

Das kleinste Achteck

Vor Ihnen liegt ein Bogen kariertes Papier mit der Karogröße 1×1 . Zeichnen Sie darauf ein Achteck, dessen Ecken alle mit den Quadratecken des Blattes zusammenfallen und dessen Seiten die Längen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 und 8 haben, wenn auch nicht unbedingt in dieser Reihenfolge. Wie groß ist der kleinstmögliche Flächeninhalt des Achtecks? Das Achteck braucht nicht konvex zu sein, aber es darf nicht überschlagen oder so entartet sein, dass Seiten aufeinander fallen.

Lösung

Alle Ecken des Achtecks sind Schnittpunkte der Karorasterlinien. Darum können die Seiten des Achtecks entweder nur mit Rasterlinien zusammenfallen oder sie können die Hypotenusen von rechtwinkligen Dreiecken sein, deren Ecken Rasterschnittpunkte und deren Katheten Rasterlinien sind.

Der zweite Fall ist nur dann möglich, wenn nach dem Satz des Pythagoras

$$a^2 + b^2 = c^2$$

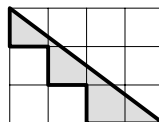
gilt, wobei c eine der Achteckseiten von 1 bis 8 ist und a und b die ganzzahligen Katheten sind. Es lässt sich leicht überprüfen, dass diese Gleichung nur für $c = 5$ eine ganzzahlige Lösung hat.

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

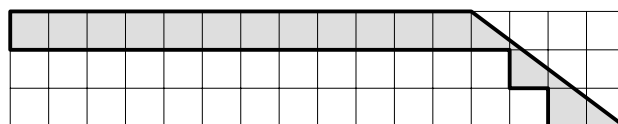
Folglich fallen alle Seiten des Achtecks mit Rasterlinien zusammen, nur die Seiten der Länge 5 kann auch schräg verlaufen.

Das Achteck hat den Umfang $1 + 2 + \dots + 8 = 36$. Das Rechteck, mit dem kleinsten Flächeninhalt, dessen vier Ecken alle auf Rasterpunkten liegen, ist ein schmaler Streifen, der Länge 17 und der Breite 1. Sein Inhalt beträgt somit 17. Der Inhalt der Streifen ändert sich nicht, wenn er ein- oder mehrfach abknickt, sofern seine Breite nur immer 1 beträgt. Ein Achteck vom Umfang 36, dessen Ecken alle mit Rasterpunkten zusammenfallen, kann keinen kleineren Inhalt haben als dieser Streifen.

Nun berücksichtigen wir noch, dass es eine schräg verlaufende Seite der Länge 5 geben kann. Die Figur mit dem kleinstmöglichen Flächeninhalt, bei der alle Ecken auf Rasterpunkten liegen und eine Seite die Länge 5 hat, ist das skizzierte Siebeneck. Es hat einen Umfang von 12 und einen Inhalt von 3.



Setzt man an diese Figur einen schmalen Streifen der Größe 12×1 , vergrößert sich sein Umfang auf 36 und sein Inhalt auf 15. Fügt man dabei von den beiden Figuren je eine Seite der Länge 1 aneinander, bleiben immer nur vier Seiten der Länge 1 übrig.



Das gesuchte Achteck darf aber nur eine Seite der Länge 1 besitzen. Also muss sein Flächeninhalt mindestens 16 sein. Für diesen Wert lässt sich auch tatsächlich eine Lösung finden.

