

Mai 2019

Vor 66 Jahren gestorben **ERNST ZERMELO** (27.07.1871 - 21.05.1953)

Ernst Zermelo (1871 - 1953)



Mathematica

Das in der „Mathematica“-Briefmarke links verwendete Foto aus dem Archiv des Mathematischen Forschungsinstituts in Oberwolfach (MFO) zeigt den 81-jährigen ERNST FRIEDRICH FERDINAND ZERMELO kurz vor seinem Tod im Jahr 1953.

Geboren wird ERNST ZERMELO als Sohn eines Gymnasialprofessors in Berlin; durch sein häusliches Umfeld erfährt er während der Schulzeit die bestmögliche Förderung. Nach Bestehen der Abiturprüfung am Luisenstädtischen Gymnasium beginnt er ein breit angelegtes Studium mit Schwerpunkten in Mathematik, Physik und Philosophie. Wie damals

üblich, studiert er auch einige Semester an anderen Universitäten (Halle, Freiburg).

1894 wird ZERMELO in Berlin mit einer Arbeit zum Thema *Untersuchungen zur Variations-Rechnung* promoviert (Betreuer: LAZARUS IMMANUEL FUCHS, HERMANN AMANDUS SCHWARZ); in dieser Arbeit erweitert er die von KARL WEIERSTRASS entwickelten Methoden zur Ermittlung der Extrema von Integralen.

Nach seiner Promotion erhält er eine feste Assistentenstelle am Lehrstuhl für theoretische Physik bei MAX PLANCK. Im Rahmen dieser Tätigkeit beschäftigt er sich vor allem mit Fragen der Hydrodynamik, einem Teilgebiet der Strömungslehre. 1897 wechselt er nach Göttingen, wo er 1899 seine Forschungen im Hinblick auf seine Habilitationsschrift vollenden kann (*Hydrodynamische Untersuchungen über Wirbelbewegungen in einer Kugelfläche*).

In den folgenden Semestern übernimmt der 28-jährige Privatdozent - passend zu seinen Promotions- und Habilitationsthemen - in Göttingen Vorlesungen zur statistischen Mechanik und zur Variationsrechnung. Im Wintersemester 1900-1901 wechselt ZERMELO zu einem Thema, das vollkommen von seinen bisherigen Schwerpunkten abweicht: Von nun an geht es in seinen Vorlesungen vor allem um die von GEORG CANTOR begründete Mengenlehre.



Georg Cantor (1845 - 1918)

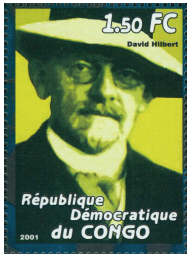


Mathematica

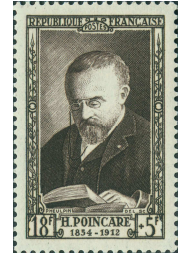
(Zeichnung: © Andreas Strick)

MO	DI	MI	DO	FR	SA	SO
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

In den 1870er-Jahren hatte CANTOR mit seinen Entdeckungen (Abzählbarkeit der Menge der rationalen und der algebraischen Zahlen, Überabzählbarkeit der transzendenten Zahlen) viele Mathematiker beunruhigt. Die Meinungen der zeitgenössischen Fachkollegen hierüber gingen weit auseinander: Für die einen war CANTOR ein Verderber der Jugend (KRONECKER), für die anderen ein begnadeter Forscher (DAVID HILBERT 1925: *Aus dem Paradies, das CANTOR uns geschaffen hat, soll uns niemand vertreiben können.*) Als CANTOR später selbst auf Paradoxien stößt, die mit der



Definition einer Menge zusammenhängen, sieht sich HENRI POINCARÉ, neben HILBERT wohl der bedeutendste Mathematiker seiner Zeit, in seiner Ansicht über die Mengenlehre bestätigt: *Der größte Teil der Ideen der CANTOR'schen Mengenlehre sollte ein für alle Mal aus der Mathematik verbannt werden.*



1878 hatte CANTOR die sogenannte *Kontinuumshypothese* formuliert: *Es gibt keine Menge, deren Mächtigkeit zwischen der Mächtigkeit der natürlichen Zahlen und der Mächtigkeit der reellen Zahlen liegt.* (Es gibt zwar unendliche Mengen, deren Mächtigkeit größer ist als die der reellen Zahlen, aber - so die Hypothese - keine Mengen, die überabzählbar sind und deren Mächtigkeit kleiner ist als die der reellen Zahlen.)

