Der Kreisel: Ein Lieblingsspielzeug der klassischen Mechanik

Artur Hahn
Institut für Werkstoffe der Elektrotechnik, Ruhr-Universität Bochum

Ein Kreiselspielzeug ist neu auf dem Markt und fasziniert manchen, der es in die Hand nimmt. Kreiselwirkungen sind immer so überraschend! Wie funktioniert es? Präzession - das kennt man doch vom "schweren Kreisel". Beim neuen Spielzeug spielt die Gewichtskraft aber keine Rolle. Und wieso kann man durch geschickte Drehbewegungen der Hand, welche das Gehäuse hält, nicht nur die Reibung kompensieren, sondern den Kreisel nach und nach auf hohe Drehzahlen beschleunigen? Im Folgenden wird eine theoretische Beschreibung versucht, welche mit möglichst einfachen Mitteln auskommt.

1 Einleitung

Kreiselspielzeuge sind ein wenig aus der Mode gekommen. Vor 60 Jahren gab es in jedem Kinderzimmer den "Brummkreisel" aus Blech, welcher, durch einen mechanischen Antrieb in schnelle Umdrehung versetzt, lange herumlief ohne umzufallen und dabei vermittels einer Serie von Löchern auf seinem Umfang Töne erzeugte. In Teilen des Rheinlandes hieß das Spielzeug "Heuldopp" und mit dem gleichen Wort bezeichnete man auch ein ständig weinendes Kind. Auf geteerten Straßen, welche damals nicht eben zahlreich waren, spielten die Kinder während langer Nachmittage unermüdlich mit ihrem (im Vergleich mit dem Blechbrummkreisel) viel kleineren Holzkreisel, den sie mit einer Peitsche antrieben. Das Spiel war faszinierend, nicht nur wegen der dynamischen Bewegungsform der "Schnus", wie diese Ausführung des schweren Kreisels im südlichsten Zipfel von Westfalen hieß.[1] Vielmehr stellte auch die für eine lange ununterbrochene Laufzeit erforderliche Geschicklichkeit eine schöne sportliche Herausforderung dar.

Das vorliegende neue Spielzeug wird nicht im Einzelnen beschrieben. Vielmehr setzen wir voraus, dass der Leser es in der Hand hält und es ausprobiert hat.[2] Im Folgenden heißt es "das Spielzeug". Neben dem Präzessionsmodus der Bewegung, welchen man bei kraftvollem Zupacken mit der Hand erreicht, sollte man auch die präzessionsfreie reine Rotation beobachten. Diese erzeugt man dadurch, dass man (ausgehend vom Präzessionsmodus mit schnell rotierendem Kreisel) das Gehäuse nicht mehr festhält sondern es locker in der hohlen Hand hält oder es auf eine weiche Unterlage ablegt.

Ziel der vorliegenden Darstellung ist die Beschreibung der Mechanik des Spielzeugs mit möglichst einfachen Mitteln. Gebraucht wird im Wesentlichen der Drehimpulssatz der klassischen Mechanik in vektorieller Form. Dieser wird nicht abgeleitet sondern übernommen.[3]Ansonsten brauchen wir ein wenig den anschaulichen Umgang mit Vektoren im gewöhnlichen dreidimensionalen Raum sowie etwas elementare Algebra und Geometrie.

Die freie Rotation und die Präzession werden nach den Gesetzen der klassischen Mechanik beschrieben. Dieses läuft im Kern auf dieselbe Beschreibung hinaus, welche in Lehrbüchern unter dem Stichwort "schwerer Kreisel" zu finden ist,[3] wobei das Drehmoment hier nicht von einer Gewichtskraft sondern durch die Kraft der das Gehäuse festhaltenden Hand erzeugt wird. Interessanter (und nicht in einfacher Form in Lehrbüchern zu finden) ist die Frage: Wie kommt der Antrieb zur Drehzahlerhöhung zustande? Diese wird im Abschnitt 3.3 beantwortet.

Der Aufbau ist wie folgt: Abschnitt 2 bringt die notwendigen Begriffe und Gesetze der Mechanik. Die Mechanik des vorliegenden Spielzeugs wird in 3 behandelt, wobei die Unterabschnitte 3.1 und 3.2 die freie Rotation und die Präzession als im Wesentlichen wohlbekannte Phänomene beschreiben. Unterabschnitt 3.3 liefert dann ein wenigstens qualitatives Verständnis des dynamischen Antriebs. In einem Anhang werden charakteristische physikalische Parameter größenordnungsmäßig abgeschätzt.

Mit Ausnahme des Anhangs ist die Darstellung für naturwissenschaftlich interessierte Laien gedacht. Der mit der Mechanik vertraute Physiker oder Ingenieur sollte Abschnitt 2 überschlagen und die Abschnitte 3.1 und 3.2 "diagonal" lesen. Erst Abschnitt 3.3 bringt weniger Bekanntes. Jedenfalls stellte die dort beantwortete Frage nach dem Antrieb des Kreisels die Herausforderung für die vorliegende Arbeit dar.

Zum Schluss dieser Einleitung sei noch eine Warnung ausgesprochen und eine Frage gestellt. Die Warnung: Die folgende Untersuchung bringt überhaupt keinen Nutzen, ist vielmehr reiner Selbstzweck. Die Frage: Warum machen wir sie dann? Folgende Antwort sei gewagt: Es geht um Drehbewegungen. Was solche nun betrifft: Die Erfindung des Rades war ein kulturelles Großereignis, welches sich tief in unser kollektives Unterbewusstsein eingeprägt hat. Daher die Faszination durch alles, was sich dreht. Ein "Kindermund"-Ausspruch aus der Familie des Autors bringt die Sache auf den Punkt: Die damals Dreijährige (nur eine Frau hat das entsprechende sprachliche Talent) wollte, unter Bezugnahme auf ein anderes Spielzeug, wieder und wieder "Räder rum dreh'n geh'n seh'n". Das wollen im Folgenden auch wir - mit weniger eleganten sprachlichen Mitteln.

[1] Die eigenwillig spiralige, insbesondere nach einem Schlag mit der Peitschenschnur oft unerwartete Laufbewegung dieses Spielkreisels gab wohl Anlass für den Spitznamen "Schnus", mit dem man ein zwischen verschiedenen männlichen Partnern schnell wechselndes junges Mädchen belegte, eher ironisch-liebevoll und keineswegs im negativen Sinne von "mannstoll". Die Namensgleichheit stand somit für Gleiches in beiden, dem Kreisel und dem Mädchen: eine hohe innere Dynamik.

[2] Möglicherweise dauert es einige Zeit, bis dies entsprechend der Bedienungsanleitung gelungen ist.

[3] z.B. Arnold Sommerfeld, *Vorlesungen über Theoretische Physik,* Band I: Mechanik, Wiesbaden 1949.

