Börsenturbulenzen – neu erklärt

Die Geometrie, welche die Form von Küstenlinien und die Gestalt von Galaxienhaufen beschreibt, erhellt auch, wie Aktienkurse steigen und abstürzen. Allerdings mußte der Vorkämpfer der fraktalen Geometrie dafür sein Konzept auf „Multifraktale" erweitern.

VON BENOÎT B. MANDELBROT

Professionelle Aktien- und Devisenhändler wissen es schon lange, und private Anleger heute besser denn je: Die Preise an den Finanzmärkten ändern sich oft mit atemberaubender Geschwindigkeit. Ganze Vermögen entstehen und vergehen in Ausbrüchen hektischer Marktaktivität und wilder Kurssprünge. So fiel im September vergangenen Jahres der Kurs der französischen Telekommunikationsgesellschaft Alcatel an einem Tag um 40 Prozent und noch einmal um 6 Prozent in den folgenden Tagen. Am vierten Tag dagegen stieg er wieder um 10 Prozent.

STEPHEN SIMPSON, BAVARIA BILDAGENTUR

Hektisches Treiben an der Aktienbörse von Chicago

Eigentlich dürften solche dramatischen Abstürze überhaupt nicht vorkommen. Das jedenfalls ist die Aussage der klassischen mathematischen Modelle, die den größten Teil dieses Jahrhunderts zur Beschreibung der Finanzmärkte verwendet wurden, insbesondere der sogenannten Portfolio-Theorie, in der es darum geht, bei einem vorgegebenen Risikoniveau den Gewinn zu maximieren.

Die Mathematik hinter dieser Theorie behandelt extreme Situationen durch freundliche Mißachtung: Große Kursschwankungen werden als zu unwahrscheinlich angesehen, als daß sie eine Rolle spielen könnten – oder schlicht als unkalkulierbar. Es stimmt schon: Für 95 Prozent der Zeit trifft die Portfolio-Theorie im wesentlichen zu. Nur hilft das wenig, wenn in den restlichen fünf Prozent der Zeit entscheidende Dinge passieren. Unvermeidlich drängt sich der Vergleich mit dem Segler auf hoher See auf. Wenn 95 Prozent der Zeit das Wetter ruhig ist – schön für ihn. Aber es ist wenig sinnvoll, die restlichen fünf Prozent zu vernachlässigen, wenn in dieser Zeit ein Taifun aufziehen könnte.

Die Formeln, mit denen in der Portfolio-Theorie das Risiko kleingerechnet wird, beruhen auf einer Reihe weitgehender, aber letztlich unbegründeter Voraussetzungen:

➤ Erstens seien Preisänderungen statistisch unabhängig voneinander. Wenn von gestern auf heute der Preis um 5 Prozent gestiegen ist, sage das nichts über den Preis von morgen; Voraussagen über künftige Marktentwicklungen seien unmöglich.

➤ Zweitens seien diese Kursschwankungen statistisch so verteilt, wie die Gaußsche Glockenkurve (die auf dem Zehnmarkschein) angibt. Dahinter steckt die Annahme, daß nicht nur die Preisschwankungen selbst, sondern auch deren Ursachen, sprich die Motive der zahlreichen Akteure, zu kaufen oder zu verkaufen, voneinander unabhängig seien.

Zu jeder Glockenkurve gehört ein Zahlenwert, die Standardabweichung. Sie bezeichnet, angewendet auf Aktienkurse, deren durchschnittliche Schwankung. Je höher dieser Wert, desto breiter ist die Kurve. Mit diesem einen Zahlenwert ist die Gestalt der Kurve im wesentlichen schon erschöpfend beschrieben; das gilt auch für die theoretische Wahrscheinlichkeit extremer Ereignisse. Für eine Schwankung vom Zehnfachen der Standardabweichung liegt diese Wahrscheinlichkeit in der Größenordnung 10^{-24} – praktisch von der Unmöglichkeit nicht zu unterscheiden. Taifune gibt es nach dieser Theorie einfach nicht.

