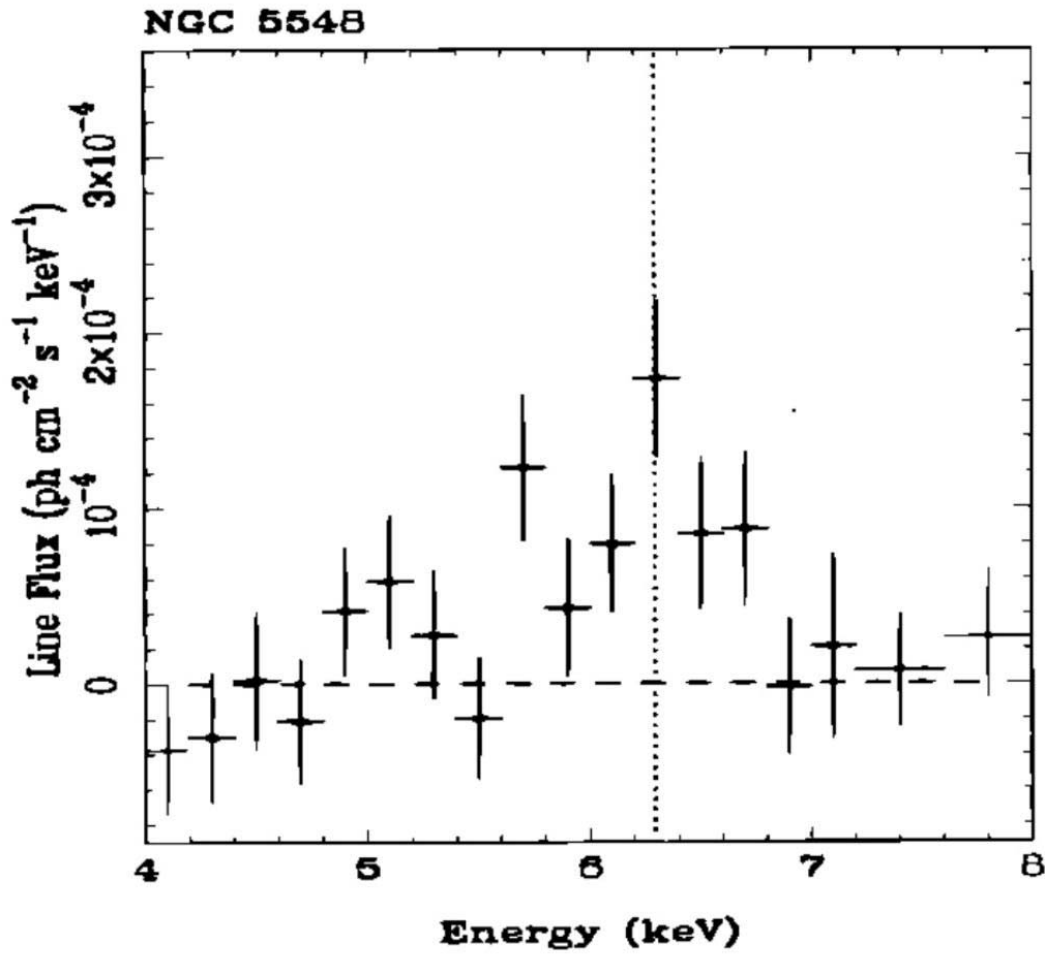


Abbildung 54: Emissionslinienprofil der Seyfert-1-Galaxie NGC 5548, gemessen mit ASCA von *Nandra et al. (1997)* [45]

6 Zusammenfassung

Die zentrale Aufgabe meiner Arbeit war die Entwicklung eines objektorientierten Ray-Tracers für die Kerr-Metrik, basierend auf der analytischen Behandlung der Nullgeodäten. Dazu verwendete ich die analytische Arbeit und den C-Code von *Fanton et al. (1997)* [22], den ich generalisierte und in C++-Klassen kapselte. Ziel war es, eine wesentliche Komponente des $X\gamma$ -Spektrums von AGN und Röntgendoppelsternen, die Emissionslinie von Eisen, zu simulieren. Diese Spektrallinie eignet sich hervorragend zum Studium der Raumzeit von Schwarzen Löchern und der Topologie von Schwarzes Loch-Scheiben-Systeme. Weiterhin habe ich in meiner Arbeit dargelegt, wie man den Rotverschiebungsfaktor unter Berücksichtigung neuer Geschwindigkeitsfelder von Plasma, dass sich in einer akkretierenden Materiescheibe um ein rotierendes Schwarzes Loch bewegt, verallgemeinern kann. Die Kinematik lässt sich in