2 Rotationsbewegungen

2.1 Drehimpulssatz

Das Folgende handelt nur von einem relativ einfachen Spezialfall des starren Körpers, dem Kugelkreisel. Dieser reicht zum Verständnis des Spielzeugs aus. De facto dürfte die Massenverteilung des Spielkreisels nahezu kugelsymmetrisch sein und damit der Idealisierung nahe kommen. Der Drehimpulssatz verknüpft das auf einen Körper wirkende Drehmoment $\vec{M}$ mit der zeitlichen Änderungsgeschwindigkeit seines Drehimpulses $\vec{I}$. Er lautet

$$\frac{d\vec{I}}{dt} = \vec{M}, \qquad \text{oder auch} \qquad d\vec{I} = \vec{M}dt. \tag{1}$$

In der zweiten Form ist er auch für mathematisch weniger versierte Leser leicht zu interpretieren: Die Änderung $d\vec{I}$ des Drehimpulses in einem sehr kleinen Zeitintervall dt (d.h. während die Zeit um dt zunimmt) ist durch das Produkt aus dt und dem momentan auf den Körper einwirkenden Drehmoment $\vec{M}$ gegeben. Dadurch ändert sich der Drehimpuls im Laufe der Zeit. Auch das wirkende Drehmoment ist im Allgemeinen zeitabhängig. Das Drehmoment und der Drehimpuls sind Vektoren, die in den folgenden beiden Unterabschnitten erläutert werden. Auch die "skalaren" Größen Winkelgeschwindigkeit und Trägheitsmoment werden bei dieser Gelegenheit eingeführt. Vorher wollen wir den Drehimpulssatz jedoch zur Vorbereitung eines später benutzten Arguments noch graphisch illustrieren.

In Abb. 1 sind die beiden Vektorgrößen $\vec{I}$ und $d\vec{I} = \vec{M}dt$, sowie deren Vektorsumme $\vec{I} + d\vec{I}$ dargestellt. Letztere wurde nach der bekannten Regel für die graphische Vektoraddition gebildet. Zur gegebenen Zeit t beschreibt der Vektor $\vec{I}$ den Drehimpuls . Dieser ist zur etwas späteren Zeit $t + dt$ in den Vektor $\vec{I} + d\vec{I}$ übergegangen. In der Abbildung ist links der allgemeine Fall dargestellt, in dem $\vec{I}$ und $d\vec{I}$ einen beliebigen Winkel bilden. $\vec{I} + d\vec{I}$ ist dann gegenüber $\vec{I}$ in Richtung und(!) Betrag verändert. Rechts ist der später wichtige Spezialfall dargestellt, dass $d\vec{I}$ senkrecht auf $\vec{I}$ steht. In diesem Fall ändert sich zeitlich nur die Richtung des Drehimpulses. Der Betrag bleibt unverändert. Dies gilt in sehr guter Näherung für ein sehr kleines Zeitintervall dt und einen entsprechend sehr kleinen Vektor $d\vec{I}$, was in der Zeichnung naturgemäß nicht beliebig gut dargestellt werden kann. Bleibt jedoch während einer längeren Zeit die Bedingung, dass $\vec{M}$ senkrecht auf $\vec{I}$ steht, erhalten, so ändert sich während der ganzen Zeit der Betrag von $\vec{I}$ nicht.

Ein zweiter Spezialfall ist gegeben, wenn $\vec{I}$ und $\vec{M}$ und damit auch $d\vec{I}$ parallel sind (ohne Bild). In diesem Fall ändert sich nur der Betrag, nicht aber die Richtung von $\vec{I}$ und der Impulssatz gilt für die Beträge $I = |\vec{I}|$ und $M = |\vec{M}|$ in der Form der skalaren Gleichung $dI = Mdt$.

Abbildung 1: Zeitliche Änderung des Drehimpulses unter dem Einfluss eines Drehmoments.

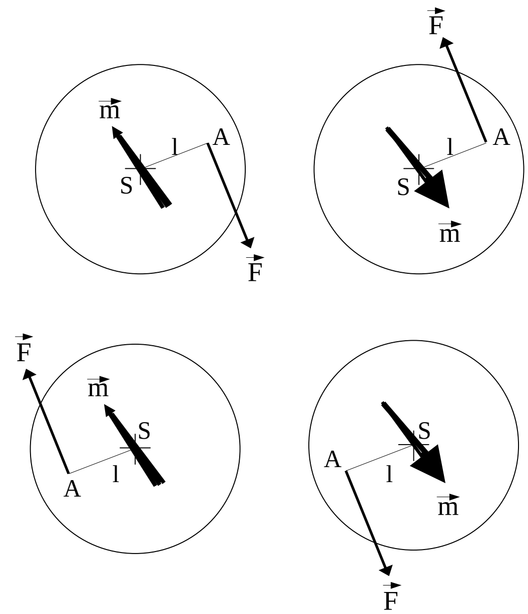

Abbildung 2: Vier Drehmomentvektoren gleichen Betrags und senkrecht zur Zeichenebene. Siehe Text.

2.2 Drehmoment

Wir beschreiben nur reine Drehbewegungen des starren Körpers, bei denen der Schwerpunkt ruht, d.h. keine Translationsbewegung im Raum ausführt. Bedingung dafür ist, dass die (Vektor-) Summe aller auf den Körper einwirkenden Kräfte Null ergibt. Eine Kraft $\vec{F}$, welche in einem Punkt A im Abstand l vom Schwerpunkt S des Körpers senkrecht zur Verbindungslinie S - A angreift, bewirkt ein Drehmoment $\vec{m}$ vom Betrage $|\vec{m}| = l\,|\vec{F}|$, dessen Richtung senkrecht auf der Richtung dieser Verbindungslinie und senkrecht auf der Richtung der Kraft steht. In Abb. 2 sind die Verhältnisse für vier Fälle dargestellt, wobei die Linie S - A und der Kraftvektor $\vec{F}$ jeweils in der Zeichenebene liegen. Der Vektor $\vec{m}$ ist daher in jedem Falle senkrecht zur Zeichenebene gerichtet und zwar nach hinten (vom Betrachter weg, die linken beiden Teilbilder von Abb. 2) oder nach vorne (auf den Betrachter zu, die rechten beiden Teilbilder), je nachdem ob das Drehmoment bezüglich des Schwerpunkts, vom Betrachter aus gesehen, einer Rechts- oder Linksschraube entspricht.

Summiert man alle Drehmomente aller am Körper angreifenden Kräfte vektoriell, so erhält man das Gesamtdrehmoment $\vec{M}$, welches im Drehimpulssatz auftritt. Bei der Behandlung des Spielzeugs treten im Folgenden zwei gleich große, entgegengesetzt gerichtete Kräfte auf, welche im Ansatzpunkt relativ zum Schwerpunkt den beiden linken Teilbildern von Abb. 2 entsprechen. Die vektorielle Summation läuft also hier auf die Verdopplung des Einzeldrehmoments bei beibehaltener Richtung hinaus - $\vec{M} = 2\vec{m}$ - ein ganz einfacher Fall.