Stimmen die Finanzdaten mit solchen Annahmen überein? Keineswegs. Trägt man Aktien- oder Devisenkurse über der Zeit auf, so zeigt sich zwar ein beständiges Auf und Ab kleiner Schwankungen – nicht ganz so gleichmäßig, wie der Glockenkurve entspräche, aber einigermaßen. Von diesem Hintergrund jedoch hebt sich eine erhebliche Zahl plötzlicher großer Sprünge ab, wie die oben beschriebenen der Alcatel-Aktie. Mehr noch: Die Größe der Preisbewegungen – der großen wie der kleinen – kann durchaus über ein Jahr ungefähr gleich bleiben und dann plötzlich für eine längere Zeit zunehmen. Große Preissprünge häufen sich, wenn es am Markt turbulenter zugeht.

Insgesamt sind solche Zacken in der Preiskurve ziemlich häufig zu beobachten – etwa jeden Monat –, und ihre Wahrscheinlichkeit liegt bei ein paar Hundertstel statt der genannten 10^{-24}. Die beobachtete Verteilungskurve der Preisschwankungen fällt also bei weitem nicht so schnell auf null ab wie die Gauß-Kurve. Sie hat beiderseits breite Schwänze (*heavy tails*; siehe Spektrum der Wissenschaft, Februar 1998, S. 105).

Eine Verteilung, die einer Gaußschen Glockenkurve folgt, nennt man Normalverteilung. Heißt das, die Finanzmärkte wären nicht normal? Natürlich nicht. Sie sind, wie sie sind. Wenn die Realität nicht zur Theorie paßt, muß an der Theorie etwas falsch sein.

Die moderne Portfolio-Theorie ist gefährlich für den, der zu stark an sie glaubt, und eine Herausforderung für den Theoretiker. Ihre Anhänger räumen zwar mitunter gewisse Mängel ein, halten jedoch dafür, daß andere Voraussetzungen einer mathematischen Modellbildung nicht zugänglich seien. Sollte es prinzipiell unmöglich sein, wenigstens für einige Eigenschaften großer finanzieller Umbrüche eine strenge quantitative Beschreibung zu finden? Pessimisten bestreiten das. Große Marktveränderungen seien Anomalien, einmalige Akte „höherer Gewalt" ohne faßbare Regelhaftigkeit. Einige Leute, darunter ich selbst, haben versucht, die Portfolio-Theorie durch kleine Reparaturen an den fragwürdigen Voraussetzungen nachzubessern – aber ohne jedes Leitprinzip und deshalb nur mit bescheidenem Erfolg. In langjähriger Arbeit habe ich mich daher zu einer offensiveren Grundhaltung durchgerungen.

Ich behaupte, daß Preisschwankungen sich durch ein Modell erklären lassen, das auf der von mir entwickelten fraktalen Geometrie beruht. Nicht daß sich mit Fraktalen – oder deren Verallgemeinerung, den Multifraktalen – die Zukunft mit Gewißheit vorhersagen ließe. Aber sie liefern ein realistischeres Bild der Marktrisiken als andere Modelle. Wenn man bedenkt, daß die Fehlberechnung solcher Risiken erst kürzlich fast den Zusammenbruch eines *hedge fund* (eines großen Investmentfonds) mit unübersehbaren Folgen ausgelöst hätte, wäre es fahrlässig, ein besseres Mittel der Risikoschätzung nicht zu nutzen.

Für Fraktale und Multifraktale gibt es bereits eine ausgearbeitete mathematische Theorie. Fraktale Muster treten nicht nur bei Preisschwankungen auf, sondern auch bei der Verteilung der Galaxien im Kosmos, in der Gestalt von Küstenlinien und in den dekorativen Bildern, die heute von ungezählten Computerprogrammen erzeugt werden (siehe „Fraktale – eine neue Sprache für komplexe Strukturen" von Hartmut Jürgens, Heinz-Otto Peitgen und Dietmar Saupe, Spektrum der Wissenschaft, September 1989, S. 52).