- Rotation
- Akkretion
- Ausflüsse

differenzieren und separat oder in Kombination studieren. Dem Anwender des *objektorientierten Kerr Black Hole Ray-Tracers* obliegt die volle Kontrolle, in welcher Form und wie stark die jeweiligen Geschwindigkeitskomponenten des Plasmas eingehen. Dieses Modell erweitert den Parameter-raum einerseits, enthüllt aber andererseits neue Effekte, die eine radiale Drift, Jets und Winde bei der Form einer $\text{Fe-}K_\alpha$ -Emissionslinie hervorrufen. Ich habe diskutiert, welche charakteristischen Verformungen des Linienprofils zu erwarten sind, wenn man jeweils freie Parameter variiert. Die Auswirkungen auf die Linienform sind auch physikalisch plausibel. In bisherigen Arbeiten fanden diese kinematischen Kriterien keine Berücksichtigung, wenngleich alternative Modelle auch ganz andere Sachverhalte beleuchten können: So ist es möglich Emissionslinienprofile zu studieren, die sehr empfindlich auf

- die Ionisationsstruktur der Scheibe,
- die Position, der heißen, die Scheibe beleuchtende Korona
- oder die nicht axialsymmetrische Form der Scheibe

reagieren können.

Eine weitere Vertiefung der Einsichten könnte durch eine **engere Anpassung an numerische Scheibenmodelle** erfolgen. Die Daten, die aus einer solchen Rechnung beispielsweise auf einem Gitter resultieren, könnten direkt - ohne Verwendung globaler Funktionen für die Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes - verwendet werden und über ein noch zu generierendes, objektorientiertes Interface Input für den *Kerr Black Hole Ray-Tracer* sein. Durch diesen modularen Aufbau der Programmatik und einer direkten Verzahnung physikalischer Teilbereiche, wäre eine effiziente Ausschöpfung astrophysikalischer Modelle denkbar. Eine Modernisierung des XSPEC-Paketes, das auf *FORTRAN* basiert, wäre ebenfalls wünschenswert. Hier wäre eine Umstellung auf Objektorientierung angebracht. Erst dann gibt es ein stabiles Fundament für χ^2 -Anpassungsfits an Daten diverser Quellen.

Allerdings denke ich, dass diese neuen phänomenologischen Erkenntnisse zu den Linienprofilen akkretierender Scheiben, die ich in meiner Arbeit dargelegt habe, durchaus einen Diskussionsbeitrag um die Natur der Emissionslinien kompakter Objekte liefern und ein weiteres Teil im komplexen Puzzle der Röntgenspektroskopie darstellen.

7 Ausblick

Abschließend möchte ich einen Versuch unternehmen, über die durch das neue Modell gewonnenen Erkenntnisse hinaus zu schauen und einen Ausblick auf die zukünftigen Missionen im Dienste der Röntgenastronomie wagen und neue, komplexere Modelle anreißern.

7.1 Daten neuer Satellitenmissionen

Wir erleben zur Zeit ein rasches Wachstum der beobachtenden Hochenergiephysik. Mit dem vor kurzem gestarteten Röntgenteleskop *Chandra* und jetzt auch *XMM-Newton* stehen uns leistungsstarke Instrumente zur Verfügung, die in neue Bereiche der Auflösbarkeit bei $X\gamma$ -Energien vorstoßen. Bei Quasaren ist bereits der naheliegende Verdacht auf Existenz von Eisenlinien mit Hilfe von *BeppoSax*-Daten bestätigt worden. Es liegt wohl auf der Hand, dass weitere Objekte folgen werden und die Extraktion von Eisenemissionslinien aus den Daten weiter verbessert werden kann. Erst dann gibt es eine vernünftige Basis, um theoretische Modelle zu verifizieren oder gegebenenfalls zu falsifizieren. Die bisherige Erfolgskette, die mit *ASCA* begann und so das Studium relativistischer Gravitation ermöglichte, ist noch nicht abgeschlossen.

7.2 Neue MHD-Modelle

Auf theoretischer Seite sind noch einige Probleme ungelöst. Die Offenlegung der Kinematik des Plasmas um Schwarze Löcher verlangt nach anspruchsvollen magnetohydrodynamischen Modellen. Möchte man eine adäquate Behandlung des Problems angehen, hat man es hier mit der Koexistenz gleich dreier theoretischer Teilbereiche zu tun, die für sich genommen schon nicht unproblematisch sind:

- Magneto-/Hydrodynamik
- Elektrodynamik
- Relativität
- Strahlung

Bisher musste **immer** eine grobe Vereinfachung bzw. eine Vernachlässigung in einem der Teilbereiche vorgenommen werden, um überhaupt die Kalkulierbarkeit der Modelle gewährleisten zu können. Mit wachsenden Entwicklungen in der Computertechnologie sowie ausgeklügelten numerischen Algorithmen kommt man einer Vereinheitlichung in oben genanntem Sinne immer näher. So können post-/Newtonsche MHD-Modelle oder nur relativistische Modelle langsam abgelöst werden. Eines der anspruchsvollsten Probleme auf diesem vereinheitlichten Gebiet ist jedoch noch nicht gelöst. Dieses möchte ich im kommenden Abschnitt kurz vorstellen.

