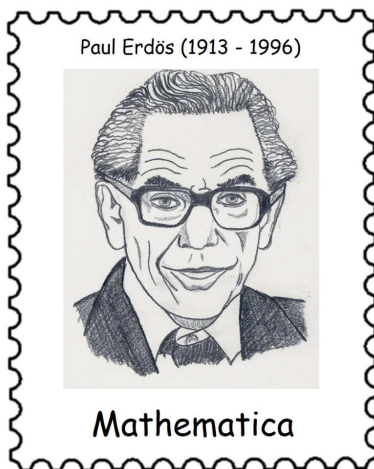


März 2013

Vor 100 Jahren geboren

PAUL ERDŐS

(26.03.1913 - 20.09.1996)



Zeichnung © Andreas Strick 2013

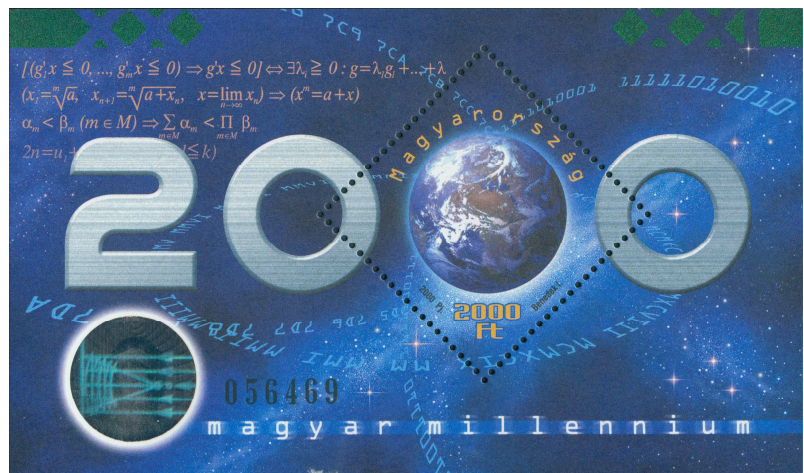
Anlässlich der Jahrtausendwende gab die Ungarische Post einen Briefmarkenblock mit einem Hologramm-Porträt von DÉNES GÁBOR (1900-1979) heraus, dem aus Ungarn stammenden Erfinder des holographischen Verfahrens. Man erkennt außerdem noch Zahlen in verschiedenen Zahlssystemen sowie mathematische Sätze.

Bestrahlt man den Block mit UV-Licht, so wird rund um die Briefmarke eine Aufschrift sichtbar: *Jeles magyar matematikusok* (Hervorragende ungarische Mathematiker), ferner die Namen von 57 ungarischen Mathematikern, darunter auch der von PAUL ERDŐS (in der ungarischen Schreibweise wird der Vorname nachgestellt: ERDŐS PÁL), außerdem

BOLYAI FARKAS, BOLYAI JÁNOS, NEUMANN JÁNOS, SEGNER JÁNOS ANDRÁS.

PAUL ERDŐS gilt wegen der immens großen Zahl an Veröffentlichungen als der *EULER des 20. Jahrhunderts*. Er verfasste über 1500 wissenschaftliche Beiträge zu unterschiedlichen Themen, vor allem über Probleme aus der Zahlentheorie und Kombinatorik, aber auch zur klassischen Analysis, Graphentheorie, Mengenlehre und Wahrscheinlichkeitstheorie. ERDŐS ermunterte über 500 Ko-Autoren zu gemeinsamen Beiträgen; diese können sich der Ehre erfreuen, die ERDŐS-Zahl 1 tragen zu dürfen. (Die ERDŐS-Zahl 2 hat jemand, der einen Artikel zusammen mit einem ERDŐS-Zahl-1-Autor verfasst hat.)

Viele seiner Artikel beschäftigen sich weniger mit einer mathematischen Theorie als mit konkreten Problemen, die oft einfach zu verstehen sind, deren Lösung in der Regel aber äußerst schwierig ist.



MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
				1	2	3
4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17
18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31



Im März 1913 erwartet das jüdische Paar LAJOS und ANNA ERDŐS die Geburt ihres dritten Kindes, als ihre beiden Töchter an Scharlach erkranken und wenige Tage später sterben. So ist es zu verstehen, dass ihr neugeborenes Kind, dem sie den Namen PAUL geben, besonders behütet aufwächst. Als im Sommer 1914 der Weltkrieg ausbricht, wird der Vater zum Militärdienst eingezogen und gerät unmittelbar in russische Kriegsgefangenschaft. Die Mutter sorgt als Mathematiklehrerin für das Familieneinkommen; aus Angst vor ansteckenden Krankheiten lässt sie PAUL zu Hause von einer deutschen Gouvernante erziehen und von Hauslehrern unterrichten. Wenn PAUL Langeweile hat, stöbert er in den Mathematikbüchern seiner Eltern (auch der Vater ist Mathematiker). Später sagt er: *So wurden die Zahlen meine Freunde ...* Mit vier Jahren soll er bei Angabe eines Geburtsdatums in der Lage gewesen sein, im Kopf auszurechnen, seit wie vielen Sekunden diese Person auf der Welt ist.

Nach dem Ende des Weltkriegs - die Siegermächte hatten das ungarische Staatsgebiet auf ein Drittel des Vorkriegsterritoriums verkleinert - wird Ungarn von schweren inneren Unruhen erschüttert. Rumänische Truppen dringen bis nach Budapest vor und stürzen das kommunistische Regime des BÉLA KUN. Der konservative Admiral HORTHY ergreift die Macht und regiert autoritär als *Reichsverweser* das Land (sozusagen in Vertretung der habsburgischen KuK-Monarchie). ANNA ERDŐS, die von den Kommunisten als Schulleiterin eingesetzt worden war, verliert ihre Stelle und muss um ihr Leben fürchten, als HORTHYS Truppen durch die Straßen ziehen, um Juden und Kommunisten ausfindig zu machen und zu töten. Da im kommunistischen Regime besonders viele Juden aktiv waren, erlässt HORTHY Gesetze, welche die Lebensbedingungen der jüdischen Bevölkerung in Ungarn drastisch einschränken.

1920 endlich kehrt der Vater aus Sibirien zurück und kann sich um seine Familie kümmern. In der Kriegsgefangenschaft hat er sich anhand eines Buches Englisch selbst beigebracht und gibt das Gelernte an den Sohn weiter. Da der Vater allerdings nicht weiß, wie die englischen Wörter ausgesprochen werden, eignet sich PAUL ERDŐS einen Akzent an, den er auch später nicht ablegt.

Von 1922 an besucht PAUL ein Gymnasium. Trotz seiner jüdischen Abstammung darf er 1930 ein Mathematik-Studium an der Universität beginnen, da er Sieger bei den traditionellen landesweiten Mathematik-Wettbewerben war.

Bereits ein Jahr später, PAUL ERDŐS ist gerade einmal 18 Jahre alt, findet er einen neuen, eleganten Beweis eines Satzes über Primzahlen, der 1845 von JOSEPH BERTRAND vermutet und 1850 von PAFNUTI TSCHEBYSCHOW sehr aufwendig bewiesen worden war: *Zwischen einer beliebigen natürlichen Zahl n und dem Doppelten dieser Zahl liegt mindestens eine Primzahl.*



Nach seinem Universitätsexamen 1934 nimmt er ein Forschungsstipendium in Manchester und Cambridge an, da ihm als Jude eine Karriere an der Hochschule verweigert wird. Dreimal im Jahr besucht er seine Eltern in Budapest. Als sich jedoch die politische Situation in Mitteleuropa während der Sudetenkrise 1938 zuspitzt, verlässt er panikartig das Land. Von England aus reist er weiter in die USA, wo er vorübergehend einen Lehrauftrag in Princeton annimmt. Der aus Polen stammende STANISŁAW MARCIN ULAM, Schüler von STEFAN BANACH, den ERDŐS seit seinem Aufenthalt in Cambridge kennt, vermittelt ihm danach eine befristete Lehrtätigkeit in Madison.

