Mai 2011

Vor 190 Jahren geboren **P. L. Tschebyschow** (16.05.1821 – 08.12.1894)

Pafnuti Lwowitsch Tschebyschow wächst zusammen mit acht Geschwistern auf einem Landgut in der Nähe von Kaluga (südwestlich von Moskau) auf. Der Vater, ein adliger Offizier im Ruhestand, überlässt Erziehung und Unterricht der Mutter und einer Verwandten. Der Junge hat schon in frühen Jahren intensiven Unterricht in der französischen Sprache, was dazu führt, dass er die Mehrzahl seiner wissenschaftlichen Abhandlungen zunächst in Französisch verfasst, bevor er sie ins Russische überträgt. Später, als Tschebyschow in St. Petersburg tätig ist, vergeht kaum ein Jahr, in dem er nicht zu Forschungs- und Vortrags-zwecken nach Frankreich reist.

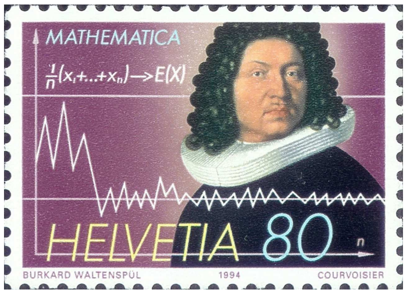
Als der Junge elf Jahre alt ist, zieht die Familie nach Moskau, wo ihn ein äußerst kompetenter Hauslehrer in Mathematik unterrichtet, sodass er in der Lage ist, mit 16 Jahren an der Moskauer Universität ein Mathematikstudium aufzunehmen. Er hört Vorlesungen bei Nikolai Dmetrijewitsch Braschman, dessen besonderes Interesse an angewandter Mathematik (wie beispielsweise Wahrscheinlichkeitstheorie) bei Tschebyschow auf fruchtbaren Boden fällt.

Tschebyschows erste wissenschaftliche Abhandlung (über Mehrfachintegrale) erscheint – in Französisch – in einer von Joseph Liouville in Paris herausgegebenen Zeitschrift; weitere Beiträge werden in *Crelle's Journal* in Berlin veröffentlicht, darunter auch der Beweis des schwachen Gesetzes der großen Zahlen (der Satz stammt von Jacob Bernoulli, die Bezeichnung von Siméon Denis Poisson).

Da in Moskau keine passende Stelle für ihn frei ist, wechselt er nach seinem Examen nach St. Petersburg. Dort erhält er 1850 eine außerordentliche Professur, die erst zehn Jahre später in eine ordentliche Professur umgewandelt wird.

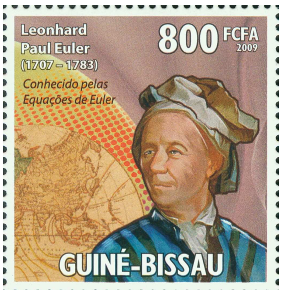
Längst aber hat Tschebyschow durch seine Arbeiten internationale Anerkennung gefunden…

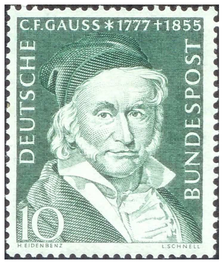
MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
						1
2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15
16	17	18	19	20	21	22
23	24	25	26	27	28	29
30	31					



Der Name Tschebyschows ist untrennbar mit der Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung verbunden: Mithilfe der von ihm aufgestellten (und heute daher so genannten) Tschebyschow-Ungleichung gelingt ihm der Beweis des *Bernoulli'schen schwachen Gesetzes der großen Zahlen*, das eine Aussage macht über die stochastische Konvergenz des arithmetischen Mittelwerts von endlich vielen Zufallsgrößen X_1, X_2, …, X_n gegen den gemeinsamen Erwartungswert $E(X)$ dieser Zufallsgrößen: $\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}(X_1+X_2+\ldots+X_n)-E(X)\right|\geq\varepsilon\right)=0$.

Besonders bemerkenswert an der Tschebyschow-Ungleichung ist, dass durch sie ein „einfacher" Zusammenhang zwischen einer Zufallsgröße X, ihrem Erwartungswert μ und der zugehörigen Varianz $V(X)$ bzw. der Standardabweichung σ beschrieben wird, der zudem noch mit vergleichsweise elementaren Überlegungen bewiesen werden kann. Die Ungleichung lässt sich auf verschiedene Weise formulieren: Für beliebiges $\varepsilon \in$ IR gilt: $P(|X-\mu|\geq\varepsilon)\leq\left(\frac{\sigma}{\varepsilon}\right)^2$, oder, wenn man ε durch k · σ ersetzt: $P(|X-\mu|\geq k\sigma)\leq\frac{1}{k^2}$ oder: $P(|X-\mu|<k\sigma)\geq 1-\frac{1}{k^2}$. Für *beliebige* Verteilungen gilt also beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 75 % die Werte der Zufallsgröße X innerhalb der 2σ-Umgebung des Erwartungswerts μ liegen, mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens ca. 89 %, dass sie innerhalb der 3σ-Umgebung liegen. Dies gilt für *beliebige* Wahrscheinlichkeitsverteilungen mit endlichen Werten von μ und σ, für Binomial- und Normalverteilungen können bekanntlich Aussagen mit höheren Wahrscheinlichkeiten formuliert werden (95,5 % bzw. 99,7 %).