7.3 Kovarianter Strahlungstransport

Strahlung ist bereits im flachen Raum eine numerisch schwierig zu handhabende Physik, die aber in einer Vielzahl astrophysikalischer Domänen relevant ist. Die Strahlungstransport-Gleichung ist eine Integro-Differentialgleichung und beschreibt den Transfer von Strahlung von einem Volumenelement zum nächsten unter Berücksichtigung aller möglichen Effekte, wie Emission, Absorption, Streuung etc. Sie ist nur für einfache Systeme und Symmetrien lösbar. In der Vergangenheit wurden viele Anstrengungen unternommen, diese Gleichung Newtonsch zu lösen. Dies ist auch geglückt. Möchte man jedoch in einem Sachzusammenhang zu meiner Arbeit stehende, also emittierende, bewegte Plasmen in einem nun als optisch dünn zu behandelnden Korona-Scheiben-System um

Schwarzer Löcher untersuchen, so kommt man um eine *kovariante Formulierung der Strahlungstransport-Gleichung* nicht umhin. Hier ergeben sich eine Vielzahl Probleme, die bei der gekrümmten Metrik beginnen und bei den komplizierten, nichtlinearen Strahlungsprozessen enden.

Nach einer Lösung dieses Problems könnte man den ART Ray-Tracer von der Oberfläche des emittierenden Objektes starten lassen, um die Spektren zu erhalten. Eine Alternative beschreibe ich im nächsten Abschnitt.

7.4 Volumen Ray-Tracing

Volumen Ray-Tracing beschreibt den Sachverhalt, dass die Strahlen nun auf transparente oder 'nebulöse' Objekte treffen, und so (zumindest zum Teil) transmittiert werden können. Solche Ray-Tracer sind komplexere Solver, da sie Streuvorgänge etc. modellieren müssen. Die Hydrodynamik-Gruppe des Max Planck Instituts für Astrophysik in Garching (*M. Reinecke & A. Kahler, 1998*) hat einen solchen Code entwickelt, allerdings im flachen Raum. Das Projekt heißt *RAY++*. Leider war dieser Code nicht so modifizierbar, dass er als Kerr Ray-Tracer hätte benutzt werden können. Ich habe diese Anstrengungen unternommen, scheiterte jedoch an der Tatsache, dass der Koordinatenursprung in der Kerr-Metrik festgelegt ist, und mit dem Zentrum des Schwarzen Loches koinzidiert. Die programmiertechnische Struktur von *RAY++* unterband dieses Fixum.

Die Alternative zur Lösung der kovarianten Strahlungstransport-Gleichung plus Kerr Ray-Tracer ist also ein Volumen Kerr Ray-Tracer. Er rechnet die Strahlen nicht nur bis zur Oberfläche des möglicherweise optisch dünnen, emittierenden Objektes, sondern rechnet in das Objekt hinein bis zum jeweiligen Emissionsort. Ob diese speziellen Volumen-Tracer einfacher zu handhaben sind, als die Strahlungstransport-Gleichung ist fraglich. Bisher wurde jedenfalls keine der Möglichkeiten von Forschungsteams bearbeitet: sie stehen zur Vakanz.

A Anhang

A.1 Die Einsteinschen Gleichungen

Die zentralen Gleichungen der ART sind die **Einsteinschen Feldgleichungen**. Sie verknüpfen die *Metrik*, also die Raumkrümmung mit der *Masse*, die nach dem Masse-Energie-Äquivalent $E = mc^2$ identisch zu der Energie ist:

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \quad (178)$$

Dabei bezeichnet $G_{\mu\nu}$ den *Einstein Tensor*, der Ableitungen des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ enthält und $T_{\mu\nu}$ den *Energie-Impuls-Tensor*, der Masse respektive Energie repräsentiert. An dieser Gleichung sieht man unmittelbar, dass die Energie an die vierdimensionale Raumzeit koppelt. Andererseits verschleiert sie, dass man es mit zehn Gleichungen ($G_{\mu\nu}$ ist symmetrisch) zu tun hat, die zwanzig Größen miteinander verbinden. Die Feldgleichungen sind im Prinzip Differentialgleichungen zur Bestimmung des metrischen Tensors aus **gegebenem** Energie-Impuls-Tensor $T_{\mu\nu}$ (auch der umgekehrte Weg ist denkbar). Die Form von $g_{\mu\nu}$ enthüllt alle Eigenschaften der raumzeitlichen Struktur.