Von diesem Zeitpunkt an verweilt PAUL ERDŐS nie mehr längere Zeit an einem festen Ort. Bis zu seinem Lebensende wechselt er ständig seinen „Wohnsitz“ und reist mit einem Koffer, in dem sich sein gesamtes Hab und Gut befindet, von einem befreundeten Mathematiker zum nächsten. *My brain is open!* begrüßt er den neuen Gastgeber.

Von 1941 an bis zur Befreiung Ungarns erreichen ihn keine Nachrichten aus seiner Heimat. 1942 stirbt sein Vater; etliche seiner Verwandten kommen in Konzentrationslagern um; seine Mutter überlebt die Schreckenszeit wie durch ein Wunder. Erst 1948 kann ERDŐS wieder seine Heimat besuchen.

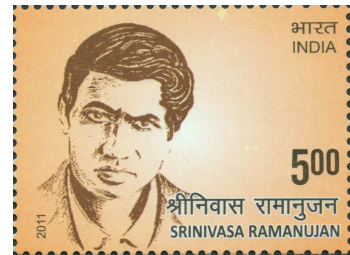
JACQUES SALOMON HADAMARD und CHARLES-JEAN DE LA VALLÉE POUSSIN hatten 1896 als Erste den *Primzahlsatz* bewiesen, der besagt, dass für die Funktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen kleiner gleich x angibt, gilt: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)} \right) = 1$. Im Jahr 1949 ge-

lingt ERDŐS zeitgleich zu ATLE SELBERG ein „elementarer“ Beweis dieses Satzes. Die beiden vereinbaren, ihre Herleitungen gemeinsam in einer Zeitschrift zu veröffentlichen und gegenseitig die Verdienste am neuen Beweisansatz herauszustellen. Allerdings hält sich SELBERG dann nicht an die Absprache; für seine außergewöhnliche Leistung wird dieser im folgenden Jahr mit der FIELDS-Medaille geehrt, der höchsten Auszeichnung, dem NOBEL-Preis vergleichbar. ERDŐS nimmt dies gelassen hin.

1952 nimmt er ein großzügiges Angebot der *University of Notre Dame* (in der Nähe von Chicago) an, das ihm im Hinblick auf seine Lehrverpflichtungen alle Freiheiten lässt. Bei seiner Wiedereinreise nach einem Aufenthalt in Amsterdam wird er einem Verhör unterworfen, in dem er unter anderem nach seiner Meinung über KARL MARX befragt wird. Seine Antwort, dass dieser sicherlich ein bedeutender Mann gewesen sei, gibt möglicherweise den Ausschlag, ihm die Einreise zu verweigern. Allerdings befindet sich in einer FBI-Akte über ihn auch eine Notiz aus dem Jahr 1941, wo er bei einem Spaziergang unwissentlich (weil vertieft in ein Gespräch über ein mathematisches Problem) auf militärisches Gelände geraten war. Als ein Mensch, der regelmäßige Kontakte zu Menschen hat, die in einem kommunistischen Land leben, z. B. zu seiner Mutter, und sogar zu einem Zahlentheoretiker aus dem kommunistischen China, wird er verdächtigt, ein kommunistischer Spion zu sein.

In den nächsten zehn Jahren hält er sich überwiegend in Israel auf (er nennt das Land *Is-real*); das *Technion* (Israel Institute of Technology) in Haifa ernennt ERDŐS zum permanenten Gast-Professor. Trotz zahlreicher Einladungen amerikanischer Universitäten wird ihm erst 1963 wieder erlaubt, in die USA einzureisen. Seine Befürchtung, dass er nach seiner Rückkehr nach Ungarn nicht wieder ausreisen darf, bewahrheitet sich nicht. Allerdings meidet er in den 70er Jahren vorübergehend den Besuch seines Heimatlands aus Protest gegen dessen anti-israelische Politik.

