In der Unendlichkeit steckt oft mehr, als man denkt

Primzahlen genießen in der Zahlentheorie ganz besonderes Interesse. Manchmal lohnt es sich aber auch, jene Zahlen zu betrachten, die nicht zu dieser prominenten Gruppe gehören.

spektrum.de/artikel/2085747

Florian Freistetter
ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

In der britischen Zeitschrift »The Educational Times« konnte man 1905 unter der Überschrift »Questions for Solution« eine kurze Notiz eines »Rev. J. Cullen« lesen. Zweck dieser Rubrik war es, mathematische Aufgaben zu publizieren und die Leserschaft aufzufordern, eine Lösung zu finden. In Frage Nummer 15897 interessierte sich der irische Priester und Mathematiker James Cullen für Zahlen der Form:

$$C_n = n \cdot 2^n + 1$$

Er behauptete, dass unter allen natürlichen Zahlen, die man für $n = 1$ bis 99 auf diese Weise bilden kann, nur eine einzige gebe, die eine Primzahl ist. Man muss nicht lange probieren, um sie zu entdecken; es genügt, in der obigen Gleichung $n = 1$ zu setzen. Dann nimmt C_1 den Wert 3 an. Um zu zeigen, dass für alle anderen Zahlen n, die kleiner als 100 sind, C_n keine Primzahl ist, muss man sich allerdings ein bisschen mehr anstrengen.

James Cullen war sich ziemlich sicher, dass seine Vermutung stimmt, hatte aber Zweifel, was $n = 53$ angeht. Erst ein Jahr später konnte der Mathematiker Allan Cunningham bestätigen, dass C_{53} tatsächlich eine zusammengesetzte Zahl ist – und gleichzeitig auch alle anderen Fälle bis $n = 200$ abhandeln. Nur bei $n = 141$ vermutete er eine Ausnahme; bewiesen wurde diese dann 1958.

Im Lauf der Zeit widmeten sich immer mehr Menschen der Untersuchung von »Cullen-Zahlen«. Unter den ersten 1000 sind nur die Fälle $n = 1$ und $n = 141$ Primzahlen. Danach wurden 14 weitere Cullen-Primzahlen gefunden, von denen die größte durch $n = 6\,679\,881$ gebildet wird. Man vermutet, dass es unendlich viele derartige Primzahlen gibt, das ließ sich bisher aber noch nicht zweifelsfrei nachweisen.

In solchen Fällen kommt man mit dem Untersuchen immer größerer Werte nicht ans Ziel, sondern muss einen allgemeinen Beweis führen.

Bei den so genannten »Riesel-Zahlen« scheint das auf den ersten Blick anders zu sein. Darunter versteht man eine natürliche, ungerade Zahl k, falls die Folge $k \cdot 2^n - 1$ für alle $n \geq 1$ keine Primzahl enthält. Der schwedische Numeriker Hans Riesel, nach dem die Zahlen benannt sind, fand 1956 ein Beispiel mit $k = 509\,203$. Später kamen eine Hand voll weitere Riesel-Zahlen hinzu, die aber alle noch größer ausfielen. Deshalb möchten Mathematiker herausfinden, ob es kleinere Riesel-Zahlen gibt. Doch Vorsicht: Selbst wenn es so scheint, als müsse man dafür nur die restlichen knapp 500 000 Ziffern abklappern, landet man am Ende erneut bei der Unendlichkeit. Denn jedes k erzeugt eine unendliche Zahlenfolge, die es zu untersuchen gilt.

Auch heute, Jahrzehnte nach den Arbeiten von Cullen und Riesel, gibt es engagierte Menschen, die diesen beiden Aufgaben sehr viel Zeit widmen und immer wieder weitere Zahlenwerte unter die Lupe nehmen. Sie lassen sich nicht dadurch verunsichern, dass die Unendlichkeit durch ihre Anstrengungen kein bisschen geringer wird. Aber man kann sich dem Zauber der Zahlen eben nur schwer entziehen. In der simplen Abfolge der Ziffern steckt bereits ein ganzes Universum voller Fragen.

Die Rubrik der mathematischen Fragestellungen in »The Educational Times« demonstriert das wunderbar. Wer Lust hat, kann sich dort gern einmal umsehen und zum Beispiel die Frage von Professor Schoute beantworten: Er möchte herausfinden, was die unendliche Reihe: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2+3} + \frac{1}{4+5+6} + \frac{1}{7+8+9+10} + \ldots$ für einen Wert liefert. Auch diese Aufgabe sieht einfach aus. Aber in der Unendlichkeit steckt oft mehr, als man sich denken kann – im wahrsten Sinne des Wortes.