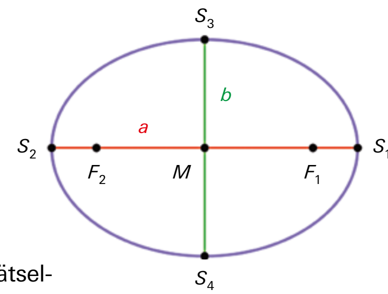
FREISTETTERS FORMELWELT
DIE UNFASSBARE ELLIPSE

Planeten bewegen sich auf Ellipsenbahnen um die Sonne. Erstaunlicherweise lässt sich aber nicht exakt sagen, wie lang ein Umlauf ist.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

spektrum.de/artikel/1875814



Als Astronom habe ich eine ganz besondere Beziehung zu Ellipsen. Immerhin rotieren die Planeten unseres Sonnensystems auf elliptischen Bahnen um die Sonne. Trotzdem stehen die länglichen Formen fast immer im Schatten des Kreises, der durch seine extreme Symmetrie besticht.

Doch Ellipsen haben mehr zu bieten, als es auf den ersten Blick scheint. Sie sind keineswegs bloß »lang gezogene Kreise«: Mathematisch lassen sie sich als die Menge aller Punkte definieren, bei denen die Summe der Abstände von zwei vorgegebenen Orten gleich ist. Da wird die Vorstellungskraft schon etwas gefordert.

Wie wir wissen, dauert es rund 365,25 Tage, bis die Erde sich einmal entlang ihrer elliptischen Bahn um die Sonne gedreht hat. Doch welche Strecke legt unser Planet dabei zurück? Anders gefragt: Wie berechnet man den Umfang einer Ellipse? Überraschenderweise gibt es dafür keine Formel – zumindest keine, die exakte Werte liefert.

$$U = \pi \left((a+b) + \frac{3(a-b)^2}{10(a+b) + \sqrt{a^2 + 14ab + b^2}} \right)$$

Diese Gleichung stammt vom indischen Mathematiker Srinivasa Ramanujan. Seine rechnerische Intuition ist legendär und sein Werk voll mit Inhalten, von denen bis heute niemand weiß, wie er darauf kam. Das gilt auch für die Berechnung des Ellipsenumfangs, in der a der großen und b der kleinen Halbachse entspricht. Um diese zu finden, muss man eine Gerade durch die Brennpunkte F_1 und F_2 ziehen. Der Abstand vom Mittelpunkt M der Ellipse zu ihren Schnittpunkten S mit der Geraden ist die große Halbachse. Die kleine erhält man, indem man senkrecht zu a eine Linie durch den Mittelpunkt zieht und die Distanz zur Ellipse misst.

Ramanujans Näherungsformel ist zwar sehr genau, aber eben nicht exakt. Der Ausnahmemathematiker konnte sogar deren Fehler abschätzen – mit einer weiteren rätselhaften Gleichung. Andere Kollegen versuchten sich ebenfalls an Approximationen. Der ehemalige Mathematiklehrer Matt Parker erklärt beispielsweise in einem Video seines Youtube-Kanals »Stand-up Maths«, er sei zwar deutlich weniger genial als Ramanujan, dafür besäße er jedoch etwas, das der vor mehr als 100 Jahren verstorbene Inder nicht hatte: einen Computer.

Parker schrieb ein Programm, das nach einer Formel für den Ellipsenumfang suchte. Keine schlechte Strategie, denn mit ausreichend Rechenaufwand lassen sich fast beliebig genaue Näherungen entwickeln. Allerdings lernt man auf diese Art nicht so viel über das zu Grunde liegende Problem wie aus Formeln, die echte Beziehungen zwischen den Parametern angeben. Zudem ist der rechnerische Aufwand oftmals nicht den Zuwachs an Genauigkeit wert. Hat man es mit nur schwach ausgeprägten Ellipsen zu tun, genügt in vielen Fällen schon die simple Näherung $U \approx \pi (a + b)$. Das erinnert an die Berechnung des Kreisumfangs $U = \pi (r + r)$, womit sich die Frage aufdrängt: Wieso lässt sich die Gleichung für einen Kreis exakt angeben, nicht aber bei einer Ellipse? Schließlich ist dieser nur der Sonderfall einer Ellipse mit $a = b = r$.

Tatsächlich täuscht uns hier die mathematische Symbolik. Denn hinter dem Gleichheitszeichen in der Formel für den Kreisumfang steht die Zahl Pi, die bekanntermaßen irrational ist: Man kann sie zwar beliebig genau, doch nie exakt angeben. Ein Kreis unterscheidet sich also nicht wirklich von einer Ellipse – für die es durchaus eine komplizierte Umfangsformel gibt. In dieser taucht aber ein so genanntes elliptisches Integral zweiter Art auf, das sich nicht genau lösen lässt. Am Ende ist man auch hier wieder auf Näherungen angewiesen.