Das Paradox der unerwarteten Klassenarbeit a la Gödel

Zum Wochenende kündigt die Lehrerin ihrer Klasse einen Test für die kommende Woche an. Der Test werde also frühestens am Montag, spätestens am Freitag geschrieben, und er werde die Schüler in dem Sinne überraschen, dass sie am Morgen vor Beginn des Schultages nicht sicher sein werden, ob der Test an diesem Tage stattfinde.

Schüler Paul überlegt nun so: Am Freitag kann der Test nicht stattfinden, denn dann käme er nicht mehr überraschend. Der Test findet also im Zeitraum Montag bis Donnerstag statt. Dann kann er aber natürlich auch nicht am Donnerstag stattfinden. Schließlich kommt Paul zu dem Schluss, dass der Test gar nicht stattfinden kann. Paul geht also entspannt ins Wochenende. Dann aber wird am Mittwoch der Test geschrieben, und Paul ist völlig überrascht. Wo aber liegt Pauls Denkfehler?

Um dies zu klären, soll versucht werden, Pauls Argumentation zu formalisieren (vgl. R.M. Sainsbury: „Paradoxien“). Dazu werden einige Bezeichnungen eingeführt:

a_1 :⇔ “der Test wird am Montag geschrieben”.
$B_1(r)$:⇔ “es ist Montag vor Schulbeginn und Paul glaubt die Aussage r (d.h. Paul ist davon überzeugt, dass die Aussage r wahr ist)”.
a_2 :⇔ “der Test wird am Dienstag geschrieben”.
$B_2(r)$:⇔ “es ist Dienstag vor Schulbeginn und Paul glaubt die Aussage r”.
…
a_5 :⇔ “der Test wird am Freitag geschrieben”.
$B_5(r)$:⇔ “es ist Freitag vor Schulbeginn und Paul glaubt die Aussage r”.

p_5 :⇔ $(a_1 \,\&\, {\sim}B_1(a_1)) \vee \ldots \vee (a_4 \,\&\, {\sim}B_4(a_4)) \vee (a_5 \,\&\, {\sim}B_5(a_5))$.
p_4 :⇔ $(a_1 \,\&\, {\sim}B_1(a_1)) \vee \ldots \vee (a_4 \,\&\, {\sim}B_4(a_4))$.
…
p_1 :⇔ $(a_1 \,\&\, {\sim}B_1(a_1))$.

Es wird nun angenommen, dass die Lehrerin die Aussage p_5 behauptet. Die Paradoxie besteht dann darin, dass Paul aus p_5 scheinbar ${\sim}p_5$ ableiten kann, obwohl sich p_5 als wahr erweisen mag.

Wie argumentiert Paul nun? Im ersten Schritt versucht Paul, von p_5 auf p_4 zu schließen. Er schließt zunächst korrekt von p_5 auf ${\sim}p_4 \rightarrow (a_5 \,\&\, {\sim}B_5(a_5))$. Um hiermit aber von ${\sim}p_4$ auf einen Widerspruch und somit auf p_4 zu schließen, unterstellt Paul, dass aus ${\sim}p_4$ nicht nur a_5, sondern damit auch $B_5(a_5)$ folgt. Dies kann aber (unter noch zu nennenden genaueren Voraussetzungen) nur gefolgert werden, wenn Paul nicht nur die Wahrheit von p_5 voraussetzt, sondern er muss voraussetzen, dass er an die Wahrheit von p_5 glaubt (vgl. W.V.O. Quine: „Ways of Paradox and Other Essays“). In diesem Zusammenhang führt man noch folgende Bezeichnung ein:

$B_0(r)$:⇔ “es ist das Wochenende vor dem Test und Paul glaubt die Aussage r”.

Unter gewissen Voraussetzungen, insbesondere der Voraussetzung, dass Paul konsistent ist, also nicht an widersprüchliche Aussagen glaubt, kann nun gezeigt werden, dass zwar nicht p_5, aber immerhin $B_0(p_5)$ zu einem Widerspruch führt.

Paul soll nun im Einzelnen folgende Voraussetzungen erfüllen (vgl. R. Smullyan: „Logik-Ritter und andere Schurken“):

Es seien r, s, u beliebige Aussagen, B stehe für B_0, B_1, … oder B_5 . Dann soll gelten:

1. Paul kann (zumindest am Wochenende) logisch folgern:

   Für jede Tautologie t gilt $B_0(t)$.
   Wenn $B_0(r \to s)$ gilt und auch $B_0(r)$, dann gilt auch $B_0(s)$.

(Einfache Folgerungen: Da die Aussage $(r \to s) \to [(s \to u) \to (r \to u)]$ eine Tautologie ist, gilt mit $B_0(r \to s)$ und $B_0(s \to u)$ auch $B_0(r \to u)$. Und da $r \to (s \to r \,\&\, s)$ eine Tautologie ist, gilt mit $B_0(r)$ und $B_0(s)$ auch $B_0(r \,\&\, s)$).

2. Paul ist auch selbst davon überzeugt, dass er (auch zukünftig) logisch folgern kann:

   Es gilt $B_0((B(r \to s) \,\&\, B(r)) \to B(s))$.