Der Einstein-Tensor hängt mit dem *Ricci-Tensor* $R_{\mu\nu}$ auf folgende Art und Weise zusammen:

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (179)$$

mit dem *kontrahierten* Riemann Tensor, dem *Ricci Skalar*

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (180)$$

Außerdem ist der Ricci-Tensor $R_{\mu\nu}$ die *Verjüngung* des *Riemannschen Krümmungstensors* $R^\kappa_{\lambda\mu\nu}$

$$R_{\kappa\lambda} = R^\mu_{\lambda\mu\nu} = g^{\mu\nu} R_{\nu\kappa\mu\lambda}. \quad (181)$$

Dabei gilt, dass das Verschwinden des Riemannschen Krümmungstensors eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist, dass eine Metrik flach ist. Der Krümmungstensor hängt auf folgende Art und Weise mit dem metrischen Tensor $g_{\mu\nu}$ zusammen:

$$R^\kappa_{\lambda\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\kappa_{\lambda\nu} - \partial_\nu \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} + \Gamma^\sigma_{\lambda\nu} \Gamma^\kappa_{\sigma\mu} - \Gamma^\sigma_{\lambda\mu} \Gamma^\kappa_{\sigma\nu} \quad (182)$$

(mit ∂_μ als *partielle Ableitung*).

$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu}$ bezeichnet den *metrischen Zusammenhang*, zuweilen auch *affine Verbindung* oder *Christoffel-Symbole* genannt. Im Prinzip sind dies Ableitungen des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$

$$\Gamma^\kappa_{\lambda\mu} = \left\{ \begin{matrix} \kappa \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}g^{\kappa\nu}(\partial_\lambda g_{\nu\mu} + \partial_\mu g_{\nu\lambda} - \partial_\nu g_{\lambda\mu}). \quad (183)$$

Es folgt so, dass immer

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = 0 \quad (184)$$

gilt.

Im allgemeinen geht man nun so vor, dass man eine Materieverteilung spezifiziert, die Feldgleichungen löst, um dann die zugrundeliegende *Geometrie* zu ermitteln. Die besondere Leistung Einsteins war es, die *Gravitation als geometrische Eigenschaft des Raumes* anzusehen, und so den klassischen Newtonschen Kraftbegriff abzulösen.

Der einfachste Fall, den man diskutieren kann ist $T_{\mu\nu} = 0$, also die Abwesenheit von Masse/Energie. Man erhält die *Vakuum Feldgleichungen*:

$$G_{\mu\nu} = 0 \quad (185)$$

Auf den ersten Blick sieht dies wie zehn Gleichungen für zehn Unbekannte $g_{\mu\nu}$ aus. Die $g_{\mu\nu}$ sind aber nicht unabhängig voneinander, sondern durch vier differentielle Bindungen, den *Bianchi-Identitäten*

$$\nabla_\nu G^{\mu\nu} \equiv 0 \quad (186)$$

(mit ∇_μ als *kovariante Ableitung*)

miteinander verbunden.

Die $g_{\mu\nu}$ können durch eine Koordinatentransformation

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu(x) \quad (187)$$

vierfach abgeändert werden. Diese *Eichbedingungen* reduzieren die zehn Gleichungen in Gleichung (185) auf sechs Gleichungen.

A.2 Die Petrov-Klassifikation

Eine Diskussion der algebraischen Struktur des spurfreien *Weyl-Tensors*

$$C_{\kappa\lambda\mu\nu} = R_{\kappa\lambda\mu\nu} - g_{\kappa[\mu}R_{\nu]\lambda} + g_{\lambda[\mu}R_{\nu]\kappa} - \frac{1}{2}g_{\kappa[\nu}g_{\mu]\lambda}R, \quad (188)$$

also letztlich eine Betrachtung der Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors, lässt eine Klassifikation der *Vakuum-Raumzeiten* zu, die nach *Petrov* benannt ist. Diese Diskussion im Rahmen des *Newman-Penrose Tetraden-Formalismus* führt auf fünf komplexe, skalare Größen, den *Weyl Skalaren*

$$\Psi_i \text{ mit } i = 0, 1, 2, 3, 4, \quad (189)$$

die den Weyl-Tensor komplett bestimmen. Je nach gewähltem Koordinatensystem kann man nun einige der Ψ_i bzw. Wurzeln der Petrov-Gleichung vierter Ordnung zum Verschwinden gebracht werden. Welche schließlich verschwinden, legt dann den *Petrov-Typ* fest.

