FREISTETTERS FORMELWELT

DIE LEGOSTEIN-WISSENSCHAFT

Manchmal stößt man in einfachem Spielzeug auf höchst komplexe Mathematik.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

spektrum.de/artikel/1807508

Zu den allerersten Spielsachen, mit denen sich Kleinkinder beschäftigen, gehören Bausteine. Sie sind simpel genug, um sie ohne große motorische Fähigkeiten nutzen zu können – und bieten zugleich Raum für jede Menge kreative Gestaltung. Darüber hinaus demonstrieren sie ein wichtiges Prinzip der Wissenschaft, dem zufolge sich komplexe Systeme aus einfachen Bausteinen zusammensetzen. Das kann man in der Natur an Atomen, Molekülen oder Genen beobachten – und ebenso in noch abstrakterer Form: Aus den natürlichen Zahlen und ein paar simplen Rechenoperationen lässt sich das gesamte Gebäude der Mathematik konstruieren.

Es ist daher nicht überraschend, dass auch die spielerischen Bausteine selbst in der mathematischen Forschung auftauchen. Zum Beispiel in dieser Formel, die mit einem der größten Spielzeughersteller der Welt zu tun hat:

$$t_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\left(46^{n-1} - 2^{n-1}\right)$$

Es geht um die Frage, wie viele Objekte man aus n identischen Legosteinen bilden kann. Seit 1974 gibt Lego 102 981 500 als Anzahl der möglichen Konstruktionen an, die sich aus sechs 2×4-Steinen bauen lassen. Berechnet hat sie damals Jørgen Kirk Kristiansen, ein Enkel des Firmengründers. Die Zahl entspricht einer Untergrenze der Kombinationen; doch in der Werbung des Konzerns wurde daraus der exakte Wert aller Möglichkeiten. Man begegnet der Zahl auch heute noch, wenn es um die kreative Vielfalt des Spiels geht.

Kristiansen berücksichtigte dabei nur Objekte, die aus sechs übereinandergestapelten Steinen bestehen, nicht jedoch die zusätzlichen Möglichkeiten, bei denen niedrigere Strukturen entstehen. Zieht man diese ebenfalls in Betracht, ergeben sich 915 103 765 Variationen, wie dänische Mathematiker 2005 herausfanden.

Søren Eilers von der Universität Kopenhagen hat sich 2016 der Sache noch einmal angenommen und unter anderem die Formel links für die Stapelung der Bausteine abgeleitet. Wenn man von nur zwei 2×4-Steinen ausgeht, gibt es 46 Arten, sie aufeinanderzusetzen. Allerdings entstehen dabei keine 46 verschiedenen Gebilde. Lediglich zwei unterscheiden sich unter jedem Blickwinkel eindeutig von allen anderen. Die übrigen 44 Konstruktionen sind paarweise symmetrisch, das heißt, man kann sie durch eine Drehung in eine jeweils andere überführen. Wenn man solche Objekte, die sich durch Rotation ineinander umwandeln lassen, als gleich ansieht, kommt man auf 24 unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten.

Das Ergebnis dient als Grundlage für die angegebene Formel: Fixiert man einen Stein als Basis, hat man 46^{n-1} Möglichkeiten, die restlichen Klötze übereinander zu platzieren. 2^{n-1} davon unterscheiden sich von allen anderen, der Rest $(46^{n-1} - 2^{n-1})$ gruppiert sich in Paaren. Für sechs Steine kommt man auf 102 981 504 Kombinationen, was bis auf einen Rundungsfehler mit dem Wert von Lego übereinstimmt.

Damit hat man sich allerdings ausschließlich auf gestapelte Strukturen beschränkt. Die volle Bandbreite an Möglichkeiten haben Eilers und seine Kollegen mit einem Computer berechnet. Die 2016 erschienene Arbeit von Eilers mit dem Titel »The LEGO Counting Problem« ist ohne fortgeschrittene Mathematik-Kenntnisse leider kaum verständlich.

Doch glücklicherweise braucht man diese nicht, um Spaß am Spiel zu haben. Genau das ist ja das Schöne: Simple Bausteine stecken voller Potenzial, das Kleinkinder ebenso wie ausgewachsene Mathematiker begeistern kann. Und was gibt es Besseres, als die aus einfachen Regeln entstehende Komplexität der Natur in Spiel und Forschung nachzuvollziehen? Ich jedenfalls werde mich nun zu ein paar »Berechnungen« zurückziehen.