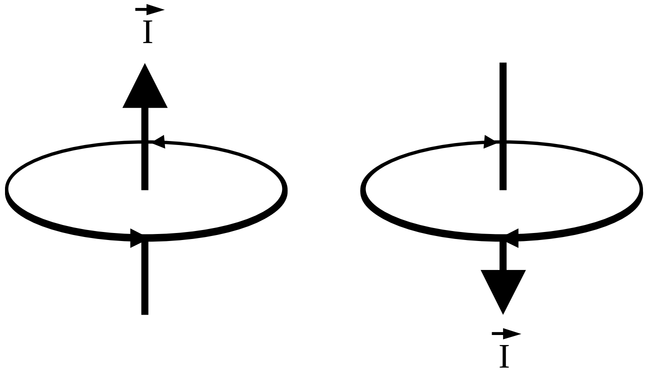

Abbildung 3: Zur Definition der Drehimpulsrichtung.

2.3 Drehimpuls und Trägheitsmoment

Die Drehbewegung eines festen Körpers ist zu einem gegebenen Zeitpunkt durch die Stellung des Körpers im Raum, seine momentane Drehachse und die momentane Winkelgeschwindigkeit ω um diese Drehachse charakterisiert. $\omega = d\phi/dt$ ist die in einer sehr kleinen(!) Folgezeit dt um die momentane Drehachse erfolgende Winkeldrehung $d\phi$, dividiert durch dt. Genauer ist ω der Differentialquotient, d.i. der Limes dieses Quotienten für gegen Null gehendes dt. Sowohl ω als auch die Drehachse bleiben im Allgemeinen nicht konstant sondern ändern sich mit der Zeit, weshalb sie als momentane Größen definiert werden müssen und der Grenzübergang begrifflich notwendig ist.

Im Falle des Kugelkreisels ist der Zusammenhang zwischen Drehachsenrichtung, Winkelgeschwindigkeit und Drehimpuls einfach. Auf diesen einfachen Fall beschränken wir uns, wie oben bereits angekündigt. Hier gilt für den Betrag des Drehimpulses

$$|\vec{I}\,| = I = \Theta\,\omega. \tag{2}$$

Der konstante Faktor Θ ist das Trägheitsmoment des Kugelkreisels, welches von der Massenverteilung im Kreisel abhängt. Falls diese bekannt ist, kann Θ berechnet werden.[4] In jedem Falle kann Θ mit Hilfe des Drehimpulssatzes experimentell bestimmt werden.

Die Richtung von $\vec{I}$ ist die Richtung der momentanen Drehachse mit der Vorzeichenkonvention, dass der Vektor $\vec{I}$ in diejenige Richtung der Achse zeigt, in der sich eine im Drehsinn betätigte Rechtsschraube voranbewegt. Zur Erläuterung möge Abb. 3 dienen.

Der Drehimpulsbetrag unterscheidet sich von der anschaulichen Größe "Winkelgeschwindigkeit ω" nur durch den konstanten Faktor "Trägheitsmoment Θ", welches eine gegebene Eigenschaft des Kugelkreisels ist. Die Größe ω kann man noch anschaulicher auf folgende Weise interpretieren:

Würde von dem betrachteten Zeitpunkt ab kein Drehmoment mehr wirken, so bliebe nach dem Drehimpulssatz die momentane Drehachse erhalten und der Kreisel würde mit ebenfalls beibehaltener konstanter Winkelgeschwindigkeit weiter rotieren. Für diese Weiterbewegung führt man die anschaulichen Größen Umlaufzeit T (für einen Umlauf) und Rotationsfrequenz oder Drehzahl $\nu = 1/T$ ein (wenn die Umlaufzeit z.B. 1/100 s beträgt, hat man 100 Umdrehungen pro Sekunde: $\nu = 1/T = 100/\mathrm{s} = 6000/\mathrm{min}$). Der Zuwachs des im Bogenmaß gemessenen Winkels ϕ bei einem Umlauf, also in der Zeit T, ist 2π. Daher gilt

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi\nu. \tag{3}$$

Die Winkelgeschwindigkeit ist also die mit dem Zahlenfaktor 2π multiplizierte Rotationsfrequenz und heißt deshalb auch Kreisfrequenz.

[4] Für eine homogen mit Masse erfüllte Kugel mit dem Radius R und der Gesamtmasse μ ergibt sich z.B. $\Theta = 0.4\,\mu R^2$.

3 Das Spielzeug

Der Leser hat das Spielzeug vor sich, eine ausführliche Beschreibung erübrigt sich daher. Das Gehäuse, eine leichte Schale in Form einer dünnwandigen Hohlkugel, ist halbtransparent und gestattet damit einen, wenn auch eingeschränkten Blick auf den im Wesentlichen kugelförmigen schweren Kreiselkörper im Inneren. Dieser hat eine Achse mit geringem Durchmesser, deren beide Enden in einer Nut auf der Innenseite des Gehäuses geführt sind. Die Nut verläuft auf einem Großkreis der Gehäusekugel. Sie ist ein wenig breiter als der Durchmesser $2r$ der Achse, sodass sich letztere in der Nut frei drehen oder auf den seitlichen Rändern der Nut abrollen kann. Ein solches Abrollen erfolgt bei der weiter unten beschriebenen Präzession.

Eigentlicher Anlass für die vorliegende Untersuchung war der folgende Denkfehler des Autors: Kräfte können nur von der Nut auf die beiden Kreiselachsenenden ausgeübt werden. Da der Schwerpunkt im Mittelpunkt der Kreiselachse liegt, ist das Moment dieser Kräfte senkrecht zur Kreiselachse gerichtet. Weil der Drehimpuls in Richtung der Kreiselachse weist, kann er durch dieses Drehmoment betragsmäßig nicht geändert werden. Fazit:

- Theoretisch kann der Kreisel gar nicht beschleunigt werden.
- Praktisch wird er aber doch.

Im Folgenden werden wir sehen, dass diese Argumentation eine genauere Analyse nicht überlebt.