Bis zum berühmten Mathematikerkongress in Paris im Jahr 1900 gibt es keine Fortschritte im Hinblick auf die Klärung der Frage, ob die Kontinuumshypothese gilt. In seiner Liste der wichtigsten zu lösenden Probleme setzt HILBERT dies auf Platz 1. Er geht aber davon aus, dass sich weitere Untersuchungen erübrigen, wenn zuvor eine weitere Vermutung CANTORS bewiesen wird: *Für jede Menge existiert eine Ordnungsrelation bzgl. welcher diese Menge als „wohlgeordnet“ bezeichnet werden kann.*

Eine Menge M heißt *wohlgeordnet*, wenn es eine Ordnungsrelation \triangleleft gibt, sodass gilt:

- Für je zwei Elemente $a, b \in M$ gilt entweder $a \triangleleft b$ oder $b \triangleleft a$ oder $a = b$. (Trichotomie)
- Für je drei Elemente $a, b, c \in M$ folgt aus $a \triangleleft b$ und $b \triangleleft c$, dass $a \triangleleft c$. (Transitivität)
- Jede nichtleere Teilmenge von M hat ein kleinstes Element.

Beispiele: Die Menge der natürlichen Zahlen ist offensichtlich mit der gewöhnlichen Ordnungsrelation „ $<$ “ wohlgeordnet, weil man für jede Teilmenge jeweils ein kleinstes Element angeben kann. Die Menge der ganzen Zahlen in ihrer üblichen Ordnung ist *nicht* wohlgeordnet; die Elemente dieser Menge können aber so angeordnet werden, dass eine Wohlordnung entsteht, z. B. durch die Anordnung $0, +1, -1, +2, -2, \dots$. Offensichtlich ist jede abzählbare Menge wohlgeordnet, denn durch das Abzählen der Elemente wird eine Wohlordnung der Menge hergestellt.

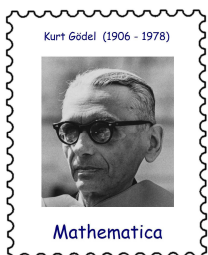
Im Jahr 1901 veröffentlicht ZERMELO einen ersten Beitrag zur Mengenlehre, in diesem setzt er sich mit der Frage auseinander, wie transfiniten Kardinalzahlen addiert werden können. CANTOR hatte im Rahmen seiner Mengenlehre den Begriff der *Kardinalzahl* (Mächtigkeit) eingeführt: Bei endlichen Mengen ist dies gleich der Anzahl der Elemente der betreffenden Menge; bei unendlichen Mengen verwendet er die transfiniten Kardinalzahlen \aleph_0 für abzählbare Mengen und \aleph_1 für die Menge der reellen Zahlen (unter der Annahme der Gültigkeit der Kontinuumshypothese).

1904 dann erscheint ZERMELOS Abhandlung *Beweis, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann*. Wesentlich für seine Beweisführung ist ein Axiom, also ein eigentlich unmittelbar einleuchtender Grundsatz, der keines Beweises bedarf, das sog.

Auswahlaxiom: Zu jeder Menge von zueinander disjunkten nicht-leeren Mengen existiert eine Funktion, durch die jeder dieser Mengen genau ein Element aus dieser Menge zugeordnet wird, also genau ein Element aus dieser Menge ausgewählt wird.