Petrov Typ	I	II	D	III	N
Wurzeln vierter Ordnung	alle verschwinden	eine doppelt	zwei doppelt	eine dreifach	eine vierfach
unterschiedliche Eigenvektoren	4	3	2	2	1

Die Petrov-Typen kann man nun in eine *Dreieckshierarchie* anordnen, die von *Penrose* vorgeschlagen wurde. Hier unterscheiden sich die Raumzeiten in der *Spezialisierung*. Die Pfeile zeigen in Richtung wachsender Spezialisierung: in der Spitze des Dreiecks ist sie minimal, unten rechts maximal.

Die prominenten Vakuum-Lösungen der Einsteinschen Feldgleichungen Schwarzschild-, Kerr- und Reissner-Nordström-Lösung gehören alle zum **Petrov-Typ D**. Ähnliche Schemata existieren für **Nicht-Vakuum-Raumzeiten**, die *Plebanski-Typologie* und *Karlhede-Klassifikation* heißen.

A.3 Symmetrien: Killing-Vektorfelder und Isometrien

Diskutiert man die Symmetrieeigenschaften der Raumzeiten kann man eine Systematik mit Hilfe von *Isometrien* entwickeln. Als Isometrie bezeichnet man alle Transformationen $x^\mu \rightarrow x'^\mu$, die die Metrik **(form)invariant** lassen, so dass gilt

$$g'_{\mu\nu}(y) = g_{\mu\nu}(y) \quad \forall \text{ Koordinaten } y^\kappa. \quad (190)$$

Betrachtet man die *infinitesimale Koordinatentransformation*

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \varepsilon X^\mu(x), \quad (191)$$

mit ε als kleiner Größe und X^μ einem Vektorfeld.

Mit dem Transformationsverhalten von $g_{\mu\nu}$, der ja ein Tensor 2. Stufe ist

$$g_{\kappa\lambda}(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} g'_{\mu\nu}(x'), \quad (192)$$

folgt mit Gleichung (190)

$$g_{\kappa\lambda}(x) = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\kappa} \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\lambda} g_{\mu\nu}(x'). \quad (193)$$

Differentiation von (191), Substitution und Anwendung des *Taylorschen Satzes* liefert

$$L_X g_{\kappa\lambda} = X^\sigma \partial_\sigma g_{\kappa\lambda} + g_{\kappa\nu} \partial_\lambda X^\nu + g_{\lambda\nu} \partial_\kappa X^\nu, \quad (194)$$

mit L_X als *Lie-Ableitung* bezüglich des Vektorfeldes X . Die *Isometriebedingung* lautet nun, dass dieser Ausdruck verschwindet:

$$L_X g_{\mu\nu} = \nabla_\nu X_\mu + \nabla_\mu X_\nu = 0 \quad (195)$$

Gleichung (195) heißt auch **Killing-Gleichung**, ihre Lösungen sind die **Killing-Vektorfelder** X^μ , die eindeutig die Symmetrieeigenschaften der Metrik beschreiben. Knapp formuliert sind sie *infinitesimale Automorphismen der Metrik*.

A.4 Radialgleichung in der Äquatorialebene

Um die Geodätengleichung zu extrahieren startet man mit der **Lagrange-Funktion** $\mathcal{L}$, die aus der *klassischen Mechanik* bereits bekannt ist, hier allerdings in einer relativistisch kovarianten Formulierung:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (196)$$

Mit der Kerr-Metrik (20) erhält man daraus

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & \left(1 - \frac{2Mr}{\rho^2}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aMr \sin^2 \theta}{\rho^2} \dot{t} \dot{\Phi} - \frac{\rho^2}{\Delta} \dot{r}^2 - \rho^2 \dot{\theta}^2 \\ & - [(r^2 + a^2) + \frac{2a^2 M r}{\rho^2} \sin^2 \theta] \sin^2 \theta \dot{\Phi}^2 \end{aligned} \quad (197)$$

Ich spezifiziere zunächst diesen Lagrangian auf die Äquatorialebene. Hier gilt $\theta = \frac{\pi}{2}$ und $\dot{\theta} = 0$, was Gleichung (197) zu

$$\begin{aligned} 2\mathcal{L} = & \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{4aM}{r} \dot{t} \dot{\Phi} - \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 \\ & - [(r^2 + a^2) + \frac{2a^2 M}{r}] \dot{\Phi}^2 \end{aligned} \quad (198)$$

vereinfacht.