3.1 Freie Rotation

Wie erwähnt, können Kräfte auf den rotierenden Kreiselkörper nur von der Führung der beiden Achsenenden in der Nut übertragen werden. Sieht man von Reibungskräften ab, so wirkt bei losgelassenem, also in alle Richtungen frei drehbarem Gehäuse gar keine Kraft auf den Kreisel. Damit ist auch das Drehmoment gleich Null und damit bleibt der Drehimpuls nach dem Drehimpulssatz nach Richtung und Betrag zeitlich konstant. Gemäß Abschnitt 2.3 bleibt damit die Drehachse zeitlich erhalten (welche ja die Richtung des Drehimpulses darstellt) ebenso wie die Winkelgeschwindigkeit um diese Achse bzw. die Drehzahl. Eine zeitlich feststehende Drehachse und gleichbleibende Drehzahl ist aber gerade das, was wir beobachten. Das real langsam über viele Umdrehungsperioden dann doch erfolgende Abnehmen der Drehzahl kommt durch die Reibung zustande, welche bei allen Betrachtungen hier unberücksichtigt bleibt.

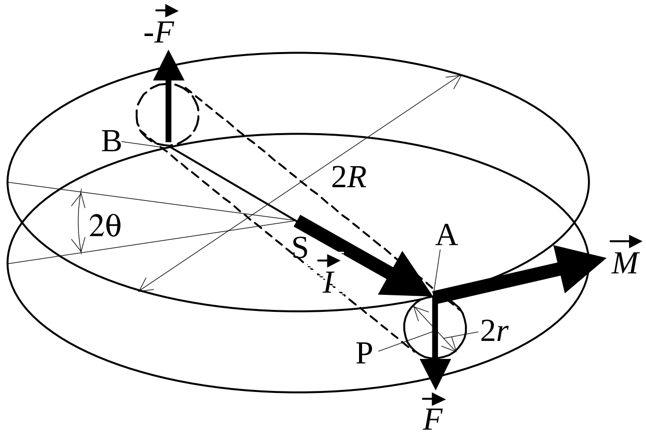

Abbildung 4: Zur Kinematik und Dynamik des Kreiselspielzeugs bei starr festgehaltenem Gehäuse. s. Text.

3.2 Präzession

Wir haben nach einiger Übung intuitiv gelernt, wie man den Kreisel durch geeignete Handbewegungen antreibt und in schnelle Rotation versetzt. Die Dynamik des Antriebs beschreiben wir erst in Abschnitt 3.3. Der Rotationsbewegung ist, auch wenn wir mit dem Antreiben aufhören und das Gehäuse nur noch starr festhalten, eine im Vergleich mit der schnellen Rotation relativ langsame Präzession überlagert. Die in 3.1 beschriebene reine Rotation würden wir von diesem Zustand aus durch Loslassen des Gehäuses erreichen (Kräftefreiheit und damit fehlendes Drehmoment!). Wir halten jetzt aber kräftig fest, sodass sich das Gehäuse überhaupt nicht mehr bewegt. Die Führungsnut im Gehäuse, von der aus allein Kräfte auf den Kreisel übertragen werden können, liegt dann unbeweglich im Raum fest. Die Präzession ist zu sehen und zu hören, die Kräfte sind zu spüren.

In Abb. 4 sind die Achse des Kreisels durch den dünnen Zylinder und die beiden Ränder der Führungsnut durch die beiden großen Kreise dargestellt. Der mit der Achse starr verbundene Kreiselkörper selbst ist nicht wiedergegeben. Bei der Präzessionsbewegung rollt das vordere Ende der Achse (in der Abbildung dargestellt durch einen kleinen Kreis mit dem Durchmesser $2r$) im Punkt A auf dem oberen, das hintere Ende im Punkt B auf dem unteren Rand der Führungsnut ab. An diesen beiden Punkten wirken die Kräfte vom festgehaltenen Gehäuse auf die Achse und damit auf den Kreisel ein. Diese Kräfte sind gleich groß und entgegengesetzt gerichtet und erzeugen damit ein Drehmoment $\vec{M}$, welches, vom Punkte A aus abgetragen, tangential zum oberen Nutrand liegt, wie in Abb 4 eingezeichnet.

Die momentane Drehachse des Kreisels ist durch die Linie B - A in der Abbildung wiedergegeben, denn diese beiden Punkte ruhen momentan, da die Achse auf den Nuträndern (ohne Schlupf!) abrollt und die Nut ruht. Wir können den Drehimpulsvektor $\vec{I}$ parallel zur Linie B - A einzeichnen. Wir wählen den Maßstab für die Darstellung des Drehimpulses so, dass $\vec{I}$ gerade durch den vom Schwerpunkt S zum Punkte A führenden Pfeil dargestellt wird.[5] Wir haben also gerade die im rechten Teilbild von Abb. 1 dargestellte Situation vor uns: $\vec{M}$ und damit auch $\vec{M}dt = d\vec{I}$ steht senkrecht auf $\vec{I}$. Nach einer kurzen Zeit dt ist der Endpunkt des Vektors $\vec{I}$ um ein kleines Stück auf dem oberen Kreis der Abbildung 4 vorgerückt, damit aber auch der Berührungspunkt A. Analoges gilt für den Berührungspunkt B auf dem unteren Kreis. Im Resultat durchläuft der Vektor $\vec{I}$ und damit die momentane Rotationsachse einen Kegel mit der Kegelspitze im Schwerpunkt S. Dies ist die in ähnlicher Form auch beim "schweren symmetrischen Kreisel"[3] auftretende Präzessionsbewegung.

Bei gegebenem Drehimpulsbetrag $|\vec{I}|$, (zur Erinnerung: das bedeutet gegebene Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{I}|/\Theta$ um die momentane Drehachse, ist also etwas sehr Anschauliches) bei gegebenem Drehimpulsbetrag also, liefert der Drehimpulssatz den Zusammenhang zwischen Drehmomentbetrag $|\vec{M}|$ und Zeitdauer T' für einen Präzessionsumlauf: In Drehimpulseinheiten gemessen, ergibt sich für den Umfang des Kreises, den die Spitze des Vektors $\vec{I}$ bei einem Umlauf durchläuft, $2\pi|\vec{I}|\cos\theta$. Hier ist θ der halbe Winkel, unter dem die Breite der Nut, vom Mittelpunkt S aus gesehen, erscheint (s. Abb 4). Da θ sehr klein ist, können wir in guter Näherung $\cos\theta = 1$ setzen, was im Folgenden geschieht. Nach dem Drehimpulssatz wächst die Tangentialkomponente von $\vec{I}$ in der kleinen Zeit dt um $|\vec{M}|dt$. In der Zeit T' schreitet also die Spitze des Vektors $\vec{I}$ um $|\vec{M}|T'$ vor. Dies muss gleich dem Umfang des Kreises sein, also gilt

