Februar 2006

vor 150 Jahren gestorben Nikolai LOBATSCHEWSKI (01.12.1792 – 23.02.1856)

Auf den sowjetischen Briefmarken von 1951 und 1956 wird NIKOLAI IWANOWITSCH LOBATSCHEWSKI als „großer russischer Geometer" bzw. „großer russischer Mathematiker" bezeichnet. Er wurde in Nischni-Nowgorod geboren. Als Vater 1799 starb, zog die Mutter nach Kasan an der mittleren Wolga. Dort begann er mit 15 Jahren an der gerade neu gegründeten Universität zunächst ein Medizin-Studium, wechselte aber ein Jahr später zur Mathematik. Als Mathematikprofessor war MARTIN BARTELS, ein Freund von CARL FRIEDRICH GAUSS (1777-1855), berufen worden, der vorher als Lehrer in Deutschland tätig war. LOBATSCHEWSKI beendete sein Mathematik-Studium mit 19 Jahren, mit 24 Jahren wurde er zum Professor an der Universität zu Kasan ernannt, später wurde er Dekan und Rektor dieser Hochschule.

Bereits mit 22 Jahren beschäftigte er sich mit der Frage, welche Bedeutung das so genannte Parallelenaxiom hat, das ist das fünfte Postulat der Geometrie des EUKLID. Mit diesem Postulat hatten sich viele Mathematiker seit dem Altertum beschäftigt, aber erst LOBATSCHEWSKI, GAUSS und JANOS BOLYAI gelangen fast zeitgleich entscheidende, neue Erkenntnisse; sie fanden jedoch zu ihren Lebzeiten keine Anerkennung. LOBATSCHEWSKI selbst wurden zwar ebenfalls hohe Ehrungen zuteil, wie beispielsweise die Erhebung in den erblichen Adelsstand; dies geschah jedoch nicht wegen seiner Entdeckung/Erfindung einer neuen Geometrie. Seine 1840 erschienenen „Geometrischen Untersuchungen der Theorie der Parallelen" wurden von den meisten als verrückte Ideen eines ansonsten verdienten Wissenschaftlers angesehen.

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28					

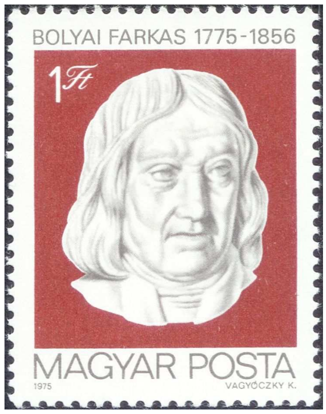
Euklid hatte um 300 v.Chr. im 1. Band seiner „Elemente“ ein System von fünf Postulaten aufgestellt, aus denen sich alle geometrischen Sätze herleiten lassen sollten:

1. Zwei Punkte lassen sich stets durch eine Strecke verbinden.
2. Eine Strecke lässt sich immer zu einer Gerade verlängern.
3. Ein Kreis ist durch Angabe des Mittelpunktes und des Radius festgelegt.
4. Alle rechten Winkel sind zueinander gleich.
5. Wenn eine Gerade zwei Geraden schneidet und mit ihnen auf derselben Seite innere Winkel bildet, die zusammen kleiner sind als zwei rechte Winkel, dann schneiden sich die beiden Geraden auf derjenigen Seite, auf der die beiden Winkel liegen, die zusammen kleiner sind als zwei rechte Winkel.

Es fällt auf, dass sich das 5. Postulat in der Art der Formulierung deutlich von den anderen vier Postulaten unterscheidet. Vergeblich bemühten sich viele bedeutende Mathematiker zu zeigen, dass dieses Postulat aus den ersten vier Postulaten hergeleitet werden kann. Im Laufe der Zeit wurden andere äquivalente Systeme von Postulaten entdeckt. Das 5. Postulat lässt sich beispielsweise ersetzen durch:

„Zu einer Geraden g und einem Punkt P, der nicht auf der Geraden liegt, kann man genau eine Gerade zeichnen, die durch P verläuft und zu g parallel ist.“

Diese Formulierung wird manchmal auch als „Parallelenaxiom“ bezeichnet. Andere äquivalente Formulierungen sind: „Die Summe der Innenwinkel in einem Dreieck ist 180°.“ oder „Stufenwinkel an geschnittenen Parallelen sind gleich groß.“ Gauss erkannte um 1817, dass sich das Parallelenaxiom nicht aus den ersten vier Postulaten herleiten lässt und untersuchte die Frage, welche Art von Geometrie sich ergibt, wenn man das fünfte Postulat als nicht gültig ansieht. Er diskutierte seine Ansätze zwar mit einem Freund, dem ungarischen Mathematiker Farkas Bolyai (1775-1856), scheute sich aber, seine Überlegungen zu veröffentlichen, hatte doch der Philosoph Immanuel Kant wenige Jahre zuvor in seiner „Kritik der reinen Vernunft“ in autoritärer Weise festgestellt, dass die Geometrie des Euklid denknotwendig, also unumstößlich wahr, sei.



Farkas Bolyais Sohn Janos Bolyai (1802-1860) setzte sich jedoch über die Bedenken seines Vaters hinweg und entwickelte ab 1823 eine „neue“ Geometrie ohne das Parallelenaxiom.