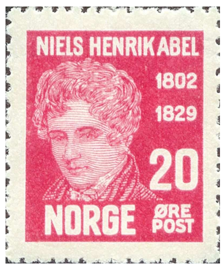


Im Rahmen seiner Doktorarbeit beschäftigt sich Tschebyschow mit der Frage, wie die Primzahlen verteilt sind. Anregungen hierfür findet er in den zahlentheoretischen Arbeiten Leonhard Eulers, die er zusammen mit Wiktor Jakowlewitsch Bunjakowski herausgibt. Bereits Ende des 18. Jahrhunderts hatten Carl-Friedrich Gauss und Adrien-Marie Legendre einen Zusammenhang zwischen der Primzahlfunktion $\pi(x)$, welche die Anzahl der Primzahlen angibt, die kleiner als x sind, und den Funktionswerten von $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$ vermutet und erste Abschätzungen vorgenommen. In seiner Arbeit *Sur la fonction qui détermine la totalité des nombres premiers inférieurs à une limite donnée* kann Tschebyschow zeigen, dass für den Quotienten der beiden Funktionen gilt: $0{,}92929\leq\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}\leq 1{,}1056$, was die Abweichungen zwischen beiden Funktionen auf ungefähr 10 % nach oben und unten einschränkt. Aus Untersuchungen der Funktion $f(x)$ sowie von $Li(x)=\int_2^x\frac{1}{\ln(t)}dt$ folgert er: Falls der Grenzwert $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}\right)$ überhaupt existiert, dann muss dieser gleich 1 sein.

Der Beweis des Primzahlsatzes $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\pi(x)}{x/\ln(x)}\right)=1$ gelingt erst 1896, zwei Jahre nach Tschebyschows Tod, unabhängig voneinander den beiden französischen Mathematikern Jacques Salomon Hadamard und Charles-Jean de La Vallée Poussin.

1846 hatte Joseph Louis François Bertrand eine weitere Vermutung über die Verteilung der Primzahlen formuliert: *Zwischen einer natürlichen Zahl n und dem Doppelten dieser Zahl gibt es mindestens eine Primzahl.* Tschebyschow kann die Bertrand'sche Vermutung 1851 mithilfe seiner Abschätzungen über die Primzahlverteilung beweisen. 50 Jahre später würdigt der deutsche Mathematiker Edmund Landau die Verdienste Tschebyschows mit den Worten: „Im allgemeinen Primzahlproblem hat nach Euklid erst Tschebyschow die ersten weiteren sicheren Schritte gemacht und wichtige Sätze bewiesen."

Bereits als Kind hat sich Tschebyschow für die Konstruktion von mechanischen Modellen interessiert – wegen einer Gehbehinderung kann er sich an den Spielen im Freien mit anderen Kindern nicht beteiligen. Seine späteren Reisen nach Frankreich verbindet er stets mit der Besichtigung von Fabriken und technischen Anlagen. Dabei beschäftigt ihn insbesondere das Problem, wie beispielsweise bei Dampfmaschinen die Auf- und Abbewegung der Kolben mithilfe des Gestänges in eine Kreisbewegung umgesetzt werden kann, ohne dass das Material allzu sehr strapaziert wird. Es gelingt ihm, die von James Watt durch Experimente gefundene Lösung mithilfe theoretischer Überlegungen weiter zu verbessern (Tschebyschow-Parallelogramm). In diesem Zusammenhang gibt er den Anstoß für ein neues mathematisches Forschungsgebiet, die Approximationstheorie. Hierzu gehört beispielsweise die Frage, durch welches Polynom (n-1)-ten Grades die Potenzfunktion x^n am besten angenähert werden kann. 1854 gelingt es ihm, solche Polynome aufzustellen (Tschebyschow-Polynome), durch die eine bessere Approximation als durch Taylor-Polynome möglich ist.



Weitere Veröffentlichungen Tschebyschows beschäftigen sich in der Nachfolge von Niels Henrik Abel mit der Weiterentwicklung der Integralrechnung elliptischer Funktionen, mit der kartografischen Erfassung Russlands (Fortsetzung der Arbeiten Eulers) und der Konstruktion einer Rechenmaschine, die in den 1870er Jahren auch tatsächlich gebaut wird.

Tschebyschow genießt internationales Ansehen; er steht in direktem und in brieflichem Kontakt mit vielen Mathematikern seiner Zeit. Er wird Ehrenmitglied zahlreicher ausländischer Universitäten. Als Hochschullehrer ist er beliebt, weil er seine Vorlesungen auf wesentliche Aspekte der behandelten Themen beschränkt und diese pointiert vorträgt, aber auch weil er die Sitzungen immer pünktlich beendet. Alexander Michailowitsch Ljapunow und Andrei Andrejewitsch Markow, seine berühmtesten Studenten, setzen seine Arbeit fort.