$$|\vec{M}|T' = 2\pi|\vec{I}|, \tag{4}$$

oder, bei Verwendung der Präzessionsfrequenz $\nu' = 1/T'$

$$|\vec{M}| = 2\pi\nu'|\vec{I}|. \tag{5}$$

Die auf der rechten Seite auftretenden Größen ν' und $|\vec{I}|$ sind nicht voneinander unabhängig, sondern durch eine "kinematische", d.h. durch die Geometrie des Bewegungsablaufs gegebene Bedingung miteinander verknüpft, nämlich die Bedingung eines rutschfreien Ablaufens der Achse auf dem Nutrand. Für die Geschwindigkeit des in Abb. 4 bezeichneten Mittelpunkts P der Achse längs seiner Bahn muss nämlich gleichzeitig gelten:

$$v_P = \frac{2\pi R}{T'} \tag{6}$$

und

$$v_P = r\omega. \tag{7}$$

R ist der Radius des kreisförmigen Nutrandes (s. Abb 4) und damit ist $2\pi R$ die Länge der Bahn des Punktes P bei einem Umlauf, welcher ja in der Zeit T' erfolgt. Damit ergibt sich Glg. (6) nach der Regel "Geschwindigkeit gleich Weg durch Zeit". Zur Begründung von Glg. (7) beachten wir, dass die momentane Rotation um den ruhenden Punkt A mit der Winkelgeschwindigkeit ω erfolgt. Punkt P ist von A um den Radius r der Achse entfernt und legt infolge der Rotation um A in der kleinen Zeit dt daher den Weg $rd\phi = r\omega dt$ zurück. Durch dt dividiert, ergibt dies die Geschwindigkeit v_P gemäß Glg. (7).

[5] Bei der Darstellung von Drehimpuls- oder Drehmomentvektoren in einer zwei- oder dreidimensionalen Skizze ist der Ausgangspunkt des Vektors frei wählbar. Es kommt nur auf den Betrag, welcher durch die Länge des Vektors dargestellt wird, und auf seine Richtung an. Für die Darstellung der jeweiligen Beträge kann ein beliebiger Maßstab gewählt werden, etwa für Drehimpulsvektoren durch die Festlegung: Ein Drehimpuls von 1 kg m^2 /s soll x cm entsprechen. x ist frei wählbar.

Gleichsetzen von (6) und (7) ergibt, wenn wir nach $\nu' = 1/T'$ auflösen: $\nu' = r\omega/(2\pi R)$. Mit

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} \tag{8}$$

erhalten wir daraus schließlich

$$\nu' = \nu \frac{r}{R}, \tag{9}$$

eine besonders einfache Beziehung zwischen der Rotationsfrequenz ν und der Präzessionsfrequenz ν'.

Die Präzessionsfrequenz ν' ergibt sich also aus der Rotationsdrehzahl ν durch Multiplikation mit dem Faktor r/R. Sie ist also sehr viel kleiner als diese und verdoppelt, verdreifacht oder vervierfacht sich bei Verdopplung, Verdrei- oder Vervierfachung der Rotationsdrehzahl. Beide Ergebnisse - die Kleinheit von ν' gegenüber ν und die Proportionalität zwischen beiden - entsprechen dem, was man beobachtet, genauer gesagt, beobachten würde, wenn man die hohe Drehzahl der Rotation messen und nicht nur an einem beim Beschleunigen in der Frequenz ansteigenden Laufgeräusch darauf schließen würde.

Der Drehimpulsbetrag ist durch die Drehzahl und das Trägheitsmoment gegeben. Nach Glg. (2) und (3) gilt

$$|\vec{I}| = 2\pi\nu\,\Theta. \tag{10}$$

Setzen wir dies und Glg. (9) in Glg. (5) ein, so erhalten wir

$$|\vec{M}| = 4\pi^2\,\Theta \frac{r}{R}\,\nu^2. \tag{11}$$

Das Drehmoment, mit dem wir das Gehäuse festhalten müssen, wächst also quadratisch mit der Rotationsdrehzahl, versechzehnfacht sich also bei Vervierfachung der Drehzahl. Dies entspricht wenigstens qualitativ auch dem Eindruck beim Spielen: die erforderlichen Kräfte nehmen mit steigender Drehzahl kräftig zu.

Noch eine Anmerkung: In Abb. 4 rollt das vordere Achsende auf dem oberen, das hintere auf dem unteren Nutrand ab. Von oben gesehen erfolgt die Präzessionsbewegung dann im Gegenuhrzeigersinn. Genau so gut kann das vordere Achsende auf dem unteren, das hintere auf dem oberen Nutrand abrollen. Dann kehrt sich die Richtung von $\vec{F}$, $-\vec{F}$ und $\vec{M}$ in Abb. 4 jeweils um, und die Präzession erfolgt im Uhrzeigersinn. Auch das Bestehen dieser beiden Möglichkeiten, bei unveränderter Drehrichtung der (schnellen) Rotation, entspricht genau dem, was man beim Spielen erfährt. Es findet so seine Erklärung.

3.3 Dynamik des Antriebs

In der Spielpraxis wird das Gehäuse kaum ganz starr festgehalten. Vielmehr folgt dieses mehr oder weniger stark der Präzessionsbewegung des Kreisels, je nachdem, wieviel Spiel die festhaltende Hand dem (in diesem Sinne nur unvollständig festgehaltenen) Gehäuse lässt. Wir beschreiben diese Bewegung zunächst für den Fall ohne Antrieb. Dieser liegt vor, wenn die haltende Hand den Reaktionskräften des Kreisels einfach nur ein wenig federnd folgt, ohne dass der Spieler bewusst und gewollt antreibt. Wir wollen diese Gehäusebewegung die "Bewegung bei elastisch aufgehängtem Gehäuse" nennen, im Gegensatz zu der später zu beschreibenden "Bewegung mit Antrieb".

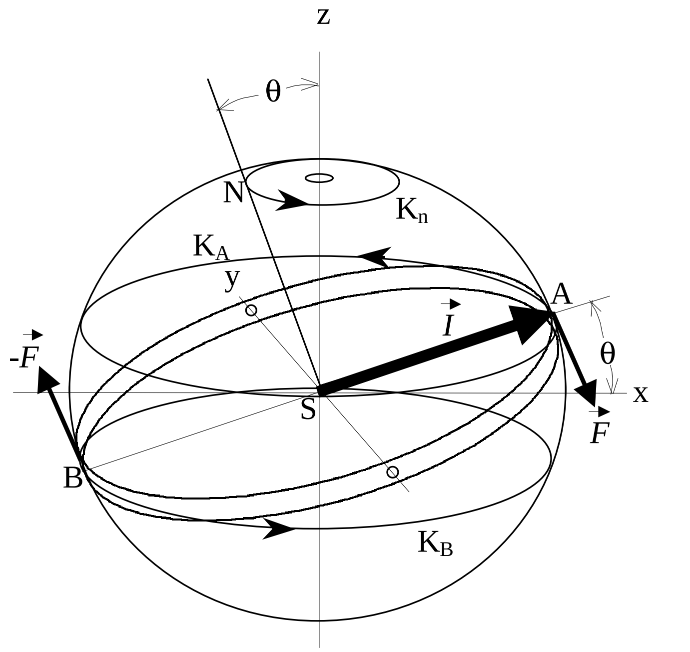

Abbildung 5: Zur Bewegung bei elastisch aufgehängtem Gehäuse.