1908 veröffentlicht ZERMELO ein erstes Axiomensystem zur Mengenlehre, das u. a. ein *Aussonderungsaxiom* enthält, um das ZERMELO-RUSSELL-Paradox (*Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten*) zu umgehen. Es gelingt ihm jedoch nicht zu zeigen, dass dieses System in sich konsistent (widerspruchsfrei) ist. Daher drängt DAVID HILBERT darauf, die Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme innerhalb der verschiedenen Gebiete der Mathematik zu überprüfen (HILBERTS Programm).

1922 entdeckt ADOLF ABRAHAM FRAENKEL eine Lücke im Axiomensystem ZERMELOS und schlägt Ergänzungen vor. 1930 veröffentlicht ZERMELO eine endgültige Fassung. In der Literatur wird das ZERMELO-FRAENKEL-Axiomensystem von 1930 kurz mit ZF bzw. mit ZFC abgekürzt - je nachdem, ob das Auswahlaxiom (engl. *Axiom of Choice*) mit



hinzugenommen wird oder nicht. Man hat später beweisen können, dass das Auswahlaxiom nicht aus den anderen Axiomen der Mengenlehre abgeleitet werden kann. Der Beweis, dass das ZFC-System widerspruchsfrei ist, gelang nicht; vielmehr zeigte KURT GÖDEL, dass ein solcher Beweis im Rahmen des ZFC-Systems nicht möglich ist (*Zweiter Unvollständigkeitssatz*).

Durch den Beweis des *Wohlordnungssatzes* im Jahr 1904 ist ZERMELO auf einen Schlag berühmt geworden; die Universität Göttingen verleiht ihm den Titel eines Professors, hat aber keine Ordinariatsstelle für ihn. Als er 1906 an Tuberkulose erkrankt, muss er seine Vorlesungs- und Forschungstätigkeit erheblich einschränken; Kuraufenthalte in der Schweiz und in Italien haben nur vorübergehende Wirkung. Nach verschiedenen erfolglosen Bewerbungen wird er 1910 endlich Ordinarius an der Universität Zürich, kann aber den Verpflichtungen seines neuen Amtes kaum nachkommen. Trotz verschiedener chirurgischer Eingriffe (u. a. bei FERDINAND SAUERBRUCH) tritt keine Besserung ein, sodass die Universitätsleitung ZERMELO nahelegt, den vorzeitigen Ruhestand zu beantragen. Um ZERMELOS geringe Pensionseinkünfte aufzustocken, veranlasst HILBERT, dass ZERMELO 5000 Reichsmark aus den Zinserträgen der WOLFSKEHL-Stiftung zuerkannt werden.

1921 siedelt ZERMELO in den Schwarzwald um. In den 1920er-Jahren veröffentlicht er noch eine Reihe von Schriften, u. a. zur Einschätzung der Spielstärke von Teilnehmern an Schachturnieren und zur Navigation von Luftschiffen als ein Problem der Variationsrechnung. Er beginnt mit der Übersetzung der *Odyssee* des HOMER und stellt die gesammelten Werke von GEORG CANTOR zusammen, die dann 1932 erscheinen.

1926 wird ZERMELO von der Universität Freiburg zum Honorarprofessor ernannt, und er übernimmt wieder einzelne Vorlesungen. Als er sich 1935 weigert, seine Vorlesungen mit dem Hitlergruß zu beginnen, und er sich außerdem noch (halb-)öffentlich abfällig über den „Führer“ und das „3. Reich“ äußert, droht ihm ein Disziplinarverfahren, an dessen Ende der Entzug der Lehrerlaubnis und die Entfernung von der Universität stehen würde. Dieser Entscheidung entzieht sich der 64-Jährige durch eine Verzichtserklärung an den Dekan der Fakultät.

1946 wird ZERMELO rehabilitiert und auf Antrag des Hochschulsenats erneut zum ordentlichen Honorarprofessor an der Universität Freiburg ernannt; da er mittlerweile aber fast blind ist, kann er keine Lehrtätigkeit mehr aufnehmen. ERNST ZERMELO stirbt 1953 - in seinem 82. Lebensjahr - in Freiburg.