Ein Fraktal ist eine geometrische Form, die sich in Teile zerlegen läßt, deren jeder eine verkleinerte Version des Ganzen darstellt. Diese Eigenschaft ist als Selbstähnlichkeit bekannt geworden. In bezug auf Finanzen ist dieses Konzept keine aus den Fingern gesogene Abstraktion, sondern die formale Präzisierung einer allgemeinen Börsianerweisheit, daß nämlich der zeitliche Verlauf eines Wechsel- oder Aktienkurses im wesentlichen genauso aussieht wie zuvor, wenn man die Zeitskala dehnt oder staucht und die Preisskala geeignet anpaßt. Einem Kursverlaufsdiagramm (einem *chart*) ohne Skalenbeschriftung könnte ein Betrachter nicht ansehen, ob aufeinanderfolgende Datenpunkte sich auf Wochen, Tage oder Stunden beziehen. Demnach sind Börsen-Charts fraktale Kurven und somit vielen mächtigen Methoden der theoretischen und rechnerischen Analyse zugänglich.

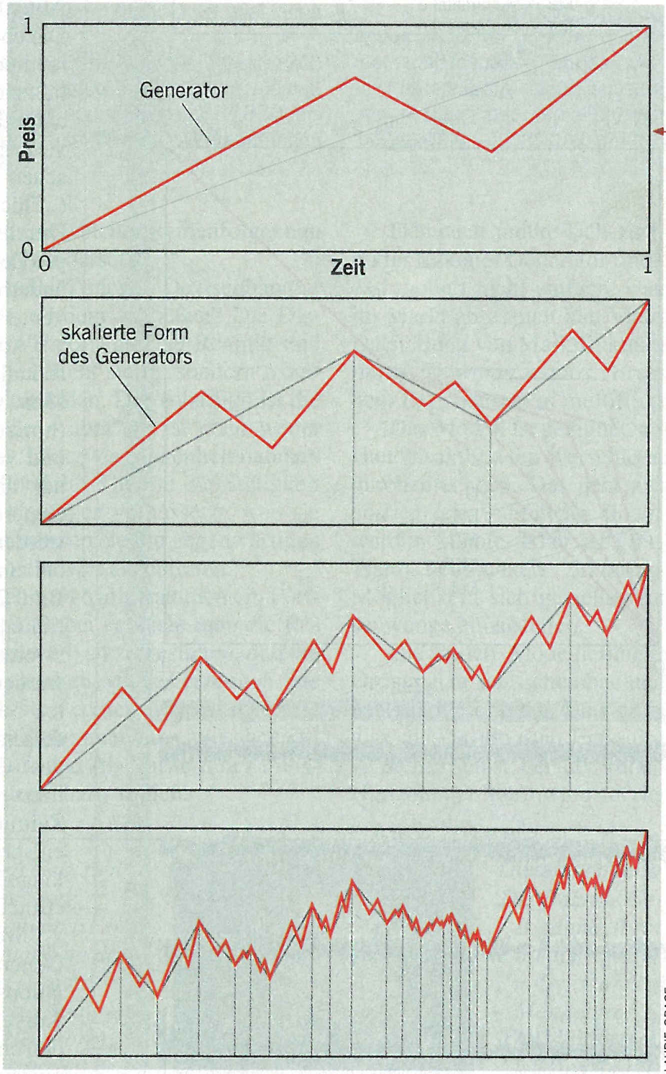
Richtig selbstähnlich im strengen Sinne sind diese Kurven allerdings nicht: Ein schlicht vergrößertes Bild eines Kurvenstücks sieht doch etwas anders aus als die Kurve selbst. Wenn zum Beispiel, wie bei Aktienkursen üblich, die typischen Zacken höher als breit sind, muß man vielmehr in horizontaler Richtung stärker vergrößern als in vertikaler, um die globalen Eigenschaften der Kurve aufrechtzuerhalten: Die Zeitskala ist mit einem größeren Faktor zu multiplizieren als die Preisskala. Eine Kurve mit dieser Eigenschaft heißt „selbst-affin"; denn in der Geometrie werden alle Transformationen, die aus Streckungen und Stauchungen mit unterschiedlichen Faktoren bestehen, affin genannt.

