



# FREISTETTERS FORMELWELT DIE KLEINSTE SIERPIŃSKI-ZAHL

**Taucht man tief genug in die Mathematik ein, erweisen sich selbst kleine Zahlen als überraschend harte Nuss.**

**Florian Freistetter** ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

» [spektrum.de/artikel/1555484](http://spektrum.de/artikel/1555484)

**W**er die größte Zahl mit einer gewissen Eigenschaft sucht, wird schnell ein Problem erkennen: Im Zweifelsfall gibt es unendlich viele, die man nicht einfach alle durchprobieren kann. Viel leichter erscheint es, den kleinsten Wert mit einem bestimmten Merkmal aufzuspüren. Beschränkt man sich auf die natürlichen Zahlen, dann ist bei der 1 unweigerlich Schluss. Noch kleinere Werte können nicht mehr auftauchen, und die Anzahl der Möglichkeiten ist endlich.

So einfach, wie es scheint, ist es allerdings nicht immer. Betrachten wir dazu zum Beispiel diese Menge:

$$\{k \cdot 2^n + 1 : n \in \mathbb{N}\}$$

Man wählt eine beliebige, aber ungerade natürliche Zahl  $k$ , geht dann der Reihe nach alle natürlichen Zahlen  $n$  durch und berechnet jeweils den Ausdruck  $k \cdot 2^n + 1$ . Man erhält auf diese Weise eine unendliche Menge an Zahlen, und wenn darin nirgendwo eine Primzahl auftaucht, dann wird  $k$  eine »Sierpiński-Zahl« genannt (nach dem polnischen Mathematiker Wacław Sierpiński).

Eine seit 1967 unbeantwortete Frage lautet: »Ist 78557 die kleinste Sierpiński-Zahl?« Es erscheint seltsam, dass es seit mehr als fünf Jahrzehnten darauf keine Antwort gibt – immerhin bleiben ja nur 39278 ungerade natürliche Zahlen übrig, die man prüfen muss. Ist keine davon eine Sierpiński-Zahl, dann lautet die Antwort »Ja«. Doch darf man nicht vergessen: Für jede dieser Zahlen muss eine unendlich lange Zahlenfolge daraufhin untersucht werden, ob Primzahlen darin enthalten sind oder nicht.

Angesichts dessen mutet es wiederum unmöglich an, dass man überhaupt irgendeine Sierpiński-Zahl identifizieren kann. Tatsächlich gelang es jedoch bis zum Jahr 2002, die Anzahl der möglichen Sierpiński-Zahlen, die kleiner als 78557 sind, auf 17 Stück einzugrenzen. Um auch die noch zu prüfen, wurde das Projekt »Seventeen or Bust« gestartet. Jeder Mensch

mit einem Computer und einem Internetanschluss konnte sich an dem gemeinschaftlichen Rechenvorhaben beteiligen. Bei 12 der 17 Zahlen konnte nachgewiesen werden, dass irgendwo in der Reihe eine Primzahl auftaucht, bevor ein Serverausfall im Jahr 2016 das Projekt stoppte.

Übrig blieben die Zahlen 21181, 22699, 24737, 55459 und 67607. Ihnen widmet sich nun das Projekt »PrimeGrid«, das die Frage durch verteiltes Rechnen auf vielen Computern endgültig beantworten soll. Es ist allerdings nicht sicher, ob es diese Antwort auch geben wird. Die einzige Methode, die dafür zur Verfügung steht, besteht in der Anwendung des »Satzes von Proth«: François Proth war hauptberuflich Landwirt, gleichzeitig aber auch ein engagierter Amateurmathematiker, der in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts eine Methode erfand, wie man bei bestimmten Zahlen vergleichsweise schnell und einfach testen kann, ob es sich um Primzahlen handelt. Die bei der Prüfung einer potenziellen Sierpiński-Zahl auftauchenden Zahlen gehören glücklicherweise dazu und machen eine Behandlung des Problems am Computer möglich.

**W**enn die fünf restlichen Werte wirklich keine Sierpiński-Zahlen sind, wird der Computer das früher oder später feststellen. Sollte die Antwort auf das Sierpiński-Problem jedoch »Nein« lauten, also eine der fünf verbleibenden Zahlen das oben genannte Kriterium erfüllen, käme die Computerprüfung nie zu einem Ende. Denn wenn nirgendwo in der von der potenziellen Sierpiński-Zahl erzeugten Reihe eine Primzahl auftaucht, wird das Computerprogramm ewig weiter-suchen.

Aber es ist auch irgendwie tröstlich, dass es solche schwer zu beantwortenden Fragen gibt. Vielleicht wird es am Ende doch noch die kreative Idee eines Menschen sein, die dieses Problem löst, und nicht die brutale Rechenkraft eines Prozessors.