Für seine Leistungen werden ihm zahlreiche Ehrungen zuteil, darunter mindestens 15 Ehrendoktorwürden. Die Preisgelder verwendet er dafür, selbst Preise auszuschreiben - für die Lösung von Problemen, die er stellt, wobei er selbst einschätzt, wie viel ihm eine Lösung wert ist (zwischen 25 \$ und 5000 \$). Auch überweist er Geld an die Witwe RAMANUJANS.



Beispiele von „elementaren“ Vermutungen, die ERDŐS aufstellt:

- Für alle $n > 4$ gilt: Es gibt mindestens eine Primzahl $p < n$, für die gilt, dass p^2 Teiler ist von $\binom{2n}{n}$ - diese Vermutung wird 1996 bewiesen.
- Die Gleichung $\frac{4}{n} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ in der Menge der natürlichen Zahlen lösbar - diese Vermutung ist bis heute für ungerade n noch nicht bewiesen.

1939 beweist ERDŐS, dass die Anzahl $\omega(n)$ der verschiedenen Primfaktoren einer zufällig aus einer hinreichend großen Menge $\{1, 2, \dots, N\}$ gezogenen Zahl n näherungsweise normalverteilt ist mit $\mu = \ln(\ln(N))$ und $\sigma = \sqrt{\ln(\ln(N))}$. Er gehört damit zu den Begründern der *Probabilistischen Zahlentheorie*, in der zahlentheoretische Funktionen mithilfe von Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie untersucht werden.

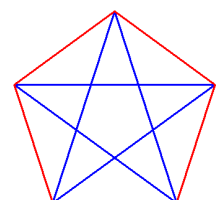
ERDŐS ist der Mann, *der die Zahlen liebt* (so auch der Titel eines Buches über ihn). Beispielsweise nimmt er einen Beitrag im *Journal of Recreational Mathematics*, in dem Paare benachbarter natürlicher Zahlen $(n; n+1)$ betrachtet werden, deren Summe der Primfaktoren gleich ist, zum Anlass, um zu untersuchen, wie *dicht* solche Zahlenpaare in \mathbb{N} verteilt sind. (Beispiel: Für $714 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 17$ gilt: $2 + 3 + 7 + 17 = 29$, und für die folgende Zahl $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$ gilt ebenfalls: $5 + 11 + 13 = 29$).

Ein anderes Beispiel: In der einfachen Multiplikationstabelle der natürlichen Zahlen von 1 bis 10 (also mit $10 \cdot 10 = 100$ Einträgen) treten $M(10) = 43$ verschiedene Ergebnisse auf. 1960 beweist er, dass die Folge $M(n)/n^2$ gegen 0 konvergiert!

Viele seiner Veröffentlichungen beschäftigen sich mit Problemen aus der RAMSEY-Theorie (benannt nach dem 1930 im Alter von nicht einmal 27 Jahren verstorbenen genialen britischen Mathematiker FRANK P. RAMSEY). Bei diesen Problemen geht es um die Suche nach Mindestanzahlen von Elementen in Mengen, für die bestimmte Eigenschaften mit Sicherheit zutreffen. ERDŐS beweist beispielsweise folgende Sätze:

- Betrachtet man die Kanten eines vollständigen Graphen mit genügend vielen Punkten (*vollständig* bedeutet: Jeder Punkt ist mit jedem anderen durch eine Kante verbunden) und färbt diese Kanten beliebig in zwei Farben, dann existiert eine Zahl $R(m, n)$ derart, dass ein vollständiger Teilgraph mit m Kanten in der einen Farbe gefärbt ist und ein vollständiger Teilgraph mit n Kanten in der anderen Farbe. Für die gesuchte Mindestanzahl (RAMSEY-Zahl) $R(m, n)$ von Punkten beweist ERDŐS $R(m, n) \leq R(m-1, n) + R(m, n-1)$ sowie $R(m, n) \leq \binom{m+n-2}{m-1}$.