Abbildung 5 erläutert den Bewegungsablauf und die dabei auftretenden dynamischen Größen $\vec{I}$, $\vec{F}$ und $\vec{M}$. Die beiden ersteren sind durch Ihre Vektorpfeile dargestellt. Die Abbildung zeigt im Übrigen die Nut, dargestellt wie in Abb. 4 durch zwei (jetzt eng benachbarte) Kreise und die auf der Ebene der Nut errichtete Normale S - N. Dargestellt ist eine Momentaufnahme zu einem bestimmten Zeitpunkt. Im weiteren Verlauf der Zeit führt die die Nut tragende Schale (und mit ihr die Nut) eine Präzessionsbewegung aus auf die Weise, dass der Punkt N, in dem die genannte Normale die eingezeichnete Kugel durchstößt, auf dieser einen Kleinkreis K_n um die raumfeste Präzessionsachse durchläuft - in dem durch den Pfeil angegebenen Sinne und mit der Präzessionsfrequenz des Kreisels, sodass die relative Lage aller genannten Vektoren und der Linie S - N erhalten bleibt.[6] Die Richtung der Präzessionsachse wählen wir als z-Achse eines rechtwinkligen Koordinatensystems, das wir im Übrigen so legen, dass zum gewählten Zeitpunkt die Verbindungslinie der Abrollpunkte A und B und damit auch der Drehimpulsvektor $\vec{I}$ sowie die Kraftvektoren $\vec{F}$ und $-\vec{F}$ in der x-z-Ebene liegen (Alle hier benutzten Bezeichnungen sind aus Abb. 4 übernommen und müssen deshalb hier nicht erläutert werden). Das Drehmoment liegt daher in y-Richtung, d.h senkrecht zur Zeichenebene nach hinten gerichtet. Es steht also senkrecht auf der Richtung des Drehimpulses, welcher sich daher betragsmäßig nicht ändert - auch nicht in der Folgezeit während des Präzessionsumlaufs, bei dem die Situation sich bis auf eine Drehung des ganzen Bildes um die z-Achse gar nicht ändert.[7]

[6] Der Winkel θ zwischen der Normalen S -N und der Präzessionsachse hängt von dem Grad der Elastizität ab, mit dem die haltende Hand den Kreiselkräften nachgibt.

[7] Bei der Präzession durchlaufen die Abrollpunkte A und B die Kleinkreise K_A und K_B in dem durch die jeweiligen Pfeile bezeichneten Sin-

Mit dem Drehimpulsbetrag bleibt auch die Drehzahl zeitlich konstant, wiederum abgesehen vom Reibungseinfluß. Durch reines elastisch nachgebendes Halten des Gehäuses ist eine Erhöhung der Drehzahl nicht möglich. Wie muss stattdessen die gezielte Bewegung des Gehäuses aussehen, damit der Kreisel angetrieben wird?

Folgende Vorüberlegung ist hilfreich für die Beantwortung dieser Frage: Um die Drehzahl zu erhöhen, ist Energiezufuhr nötig, es muss also durch die Kraft $\vec{F}$ Arbeit am Kreisel geleistet werden. Die in der Zeit dt geleistete Arbeit dW ergibt sich als $|\vec{F}|\,ds$,[8] wobei ds die Verschiebung des Punktes A der Kreiselachse in Richtung von $\vec{F}$ ist. Wir bezeichnen mit v_A die momentane Geschwindigkeit des Punktes A in Richtung der Kraft, dann ist $ds = v_A dt$ und damit

$$dW = |\vec{F}| v_A dt. \tag{12}$$

Nun gilt sowohl für die in Abb. 4 als auch für die in Abb. 5 beschriebene Situation, dass Punkt A, ebenso wie Punkt B, momentan in Ruhe ist. Das bedeutet $v_A = 0$. Damit verschwindet die rechte Seite von Glg. (12). Es wird keine Arbeit geleistet. Die Drehzahl des Kreisels kann nicht zunehmen!

Aus dem Gesagten wird klar, wie die Bewegung mit Antrieb beschaffen sein muss. Die Achse darf in den Berührungspunkten A und B mit der Nut nicht ruhen. Vielmehr muss sie sich mit einer endlichen Geschwindigkeit v_A in Richtung der in A angreifenden Kraft bewegen. Aufgrund unserer Erfahrung mit dem Spielzeug erwarten wir, dass die erforderliche Bewegung mit Antrieb der oben beschriebenen Bewegung bei elastischer Aufhängung gleicht. Wohlgemerkt, wir sprechen von der Bewegung des Gehäuses, welche wir nun mit der Hand geeignet vorgeben wollen - nicht von der Bewegung des Kreisels, welcher sich ja gerade anders, nämlich mit Beschleunigung, bewegen soll.

Die Lösung des Problems ergibt sich, wie in Abb 6 dargestellt. Die Bewegung des Gehäuses wird, mit der Hand, genau so durchgeführt, wie in Abb. 5 beschrieben. Jedoch wird diese Bewegung mit der Bewegung der Kreiselachse so koordiniert, dass der Berührungspunkt A bei der in Abb. 5 dargestellten Position des Gehäuses nicht an der dort angegebenen Stelle liegt. Vielmehr muss die Kreiselachse sich in einer anderen Position befinden. Am günstigsten ist es, wenn die Achse und ihr Berührungspunkt A mit dem oberen Nutrand so positioniert ist, wie in Abb. 6 dargestellt. Gegenüber Abb. 5 ist, bei gleicher momentaner Stellung der Nut, die Achse also um 90^o gedreht. Bei weiterem Fortschreiten der Präzession muss das Gehäuse dann so mitgeführt werden, dass diese Situation - die richtige "Phasenlage" von Kreisel und Gehäuse - erhalten bleibt. Das Gehäuse muss also passend synchron mitgeführt werden. (Der Punkt A wandert bei dieser Weiterbewegung entlang des Randes des horizontalen schraffierten Kreises, kommt also nach einer viertel Periode der Präzession an der Stelle D an)

Zum Verständnis muss man sich klarmachen, dass sich der obere Nutrand an der "neuen" Stelle A (Abb. 6) durch die per Hand erzwungene Bewegung mit einer endlichen Geschwindigkeit v_A senkrecht zur Linie S-A bewegt,[9] im Gegensatz zum Nutrand an der Stelle C (s. Abb 6), welche

