Die Spektrum eLearningFlat

Mit der **e**Learning**Flat** erhalten Sie Zugriff auf eine Auswahl von sechs bis zu 40-minütigen E-Learning-Kursen aus dem Programm von iversity/SpringerNature.

Jeden Monat wird ein Kurs ausgetauscht, so dass Sie jährlich auf bis zu zwölf Kurse zugreifen können.

€ 99,– im Jahresabo oder € 8,99 im jederzeit kündbaren Monatsabo.

Spektrum.de/aktion/elearningflat

UNSPLASH / ALES NESETRIL (unsplash.com/photos/Im7lZjxeLhg)

Die **Spektrum** eBookFlat

Mit der **Spektrum eBookFlat** erhalten Sie Zugriff auf eine Auswahl von zwölf E-Books (PDF-Format) des Sachbuchprogramms von **Springer Spektrum** aus den Bereichen Mathematik und Naturwissenschaften. Jeden Monat wird ein Buch ausgetauscht, so dass Sie im Jahr auf bis zu 24 Bücher zugreifen können. € 99,– im Jahresabo oder € 8,99 im jederzeit kündbaren Monatsabo.

Spektrum.de/aktion/ebookflat

ROJDESIGN / GETTY IMAGES / ISTOCK

FRANZI SCHÄDEL (FLORIAN-FREISTETTER.DE/PRESSE/) / CC BY-SA 4.0 (CREATIVECOMMONS.ORG/LICENSES/BY-SA/4.0/LEGALCODE)

FREISTETTERS FORMELWELT
DIE MCNUGGETS-ZAHLEN

Münzen und frittierte Hähnchen hängen miteinander zusammen. Man kann sie nicht nur gegeneinander eintauschen, sondern sie sind auch mathematisch verbunden.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

spektrum.de/artikel/1950085

Eine gute Freundin hatte kürzlich Geburtstag. Sie war etwas traurig, dass sie nun nicht mehr 42 Jahre alt ist, denn immerhin ist das die berühmte Zahl aus dem Roman »Per Anhalter durch die Galaxis« von Douglas Adams und demnach die Antwort auf die Frage »nach dem Leben, dem Universum und dem ganzen Rest«. Eine kurze Recherche hat aber auch Interessantes über ihr neues Lebensalter zu Tage befördert. Hintergrund ist die Formel:

$$m = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n$$

Dabei sind a_1 bis a_n teilerfremde Zahlen und x_1 bis x_n natürliche Zahlen. Manche Werte lassen sich mit der Formel darstellen, andere aber nicht. Dieser Schwierigkeit begegnet man im so genannten »Münzproblem«, also der Frage, welche Summen man aus einem gegebenen Satz an Münzen bilden kann.

Wenn ich zum Beispiel nur 2- und 5-Cent-Stücke habe, dann werde ich ohne Wechselgeld nichts bezahlen können, was 3 Cent kostet. Preise von 2 oder 4 Cent klappen, ebenso alle höheren.

In der Realität bekommt man vermutlich schnell Ärger, wenn man an der Kasse mit einem Sack voller Kupfermünzen auftaucht. Doch hinter der Fragestellung steckt interessante Wissenschaft. Der deutsche Mathematiker Ferdinand Georg Frobenius wollte im 19. Jahrhundert wissen, welche die größte Zahl ist, die sich nicht auf die durch die Formel vorgegebene Weise schreiben lässt.

Dass es überhaupt so eine größte Zahl gibt, liegt daran, dass a_1 bis a_n teilerfremd sind. Hätte man beispielsweise zahlreiche 2-Cent-Münzen und einen weiteren Haufen 10-Cent-Stücke, dann sind beide Münzwerte stets durch zwei teilbar. Es wäre unmöglich, daraus ungerade Zahlen zu bilden, und es gäbe keinen größten unerreichbaren Wert.

Sind die a_i hingegen teilerfremd, kann man jede ausreichend hohe Zahl als lineare Kombination darstellen – das folgt aus dem »Satz von Schur«. Nur: Wie groß muss der Wert sein? Die Frage stammt von Frobenius, weswegen das entsprechende Ergebnis »Frobenius-Zahl« heißt.

Im Fall von nur zwei Münzen gibt es eine allgemein gültige Lösung. Der britische Mathematiker James Joseph Sylvester entwickelte 1884 eine Gleichung, um eine Frobenius-Zahl für $n = 2$ zu bestimmen: Man bildet zuerst das Produkt von a_1 und a_2 und zieht davon die beiden Werte ab ($a_1 \cdot a_2 - a_1 - a_2$). Für $n > 2$ hat noch niemand eine geschlossene Formel gefunden.

In Spezialfällen lassen sich dennoch konkrete Aussagen treffen. Einer betrifft die »McNugget-Zahlen«. Hier geht es nicht um Münzen, sondern um die frittierten Hähnchenstücke, die ein bekanntes Fast-Food-Restaurant anbietet. Dort muss man sich klassischerweise zwischen Packungsgrößen mit 6, 9 und 20 Stück entscheiden. Möchte man sich unbeliebt machen, kann man versuchen, eine Anzahl an McNuggets zu bestellen, die sich nicht aus diesen Einheiten kombinieren lässt. 14 Stück kann man beispielsweise mit den üblichen 6er und 9er Größen nicht zusammenstellen.

Die größte nicht erhältliche Zahl an McNuggets ist 43. Dass es wirklich das Maximum ist, kann man sich leicht klarmachen, wenn man die nachfolgenden Zahlen betrachtet. 44 (= 6 + 2·9 + 20) bis 49 (= 9 + 2·20) Stück lassen sich problemlos aus den vorgegebenen Packungsgrößen konstruieren. Und alle weiteren ganzen Zahlen ergeben sich durch fortlaufende Additionen von 6 zu diesen Werten.

43 ist also die größte natürliche Zahl, die keine McNugget-Zahl ist. Die Freundin war davon aber nur mäßig begeistert. Als Vegetarierin kann sie mit frittiertem Huhn wenig anfangen und trauert der verlorenen 42 immer noch ein bisschen nach.