Beispielsweise ist $R(3, 3) = 6$; denn bei einem vollständigen Graphen mit nur 5 Punkten kann man die Färbung der Kanten so vornehmen, dass es weder einen vollständigen Teilgraphen in der einen Farbe mit 3 Punkten gibt, noch in der anderen Farbe.



- In einer Folge von $m \cdot n + 1$ beliebig angeordneten reellen Zahlen existiert immer eine steigende Teilfolge aus $m + 1$ Elementen oder eine fallende Teilfolge aus $n + 1$ Elementen; oder beides. (Konkretes Zahlenbeispiel: Erzeugt man 50 Zufallszahlen, dann kann man 42 davon so streichen, dass eine steigende oder eine fallende Folge aus 8 Zahlen übrig bleibt.)

ERDŐS gibt zahlreiche Anregungen für Aufgaben, die in Mathematik-Olympiaden gestellt werden, beispielsweise:

- Zwei sich nicht überschneidende Quadrate der Seitenlängen a und b liegen innerhalb eines Quadrates der Seitenlänge 1. Man beweise, dass dann gilt: $a + b \leq 1$.
- Für jede der n ganzen Zahlen a_n gilt, dass $a_n < 1951$, und das kleinste gemeinsame Vielfache von je zwei dieser Zahlen ist stets größer als 1951. Man beweise, dass dann gilt: $\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n} < 2$.

ERDŐS stellt an seine Umwelt wenig Ansprüche; Geld ist für ihn lästig. Er arbeitet oft 20 Stunden am Tag, wobei er sich durch Kaffee und Amphetamine wach hält. (Original-Zitat: *A mathematician is a machine for turning coffee into theorems*.)

Der Tod seiner Mutter, die ihn von 1964 bis 1971 auf seinen „Reisen“ begleitet, stürzt ihn in eine längere Phase der Depression. Bis zu seinem Tod bleibt ERDŐS unverheiratet. Er stirbt an Herzversagen während einer Graphentheorie-Tagung in Warschau.

Im Umgang mit seinen Mitmenschen bedient er sich oft eines eigenwilligen Vokabulars: Kinder bezeichnet er als *Epsilons*, Frauen als *Bosse*, Männer als *Sklaven*, Verheiratete als *Gefangene*, Geschiedene als *Befreite*, eine mathematische Vorlesung als *Predigt*. Gott ist für ihn der *Supreme Fascist* (oder kurz: SF), der Socken und ungarische Pässe verschwinden lässt und die schönsten mathematischen Beweise für sich behält. Er ist der Überzeugung, dass ein Mathematiker nicht unbedingt an die Existenz Gottes zu glauben braucht, aber an *THE BOOK* glauben sollte, in dem alle perfekten Beweise von mathematischen Sätzen stehen.

Wenn ihm ein besonders schöner Beweis vorgelegt wird, erfolgt seine Wertschätzung durch den Ausruf *This one is straight from The Book!*, und wenn ihm ein Beweis nicht gefällt, sagt er *Let's look for The Book proof!*

Mit Begeisterung nimmt ERDŐS die Idee von GÜNTER ZIEGLER und MARTIN AIGNER auf, Beweise zu sammeln, die vermutlich in *THE BOOK* stehen. Einige Vorschläge zur Gestaltung der Sammlung kann er vor seinem Tod noch einbringen. Heute hat das ständig wachsende Werk *Das BUCH der Beweise* (engl. *Proofs from THE BOOK*, frz. *Raisonnements divins*) die 4. Auflage erreicht; zurzeit liegen Übersetzungen in 14 Sprachen vor.