Im fernen Kasan hielt Nikolai Iwanowitsch Lobatschewski - ohne Kenntnis der Untersuchungen von Janos Bolyai – im Jahr 1826 einen Vortrag über eine „imaginäre“ Geometrie: Zu einer gegebenen Geraden g sollten mindestens zwei parallele Geraden existieren, die durch einen gegebenen Punkt verlaufen (der nicht auf g liegt).

In den folgenden Jahren veröffentlichte er mehrere Aufsätze, die im Westen Europas nicht bekannt wurden; erst ein Beitrag, der 1837 in französischer Sprache erschien, machte die Mathematik-Welt auf das Genie im Osten aufmerksam. GAUSS war so sehr von den Arbeiten über die „nicht-EUKLIDische Geometrie" (die Bezeichnung stammt von GAUSS) beeindruckt, dass er die Ernennung von LOBATSCHEWSKI zum korrespondierenden Mitglied der Universität Göttingen veranlasste.

Die LOBATSCHEWSKI-Geometrie wird auch als „hyperbolische Geometrie" bezeichnet; die Bezeichnung weist darauf hin, dass eine Veranschaulichung (Modell) auf einem Hyperboloid möglich ist; dies wurde jedoch erst nach LOBATSCHEWSKIs Tod entdeckt.

Das geänderte 5. Postulat hat überraschende Konsequenzen: In einem Dreieck ist die Summe der Innenwinkel stets kleiner als 180°. - Stimmen zwei Dreiecke in den Winkeln überein, dann sind sie zueinander kongruent. - Die Menge aller Punkte, die von einer gegebenen Geraden denselben Abstand haben und in derselben Halbebene dieser Geraden liegen, bilden selbst keine Gerade. - Durch drei Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen, kann man nicht immer einen Kreis zeichnen. - u.a.m.

LOBATSCHEWSKI wurde als Hochschullehrer und Rektor große Anerkennung zuteil; sein Buch über Analysis enthielt eine Reihe von neuen Einsichten und Methoden, darunter ein Verfahren zur iterativen Bestimmung von Nullstellen von Polynomen n-ten Grades:

Hat z.B. ein Polynom 3. Grades die Nullstellen r_1, r_2, r_3 mit $|r_1|>|r_2|>|r_3|$, dann gilt:

$f(x) = x^3+a_2x^2+a_1x+a_0 = (x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)$ mit $a_2=-(r_1+r_2+r_3)$, $a_1=r_1r_2+r_1r_3+r_2r_3$, $a_0=-r_1r_2r_3$

Hieraus ergibt sich eine weitere Funktion 3. Grades, deren Nullstellen die Quadrate der ursprünglichen Nullstellen sind:

$f_1(x) = -f(\sqrt{x})\cdot f(-\sqrt{x}) = (x-r_1^2)(x-r_2^2)(x-r_3^2) = x^3+b_2x^2+b_1x+b_0$ mit

$b_2=-(r_1^2+r_2^2+r_3^2)=-a_2^2+2a_1$, $b_1=r_1^2r_2^2+ r_1^2r_3^2+ r_2^2r_3^2=a_1^2-2a_2a_0$, $b_0=- r_1^2r_2^2r_3^2=-a_0^2$

Bei Fortsetzung des Verfahrens liegen die Nullstellen immer weiter auseinander, da sie quadriert werden, auch die Koeffizienten der Polynome nehmen betraglich zu.

Aus $f(x) = x^3+3x^2-4x-2$ wird $f_1(x) = x^3-17x^2+28x-4$, $f_2(x) = x^3-233x^2+648x-16$ und $f_3(x) = x^3-52993x^2+412448x-256$

Die Quotienten aufeinander folgender Koeffizienten liefern immer bessere Näherungswerte für die Nullstellen (deren Vorzeichen erhält man durch Ausprobieren):

$$-\frac{b_2}{b_3}=-\frac{-17}{1}=\frac{r_1^2+r_2^2+r_3^2}{1}\approx r_1^2,\quad -\frac{b_1}{b_2}=-\frac{28}{-17}=\frac{r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2}{r_1^2+r_2^2+r_3^2}=\frac{r_2^2+r_3^2+\frac{r_2^2r_3^2}{r_1^2}}{1+\frac{r_2^2}{r_1^2}+\frac{r_3^2}{r_1^2}}\approx r_2^2$$

$$-\frac{b_0}{b_1}=-\frac{-4}{28}=\frac{r_1^2r_2^2r_3^2}{r_1^2r_2^2+r_1^2r_3^2+r_2^2r_3^2}=\frac{r_3^2}{1+\frac{r_3^2}{r_2^2}+\frac{r_3^2}{r_1^2}}\approx r_3^2$$, also $r_1\approx -4{,}12$; $r_2\approx 1{,}28$; $r_3\approx -0{,}38$

Aus dem Polynom $f_3(x)$ erhält man die Nullstellen bereits mit 3-stelliger Genauigkeit

$$r_1\approx-\sqrt[8]{52993}\approx-3{,}895;\ r_2\approx\sqrt[8]{\frac{412448}{52993}}\approx1{,}292;\ r_3\approx-\sqrt[8]{\frac{256}{412448}}\approx-0{,}397$$