FRANZI SCHÄDEL (WWW.FLORIAN-FREISTETTER.AT/SHOW_CONTENT.PHP?HID=9) / CC BY-SA 4.0 (CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY-SA/4.0/LEGALCODE)

FREISTETTERS FORMELWELT
CHINTSCHINS KURIOSE KETTENBRUCHKONSTANTE

Reelle Zahlen sind verwirrend. Irgendwelche Regelmäßigkeiten unter ihnen zu finden, scheint aussichtslos – es sei denn, man hat die richtige Formel.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

spektrum.de/artikel/2040280

Die natürlichen Zahlen heißen nicht umsonst so. Es sind die intuitivsten Einheiten, die wir schon in der Grundschule lernen: 1, 2, 3, 4 und so weiter. Etwas später begegnen wir auch anderen Zahlen: den »ganzen«, die zusätzlich negative Werte umfassen, Bruchzahlen (die mathematisch korrekt rationale Zahlen heißen) und irrationale Zahlen wie Pi oder $\sqrt{2}$, die sich nicht als Bruch darstellen lassen.

Die reellen Zahlen vereinigen alle genannten Beispiele und spannen damit den gesamten Zahlenstrahl auf. Überraschenderweise existieren davon mehr als unendlich viele. Etwas korrekter ausgedrückt: Versucht man, jeder reellen eine natürliche Zahl zuzuordnen, scheitert man zwangsläufig – selbst unter der Annahme, man könne bis unendlich zählen. Die Unendlichkeit der natürlichen Zahlen ist also kleiner als die der reellen, von denen es »überabzählbar« viele gibt. Als wäre das nicht schon erstaunlich genug, bergen reelle Zahlen x eine weitere faszinierende Eigenschaft, die sich durch folgende Formeln darstellt:

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{\dots}}}},$$

$$K_0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n} \approx 2{,}6854520010\ldots$$

Sie beschreiben eine Konstante, die der russische Mathematiker Alexander Jakowlewitsch Chintschin 1935 gefunden hat. Um sie würdigen zu können, braucht es allerdings ein paar Informationen. Zunächst muss man eine beliebige reelle Zahl x in Form eines Kettenbruchs darstellen – und zwar nach einem ganz spezifischen Rezept, das sich am Beispiel π veranschaulichen lässt.

Die Kreiszahl beginnt mit 3,1415926… Der ganzzahlige Anteil vor dem Komma ist 3; während der nicht ganzzahlige Teil (π – 3) kleiner als 1 ist. Bildet man den Kehrwert der Nachkommastellen (0,1415926…), erhält man eine neue Zahl: 7,0625… Deren ganzzahligen Teil kann man wieder abtrennen, so erhält man einen weiteren Rest, mit dem man ebenso verfährt und so weiter. Setzt man all das zusammen, ergibt sich eine »Kettenbruchformel«: $\pi = 3 + 1/_{7 + 1/(\ldots)}$.

Kettenbrüche verwendet man schon seit Jahrhunderten, um irrationale Zahlen anzunähern. Bricht man die beschriebene Entwicklung für π nach zwei Schritten ab, landet man bei einer Näherung von $\pi = 3 + 1/_{7+1} = 25/8 = 3{,}125$.

Chintschins seltsame Formeln beschreiben eine höchst überraschende Eigenschaft von reellen Zahlen: Das geometrische Mittel aller ganzzahligen Anteile, die im Kettenbruch einer beliebigen reellen Zahl auftauchen, ergeben zwangsläufig die Zahl K_0 (das geometrische Mittel entspricht der n-ten Wurzel des Produkts der Argumente). Das ist höchst erstaunlich! Denn K_0 hängt nicht von der verwendeten reellen Zahl ab – sondern ist eine Konstante: $K_0 = 2{,}6854520010\ldots$

Chintschins Entdeckung gilt nicht für alle reellen Zahlen, sondern nur für die irrationalen, denn rationale Werte haben naturgemäß eine endliche Kettenbruchentwicklung. Das ist aber nicht so schlimm, da der Bereich, auf den die Aussage nicht zutrifft, im Vergleich zum gültigen Bereich vernachlässigbar klein ist. Anders gesagt: Chintschins Konstante gilt fast überall in der Mathematik. Sie mag nicht für rationale Zahlen anwendbar sein, aber es bleiben immerhin noch überabzählbar viele irrationale Werte, bei denen das Verfahren funktioniert. Zu welcher Sorte die Konstante selbst gehört, ist allerdings unklar: Bisher ist nicht bekannt, ob die Nachkommastellen ein (periodisches) Ende haben oder nicht.