Es gibt also bei Börsen-Charts geometrische Eigenschaften, die unter gewissen Transformationen unverändert („invariant") bleiben. Die meisten Statistiker messen solchen Invarianten wenig Bedeutung zu; aber für Physiker und Mathematiker wie mich ist eine interessante Invariante – und sei es nur im theoretischen Modell – etwas vom Schönsten.

Ein solches Modell dient dazu, eine gute Imitation eines Börsencharts herzustellen. Der erste, sehr grobe Versuch ist eine gerade Linie über dem Intervall von 0 bis 1. Man kann sich vorstellen, daß diese Strecke den Börsenkurs von gestern 12 Uhr mit dem Kurs von heute 12 Uhr verbindet. Aber auf die Zeitskala kommt es nicht an; genausogut könnte der Gesamtzeitraum ein Jahr sein.

Diese gerade Linie ersetzt man nun durch einen Streckenzug aus drei Stücken (Bild 1): Man interpoliert gewissermaßen zwischen den Endpunkten der bisherigen Strecke, so als würde man Preise zu Zwischenzeiten in der Kurve nachtragen. Damit auf- und absteigende Preise vorkommen können, besteht dieser Streckenzug aus auf- und absteigenden Stücken.

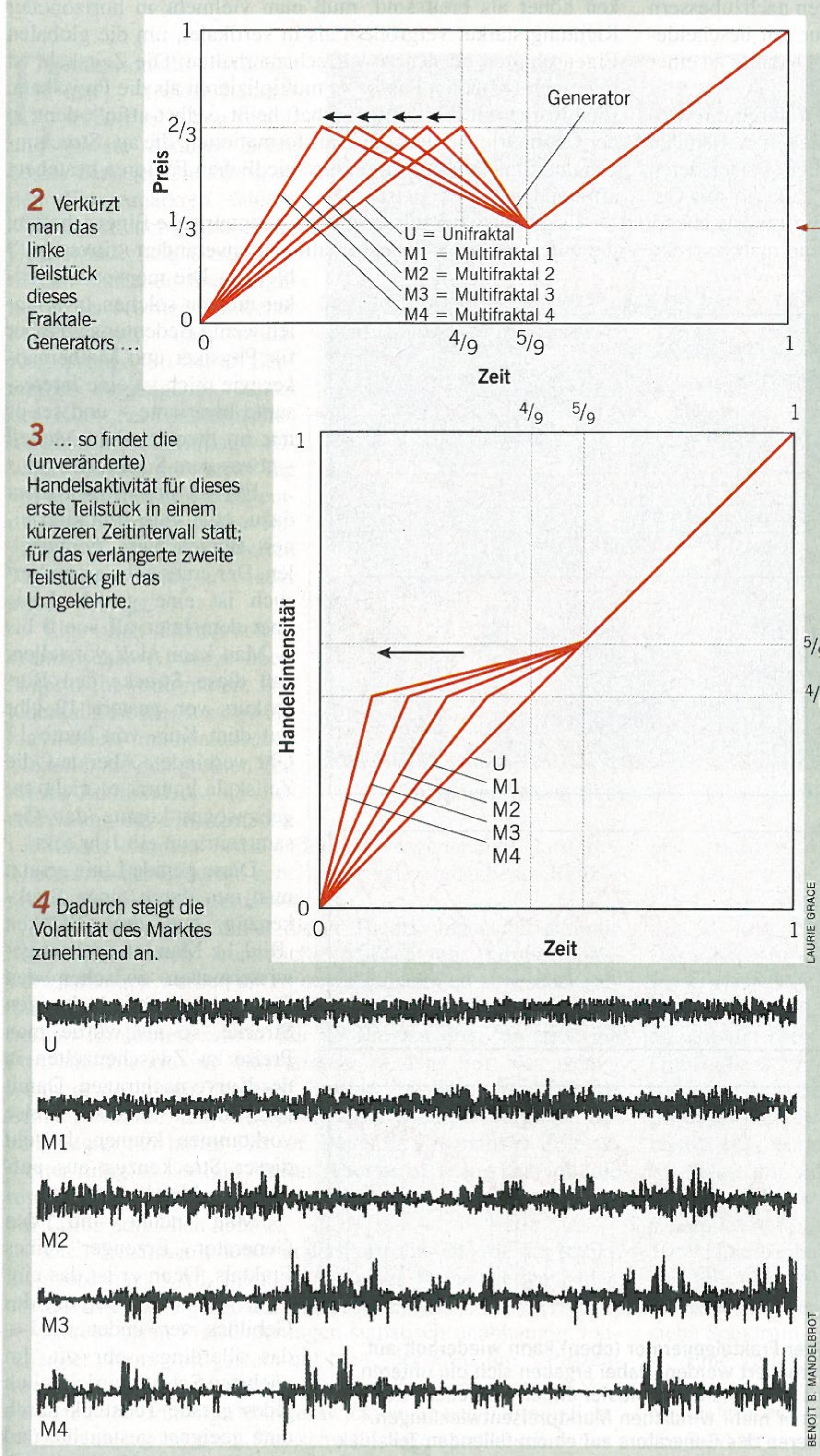
Man nennt ihn den Generator („Erzeuger") eines Fraktals. Denn er ist das einzige, was zur Erzeugung des Gebildes verwendet wird – das allerdings sehr oft. Im nächsten Schritt wird nämlich jedes gerade Teilstück durch eine geeignet gestauchte und zurechtgezerrte Kopie (ein af-