Nun ist der Ablauf des üblichen Apparats der klassischen Mechanik möglich. Ich berechne die *generalisierten Impulse* nach der allgemeinen Form $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k}$. Dann wird

$$p_t = (1 - \frac{2M}{r})\dot{t} + \frac{2aM}{r}\dot{\Phi} \equiv E = \text{const} \quad (199)$$

$$p_\Phi = \frac{2aM}{r}\dot{t} - [(r^2 + a^2) + \frac{2a^2M}{r}]\dot{\Phi} \equiv L_z = \text{const} \quad (200)$$

$$p_r = -\frac{r^2}{\Delta}\dot{r} \quad (201)$$

(Punkte bedeuten Ableitungen nach einem affinen Parameter).

Die **Konstanz** der Impulse p_t und p_Φ folgt mathematisch aus der Unabhängigkeit der Langrange Funktion $\mathcal{L}$ von den daher **zyklisch** genannten Koordinaten t und Φ ; physikalisch manifestiert sich darin die *Stationarität* und *Axialsymmetrie* der Kerr-Metrik. Die mit den zyklischen Koordinaten assoziierten Impulse heißen **Integrale der Bewegung**. Hier findet man bereits die ersten zwei. Neben einer dritten, der Masse m , habe ich in Kapitel 3.3.1 die vierte Erhaltungsgröße hergeleitet, die **Carter-Konstante** $\mathcal{C}$, die aus der **Separabilität der Hamilton-Jacobi-Gleichung** folgt. Die *Hamilton-Funktion* $\mathcal{H}$ erhält man - wie in der klassischen Mechanik auch - aus einer *Legendre-Transformation*

$$\mathcal{H} = \sum_{k=1}^S p_k \dot{q}_k - \mathcal{L}, \quad (202)$$

wobei die q_k die generalisierten Koordinaten und die p_k die generalisierten Impulse sind. Die Größe S ist die Anzahl der Spezies Koordinaten.

$\mathcal{H}$ wird so

$$\mathcal{H} = p_t \dot{t} + p_\Phi \dot{\Phi} + p_r \dot{r} - \mathcal{L} \quad (203)$$

$$= [(1 - \frac{2M}{r})\dot{t} + \frac{2aM}{r}\dot{\Phi}]\dot{t} \quad (204)$$

$$- [\frac{2aM}{r}\dot{t} - [(r^2 + a^2) + \frac{2a^2M}{r}]\dot{\Phi}]\dot{\Phi} \quad (205)$$

$$- \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 \quad (206)$$

$$= E\dot{t} - L_z\dot{\Phi} - \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 \equiv \delta_1. \quad (207)$$

Erwähnenswert ist an dieser Stelle, dass $\mathcal{H}$ *unabhängig* ist von der globalen Zeit t . Man nennt dies *Homogenität in der Zeit*.

Die Größe δ_1 macht eine Fallunterscheidung, um welchen Geodärentyp es sich handelt.

$$\delta_1 = \begin{cases} 1 & \text{zeitartige Geodäten} \\ 0 & \text{Nullgeodäten} \end{cases} \quad (208)$$

Ich möchte im weiteren nur die **Geodäten der Photonen** und nicht die der massebehafteten Teilchen in der Kerr-Metrik betrachten. Es gilt daher $\delta_1 = 0$. Man kann nun die Größen $\dot{t}$ und $\dot{\Phi}$ nur durch die Erhaltungsgrößen E und L_z ausdrücken, das in

$$E\dot{t} - L_z\dot{\Phi} - \frac{r^2}{\Delta}\dot{r}^2 = 0 \quad (209)$$

einsetzen, was auf die **Radialgleichung** der Nullgeodäten in der Äquatorebene führt:

$$r^2 \dot{r}^2 = r^2 E^2 + \frac{2M}{r} (aE - L_z)^2 + (a^2 E^2 - L_z^2) \quad (210)$$

Meist definiert man einen Impaktparameter $D \equiv \frac{L_z}{E}$.

Im Buch von *Chandrasekhar (1983)* [8] ist die Diskussion und Lösung dieser radialen Gleichung ausführlich dargestellt.

Eidesstattliche Erklärung Hiermit versichere ich, dass ich die Diplomarbeit selbständig verfasst, keine anderen als die angegebenen Quellen und Hilfsmittel benutzt und die Arbeit bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt habe.