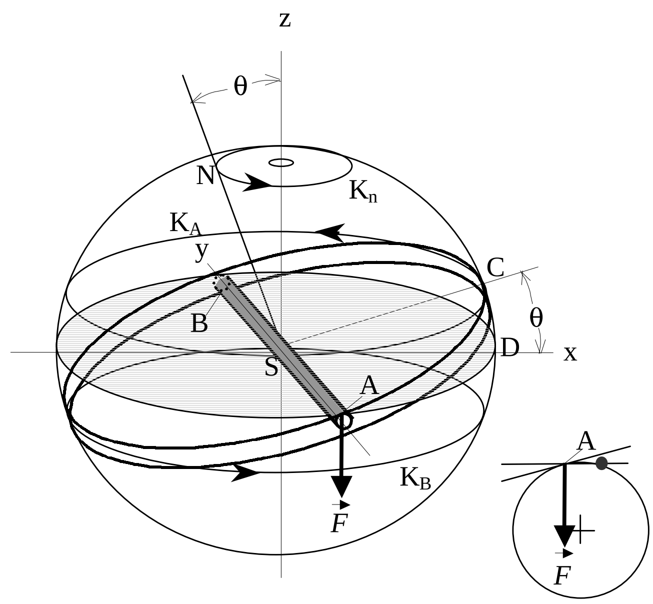

Abbildung 6: Zur Bewegung mit Antrieb.

ihren höchsten Punkt erreicht hat und daher gerade ihre Bewegungsrichtung umkehrt - im Umkehrpunkt ist die Geschwindigkeit Null. Im Punkte A wirkt in der momentanen Bewegungsrichtung auch die Kraft $\vec{F}$ vom Nutrand auf den Kreisel ein. An diesem wird also entsprechend Glg. (12) Arbeit geleistet. Diese kann nur in kinetische Energie des Kreisels übergehen. Dessen Drehzahl muss also in der Folgezeit, weil die Arbeitsleistung anhält, kontinuierlich zunehmen.

Die Nebenfigur in Abb. 6 zeigt einen vergrößerten Ausschnitt der Hauptfigur in der Umgebung des Punktes A. Der Kreis stellt hier das Achsenende dar und die beiden Geraden kleine Teilstücke der Kreisbögen A - C und A - D, welche in der Hauptfigur durch den Punkt A laufen. Wir werden im Folgenden sehen, dass der von S aus abgetragene Vektor $\vec{I}$ des Drehimpulses auf dem Rande des in der Hauptfigur schraffierten, in der Nebenfigur durch die horizontale Gerade dargestellten Kreises liegt. In der Nebenfigur ist die Spitze des Vektors $\vec{I}$ durch einen schwarzen Punkt markiert. Eine nähere Erläuterung folgt weiter unten im Text zu Abb 7.

Die Drehimpulsrichtung liegt im vorliegenden Falle nicht, wie in den in den Abbildungen 4 und 5 beschriebenen Fällen, in der Richtung der Verbindungslinie B - A der Berührungspunkte. Diese Punkte ruhen ja in Abb. 6 nicht. Vielmehr bewegen sie sich, wie beschrieben, mit der Geschwindigkeit v_A (bzw. mit der gleich großen entgegengesetzt gerichteten Geschwindigkeit des Punktes B[10]). Also kann A - B nicht momentane Drehachse sein.

Die wirklich vorliegenden Verhältnisse zeigt Abb. 7. Die Zeichenebene ist hier die in Abb. 6 schraffierte horizontale Ebene. Der Viertelkreis A - D erscheint daher nicht, wie in Abb. 6, perspektivisch verzerrt. Um die Zeichnung einfach

ne.

[8] Erinnert wird an den wohlbekannten Satz aus der Mechanik: "Arbeit = Kraft mal Weg".

[9] Der Leser mache sich diesen Sachverhalt anhand der Abbildung klar, indem er sich überlegt, was bei der Weiterbewegung des Gehäuses nach dem in der Abbildung dargestellten Zeitpunkt geschieht.

[10] Das zu A spiegelbildliche Verhalten im Punkt B wird hier ebensowenig besprochen wie bisher. Alle Aussagen über die dem Punkt A zugeordneten Größen gelten für entsprechende Größen am Punkt B, welche durch "Punktspiegelung" am Schwerpunkt S aus jenen hervorgehen. Daraus folgt insbesondere in allen Fällen $|\vec{M}| = 2l\,|\vec{F}|$, wobei l den Abstand der Punkte A und B jeweils vom Schwerpunkt S bedeutet.

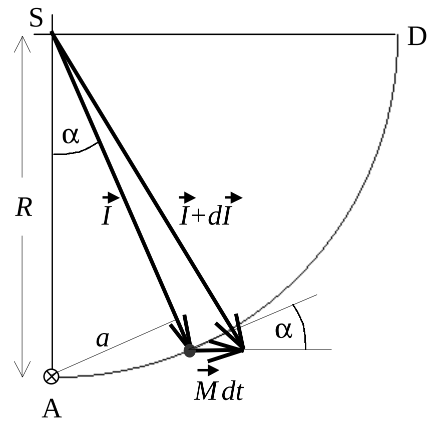

Abbildung 7: Zur Änderung des Drehimpulses bei der Bewegung mit Antrieb.

zu halten, setzen wir voraus, dass die Nut beliebig schmal ist. Das Ergebnis der Analyse wird von dieser Annahme kaum beeinflusst, da die Breite der Nut auch in Wirklichkeit sehr klein ist im Vergleich mit dem Durchmesser B - A. Der Schwerpunkt S liegt dann in der Zeichenebene statt knapp darunter. Die Richtung der in A angreifenden Kraft $\vec{F}$ und die Bewegungsrichtung des Punktes A sind senkrecht zur Zeichenebene nach unten. Wie früher schon, wählen wir den Maßstab für die Darstellung des Drehimpulsbetrages so, dass er in der Zeichnung durch die Länge R der Strecke S - A wiedergegeben wird.

Das Drehmoment $\vec{M}$ liegt senkrecht zur Linie S - A und senkrecht zum Vektor $\vec{F}$, also in Richtung der Linie S - D. Die momentane Drehachse und damit der Drehimpulsvektor muss in der Zeichenebene liegen, weil nur dann die momentane Geschwindigkeit des Berührungspunktes A senkrecht zur Zeichenebene nach unten gerichtet ist. Der Betrag v_A dieser Geschwindigkeit ist durch die Bewegung des Gehäuses vorgegeben. Sie bestimmt bei vorgegebenem Drehimpulsbetrag, d.h. vorgegebener Winkelgeschwindigkeit $\omega = |\vec{I}|/\Theta$, den Abstand a der momentanen Drehachse vom Punkt A nach der Beziehung $v_A = a\,\omega$. Also gilt

$$a = v_A/\omega > 0. \qquad (13)$$

a ist also nicht Null, der Drehimpuls liegt nicht in der Richtung S - A. Damit steht auch $\vec{M}$, welches ja in Richtung S - D liegt, nicht senkrecht auf $\vec{I}$. $\vec{I}$ ändert nicht nur seine Richtung, sondern wächst auch betragsmäßig an, wie in dem Vektoradditionsschema von Abb. 7 dargestellt. Dieses Schema muss hier nicht noch einmal erläutert werden, da dies schon in Verbindung mit Abb 1 geschehen ist. Eine formelmäßige quantitative Beschreibung aller Zusammenhänge zwischen den auftretenden Größen ist möglich. Sie wird im Anhang skizziert. Unser Hauptziel ist hier bereits erreicht:

Das Spielzeug ist qualitativ verstanden.
Das Spiel ist aus!