3. Wenn Paul eine Aussagen glaubt, dann glaubt er, dass er sie künftig glauben wird (Insbesondere verfügt Paul also über ein gewisses Maß an "Selbstbewusstsein".):

   Wenn $B_0(r)$ gilt, dann gilt auch $B_0(B(r))$.

4. Paul ist davon überzeugt, dass er ein gewisses Maß an Erinnerungsvermögen hat:

   Es gilt $B_0(\sim p_1 \to B_2(\sim p_1))$, $B_0(\sim p_2 \to B_3(\sim p_2))$,
   $B_0(\sim p_3 \to B_4(\sim p_3))$, $B_0(\sim p_4 \to B_5(\sim p_4))$.

5. Paul ist konsistent:

   Es gibt keine Aussage r, so dass $B_0(r \,\&\, \sim r)$ gilt.

Aus diesen Voraussetzungen soll noch ein Hilfssatz abgeleitet werden:

Hilfssatz: Aus $B_0(B(r \to s))$ folgt $B_0(B(r) \to B(s))$.

Beweis: Sei $u :\Leftrightarrow (B(r \to s) \,\&\, B(r)) \to B(s)$, $v :\Leftrightarrow B(r \to s) \to (B(r) \to B(s))$.
Da “$u \to v$” eine Tautologie ist, folgt $B_0(v)$ und daraus die Behauptung.

Nun soll zunächst gezeigt werden, dass unter den Voraussetzungen 1. bis 5. mit $B_0(p_5)$ auch $B_0(p_1)$ gilt. Ähnlich wie bei Paul wird im ersten Schritt von $B_0(p_5)$ auf $B_0(p_4)$ geschlossen. Man sieht dann aber, dass mit den gleichen Argumenten auf $B_0(p_1)$ weiter gefolgert werden kann.

(i) Da “$p_5 \to (\sim p_4 \to a_5)$” eine Tautologie ist und damit $B_0(p_5 \to (\sim p_4 \to a_5))$ gilt, folgt aus $B_0(p_5)$ zunächst $B_0(\sim p_4 \to a_5)$ und damit $B_0(B_5(\sim p_4 \to a_5))$. Die Anwendung des Hilfssatzes ergibt dann $B_0(B_5(\sim p_4) \to B_5(a_5))$.

(ii) Nach Voraussetzung 4. gilt $B_0(\sim p_4 \to B_5(\sim p_4))$. Mit (i) folgt dann $B_0(\sim p_4 \to B_5(a_5))$.

(iii) Andererseits folgt aus $B_0(p_5)$ und $p_5 \rightarrow (\sim p_4 \rightarrow \sim B_5(a_5))$, dass $B_0(\sim p_4 \rightarrow \sim B_5(a_5))$ der Fall sein muss. Zusammen mit (ii) gilt damit $B_0(\sim p_4 \rightarrow B_5(a_5) \,\&\, \sim B_5(a_5))$. (Dies folgt weil "$(r \rightarrow s) \rightarrow [(r \rightarrow u) \rightarrow (r \rightarrow (s \,\&\, u))]$" eine Tautologie ist). Hieraus folgt direkt $B_0(p_4)$. (Dies schon deshalb, weil "$(\sim r \rightarrow (s \,\&\, \sim s)) \rightarrow r$" eine Tautologie ist.)

Wenn man sich so weiter durchhangelt kommt man schließlich zu $B_0(p_1)$, d.h. man kommt zu $B_0(a_1 \,\&\, \sim B_1(a_1))$. Daraus folgt $B_0(a_1)$ und $B_0(\sim B_1(a_1))$ und damit hat man schließlich $B_0(B_1(a_1))$ und $B_0(\sim B_1(a_1))$. Paul ist inkonsistent geworden im Widerspruch zur Voraussetzung.

Die Paradoxie ist damit aufgelöst. Auch wenn Paul der Lehrerin glaubt, kann sich die Aussage der Lehrerin als wahr erweisen, ohne dass es einen Widerspruch zur Aussage der Lehrerin gibt. Allerdings wird dann Paul womöglich inkonsistent.

Paul kann die Inkonsistenz natürlich leicht vermeiden, einfach indem er für sich die Möglichkeit zulässt, dass die Aussage der Lehrerin sich auch als falsch herausstellen kann, und dafür gibt es ja tatsächlich viele Möglichkeiten.

Aber auch wenn Paul fest davon überzeugt ist, dass sich die Aussage der Lehrerin als wahr erweisen wird, muss Paul nicht zwingend inkonsistent werden, nämlich dann nicht, wenn eine der Voraussetzungen 1. bis 4. nicht gegeben ist. Zum Beispiel könnte es sein, dass Paul daran zweifelt, der Aussage der Lehrerin auch noch am Freitag zu glauben, wenn sie sich bis Donnerstag nicht bewahrheitet hat.

Wenn man aber von den Voraussetzungen 1. bis 4. ausgeht, und so die Schlussfolgerung von Paul „auf korrekte Weise“ nachvollzieht, dann hat man, so finde ich, mit diesem Paradoxon eine sehr schöne Veranschaulichung zu den Gödelschen Unvollständigkeitssätzen.