Danksagungen

- Mein hauptsächlicher Dank geht an Prof. Dr. Max Camenzind. Er ist der geistige Vater dieser Arbeit und hat mich in jeder Hinsicht unterstützt. Für die freundliche Aufnahme in der Theorie-Gruppe der Landessternwarte Heidelberg, die zahlreichen Gespräche und die Tatsache, dass er immer ein offenes Ohr hatte und mit Witz und Enthusiasmus mir ein hervorragender Mentor war, möchte ich ihm herzlich danken.
- Es war ein ganz besonderer Wunsch von mir, eine Arbeit mit einem Themenschwerpunkt aus der Astrophysik durchzuführen. Ich danke Prof. Dr. Jochen Wambach für seine Tätigkeit als Koreferent. Nur mit ihm als Betreuer von der TUD war meine externe Diplomarbeit durchführbar. Vielen Dank!
- Einen ganz besonderen Dank möchte ich an meine Frau Anja weitergeben. Sie hat mich immer unterstützt und volles Verständnis für meine Arbeit gehabt. Du bist mein Halt.
- Ich danke herzlich meinen Eltern für ihre lange Begleitung durch mein Schul- und Studienleben, das nun durch die Diplomarbeit beendet ist. Es war schon immer mein Wunsch, die Welt der Sterne zu erforschen. Seit dem Kindergarten hat mich die Faszination dafür nicht mehr losgelassen. Ich bin froh, dass sie mir ein Studium in dieser Fachrichtung ermöglicht und mich stets ermutigt haben.
- Ebenso danke ich Christa und Toni, die immer reges Interesse an meiner Arbeit zeigten und vor allem mit kulinarischen Highlights eine angenehme Distraction während des letzten Jahres boten.
- Meinen lieben Kollegen aus der Theorie-Gruppe, Martin, José, Jochen, Stefan, Ahmad, Markus und Elena danke ich für eine schöne Zeit an der Landessternwarte und dass ich bei jedem Problem kompetente Antworten erhielt.
- Mit einem weinenden Auge danke ich meinen Kommilitonen der TUD, Christian, Michael, Rainer und Feri, die mit mir das Studium begonnen haben und nun auch erfolgreich abgeschlossen haben oder bald abschließen werden. Es war eine phantastische Zeit.
- Ein herzliches Dankeschön an alle Kollegen der Landessternwarte, die bei jedem Problem hilfsbereit zur Seite standen und immer für eine nette Atmosphäre sorgten.
- Mein Dank geht auch an Prof. Dr. Norbert Grewe, der in jahrelanger Arbeit im Rahmen seiner Theorie-Vorlesungen an der TUD ein ganz besonderes Interesse an der Physik bei mir geweckt hat. Sein Sinn für Ästhetik und seine humoristischen Anekdoten sorgten stets für Abwechslung und bereicherten meine Sichtweise der Physik.
- Schließlich möchte ich dem Rest meiner Familie, besonders Sylvia, Nicole und Carsten, sowie meinen Freunden danken. Gerade in den letzten Zügen meiner Arbeit habe ich sie sicherlich vernachlässigt. Danke für Euer Verständnis.
- Eine Überraschung der ganz besonderen Art, war für mich das Interesse von R. P. Kerr an meiner Arbeit. An dieses Ereignis werde ich mit Freude und mit einem Lächeln zurückdenken.

Literatur

- [1] Igumenshchev I.V., Illarionov A.F. & Abramowicz M.A., 1999, astro-ph/9902243
- [2] Abramowicz M.A., Björnsson G. & Igumenshchev I.V., 2000, PASJ, astro-ph/0004106
- [3] Balucinska-Church & Church, 1999, MNRAS, astro-ph/9912389
- [4] Camenzind M., 1994, Vorlesungsskript: Aktive Galaktische Kerne
- [5] Camenzind M., 1997, Vorlesungsskript: Physik Rotierender Schwarzer Löcher
- [6] Camenzind M., 1997, Vorlesungsskript: Akkretion auf Rotierende Schwarze Löcher
- [7] Carter, B., 1968, Phys. Rev., 174, 1559
- [8] Chandrasekhar S., 1983, The Mathematical Theory of Black Holes, Oxford University Press, New York
- [9] Chiang et al., 1999, ApJ, astro-ph/9907114
- [10] Cunningham, C.T. & Bardeen J.M., 1973, ApJ, 183, 237
- [11] Cunningham, C.T., 1975, ApJ, 202, 788-802
- [12] Cunningham, C.T., 1976, ApJ, 208, 534
- [13] Dabrowski Y., Fabian A.C., Iwasawa K., Lasenby A.N. & Reynolds C.S., 1997, MNRAS
- [14] Dabrowski Y. & Lasenby A.N., 2000, MNRAS, astro-ph/0005020
- [15] Done C., Madejski G.M. & Zycki P.T., 2000, ApJ, astro-ph/0002023
- [16] Ebisawa K., Ueda Y., Inoue H., Tanaka Y. & White N.E., 1996, ApJ, 467, 419
- [17] Evans I.N. et al., 1993, ApJ, 417, 82
- [18] Fabian A.C., Rees M.J., Stella L. & White N.E., 1989, MNRAS, 238, 729
- [19] Fabian A.C. et al., 1995, MNRAS, 277, L11
- [20] Fabian A.C., 1998, Astronomy & Geophysics
- [21] Fabian A.C., Iwasawa K., Reynolds C.S. & Young A.J., 2000, MNRAS
- [22] Fanton C., Calvani M., Felice F. de & Cadez A., 1997, PASJ 49, 159
- [23] Falcke H. & Biermann P.L., 1995, A&A, 293, 665
- [24] Ghisellini G., Haardt F. & Matt G., 1994, MNRAS, 267, 743, astro-ph/9401044
- [25] Gilfanov M., Churazov E. & Revnivtsev, 2000, MNRAS, astro-ph/0001450
- [26] Hansen C.J. & Van Horn H.M., 1975, Nature, 249, 429
- [27] Hartnoll S.A. & Blackman E.G., 1999, MNRAS, astro-ph/9908275
- [28] Henry R.B.C. & Worthey G., 1999, PASP, 111, 919
- [29] Hjellming R.M. & Rupen M.P., 1995, Nature, 375, 464
- [30] Hooft F. van der, 1998, A&A, 329, 538-550
- [31] Inverno Ray d', 1992, Introducing Einstein's Relativity, Oxford University Press UK
- [32] Iwasawa, K. et al., 1996, MNRAS, 282, 1038