Anhang: Quantitatives

Hier werden einige technische Daten des Spielzeugs größenordnungsmäßig abgeschätzt. Mangels genauer Ausgangsdaten lassen wir dabei Fehler von z.B. 50% zu, interessieren uns also nur für die Größenordnung der entsprechenden Daten.

1. Ausgangsdaten

Durch Wägung, Längenmessungen am Kreiselspielzeug und Angaben in der Bedienungsanleitung erhalten wir folgende ungefähren Daten:

- Masse des Kreisels: $\mu = 0.25$ kg.
- Radius des Kreiselkörpers: $R = 2.5$ cm.
- Radius der Achse: $r = 0.05$ cm.[11]
- Rotationsfrequenz (Beispiel): $\nu = 12000/\text{min} = 200/\text{s}$.

Zum letzten angegebenen Wert: die Bedienungsanleitung gibt (14000/min) als Höchstwert an.

2. Abgeleitete Daten

Aus den o.g. Daten ergibt sich

- $R/r = 50$ und damit nach Gl. (9):
- $\nu/\nu' = 50$, d.h. Präzessionsfrequenz $\nu' = 4/\text{s}$.
- nach Fußnote 4: Trägheitsmoment $\Theta = 0.625$ kg cm^2.
- nach Gl. (11): Drehmoment $|\vec{M}| = 2$ kg m^2 s^{-2}.

Die berechnete Präzessionsfrequenz ν' liegt tatsächlich in der Größenordnung, welche wir beim Spiel beobachten. Das berechnete Drehmoment entspricht beim Hebelarm $R = 2.5$ cm einer Kraft $2F = |\vec{M}|/R = 80$ Newton oder etwa 8 kilopond. Auch dies scheint eine vernünftige Größenordnung zu sein.

Wir wollen noch abschätzen, wie stark sich beim Antrieb die Rotationsdrehzahl ν bei einem Präzessionsumlauf, d.h. in der Zeit T' erhöht. Wir nennen diese Erhöhung $\delta\nu$, und interessieren uns für die relative Erhöhung $\delta\nu/\nu$ (die erforderliche Abschätzung verlangt ein wenig Umgang mit physikalischen Gleichungen und der daran weniger interessierte Leser mag nur das Endergebnis zur Kenntnis nehmen).

Wir betrachten noch einmal Abb. 7. Es wird sich als Ergebnis der Diskussion ergeben, dass der Abstand a klein gegen den Abstand R ist. Damit ist auch der Winkel α klein, was das Folgende erleichtert. Dieser Winkel kommt in Abb. 7 zweimal vor. Aus der Abbildung liest man folgende elementargeometrischen Beziehungen ab:

$$d|\vec{I}| = |\vec{M}|dt\,\sin\alpha \qquad \text{und} \qquad (14)$$

$$a = R\,\sin\alpha. \qquad (15)$$

Wir nehmen nun vorweg, dass die zu berechnende Erhöhung von $|\vec{I}|$ bei einem Präzessionsumlauf relativ klein ist. Damit bleibt $|\vec{I}|$ bei einem Umlauf nahezu konstant. Auch ist $\vec{M}$ nahezu senkrecht auf $\vec{I}$. Damit bleibt die frühere Beziehung zwischen $|\vec{I}|$ und $|\vec{M}|$ nahezu erhalten, d.h. es gilt

$$|\vec{M}| = 2\pi|\vec{I}|/T'. \qquad (16)$$

[11] Bei genauerem Betrachten des Spielzeugs sieht man, dass die Achse an ihrem äußeren Ende, welches in der Nut abläuft, noch einmal verjüngt ist.

(Dies ist Gl. (4)).

Setzen wir (15) und (16) auf der rechten Seite von (14) ein, so ergibt sich

$$d|\vec{I}| = \frac{2\pi|\vec{I}|}{T'} dt \frac{a}{R}. \tag{17}$$

Für die endliche Zeit $dt = T'$ ergibt sich der Zuwachs

$$\delta|\vec{I}| = \frac{2\pi|\vec{I}|}{T'} T' \frac{a}{R}. \tag{18}$$

und endlich, unter Benutzung von Gl. (13)

$$\frac{\delta|\vec{I}|}{|\vec{I}|} = 2\pi \frac{v_A}{\omega R}. \tag{19}$$

Die Geschwindigkeit v_A, mit der der obere Nutrand sich in Abb. 6 abwärts bewegt, kann nun nicht beliebig vorgegeben werden, sondern ist durch die mit der Hand ausgeführte Präzessionsbewegung bestimmt. Sei die z-Komponente des entsprechenden Punktes des Nutrandes gleich $z_A(t)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich der Nutrand in der in Abb. 6 wiedergegebenen Position, d.h. es ist $z_A(0) = 0$. Zu anderen Zeiten ist dann $z_A(t)$ gegeben durch

$$z_A(t) = R \sin\theta \sin\omega' t. \tag{20}$$

Dazu beachte man wieder Abb. 6, wonach die Maximalauslenkung der Nut $R\sin\theta$ ist. Die Geschwindigkeit im Nulldurchgang der Auslenkung ist dann

$$v_A = (dz_A(t)/dt)_{t=0} = R\omega' \sin\theta. \tag{21}$$

Nehmen wir für den Sinus des Winkels θ etwa 0.5 an und setzen (21) in (19) ein, so ergibt sich

$$\frac{\delta|\vec{I}|}{|\vec{I}|} = \pi \frac{\omega'}{\omega} = \pi \frac{r}{R} \approx 6\%. \tag{22}$$

Dies ist aber auch gleichzeitig die relative Erhöhung der Rotationfrequenz, denn es gilt ja $|\vec{I}| = 2\pi\nu\,\Theta$, also gilt:

$$\delta\nu/\nu \approx 6\%. \tag{23}$$

Die relative Erhöhung der Rotationsfrequenz bei einem Präzessionsumlauf ist also wirklich klein: man braucht größenordnungsmäßig 20 Präzessionsumläufe, um die Drehzahl zu verdoppeln. Auch dies entspricht zumindest qualitativ der Erfahrung mit dem Spielzeug.