- [33] Laor, A., 1991, ApJ, 376, 90
- [34] Lasenby A.N., Doran C.J.L. & Gull S.F., 1994, Astrophysical and cosmological consequences of a gauge theory of gravity. In: Advances in Astrofundamental Physics, Erice 1994, World Scientific, Singapore, 1995
- [35] Lasenby A.N., Doran C.J.L, Dabrowski Y. & Challinor A.D , 1997, MRAO, astro-ph/9707165
- [36] Lindquist R.W., 1966, Ann. Phys. (N.Y.), 37, 487
- [37] Magdziarz P. & Zdziarski A.A., 1995, MNRAS, 273, 837-848
- [38] Martocchia A. & Matt G., 1996, MNRAS, 282, L53
- [39] Matsuoka M., Piro L., Yamauchi M., Murakami T., 1990, ApJ, 361, 400
- [40] Matt G., Fabian A.C. & Ross R.R., 1993, MNRAS, 262, 179
- [41] Matt G., Fabian A.C. & Reynolds C.S., 1997, MNRAS, 281, 175
- [42] Mineo et al., 2000, A&A, astro-ph/0005567
- [43] Misra, R. & Kembhavi A.K., 1998, ApJ, 499, 205
- [44] Misra, R. & Sutaria F.K., 1999, ApJ, 517, 661
- [45] Nandra, K. et al., 1997, ApJ, 477, 602-622
- [46] Nishida S. & Eriguchi Y., 1994, ApJ, 427, 429
- [47] Orosz J.A. & Bailyn C.D., 1997, ApJ, 477, 876
- [48] Page D.N. & Thorne K., 1974, ApJ, 191, 499
- [49] Papapetrou A., 1966, Ann. de l'Institut Henri Poincaré Section A, 4, 83-105
- [50] Pedlar A. et al., 1993, MNRAS, 263, 471
- [51] Pounds K.A., Nandra K., Stewart G.C., George I.M., Fabian A.C., 1990, Nature, 344, 132
- [52] Reynolds C.S., 1996, Ph. D. thesis, University of Cambridge
- [53] Reynolds C.S. & Wilms J., 2000, ApJ, astro-ph/9912120
- [54] Rokaki E. & Boisson C., 1999, MNRAS, 307, 41-54
- [55] Ross R.R. & Fabian A.C., 1993, MNRAS, 261, 74
- [56] Ross R.R., Fabian A.C. & Young A.J., 1999, MNRAS
- [57] Rybicki, G.B. & Lightman A.P., 1979, Radiative Processes In Astrophysics, Wiley-Interscience
- [58] Rybicki G.B. & Bromley B.C., 1997, ApJ
- [59] Shapiro S.L., Lightman A. & Eardley D.M., 1976, ApJ, 204, 187-199
- [60] Shields G.A., 1978, Nature, 272, 706
- [61] Skibo J.G., 1997, ApJ, 478, 522
- [62] Spruit H.C., 2000, astro-ph/0003144
- [63] Sunyaev R.A. & Titarchuk L.G. , 1980, A&A, 86, 121-138
- [64] Tanaka, Y. et al., 1995, Nature, 375, 659

- [65] Turner T.J., George I.M., Nandra K. & Mushotzky R.F., 1997, ApJ, 488, 164
- [66] Usui F., Nishida S. & Eriguchi Y., 1998, MNRAS, astro-ph/9804107
- [67] Wang J.-X., Zhou Y.-Y. & Wang T.-G., 1999
- [68] Wijers R.A.M.J. & Pringle J.E., 1999, MNRAS, 308, 207-220