1 **Ein dreiteiliger Fraktalgenerator (oben) kann wiederholt auf sich selbst interpoliert werden; dabei ergeben sich die unteren drei Bilder. Das so entstehende Muster ähnelt mit jedem Iterationsschritt immer mehr wirklichen Marktpreisentwicklungen. (Beim Interpolieren des Generators auf einem fallenden Teilstück werden Oben und Unten vertauscht.)**

fines Bild) des Generators ersetzt. Aus einem dreiteiligen Streckenzug wird so ein neunteiliger aus drei Exemplaren des Generators. Aus jeder der neun Strecken wird im nächsten Schritt wieder ein Dreiteiler, und so weiter ohne Ende – theoretisch. In der Praxis genügt es, bis zu Intervallen herunter zu interpolieren, die so lang sind wie die Dauer einer einzelnen Handelstransaktion: allenfalls einige Sekunden. Jeder Ausschnitt der sich ergebenden Zackenlinie hat eine Form, die ungefähr wie das Ganze aussieht: Der Chart ist selbstaffin – so wurde er ja konstruiert. Das Neue (und Überraschende) ist, daß diese Kurven eine reichhaltige Struktur zeigen – eine Grundlage sowohl für die fraktale Geometrie als auch für die Chaostheorie.

Vom Fraktal zum Multifraktal



2 Verkürzt man das linke Teilstück dieses Fraktale-Generators ...

3 ... so findet die (unveränderte) Handelsaktivität für dieses erste Teilstück in einem kürzeren Zeitintervall statt; für das verlängerte zweite Teilstück gilt das Umgekehrte.

4 Dadurch steigt die Volatilität des Marktes zunehmend an.

Einige wenige ausgewählte Generatoren liefern Kurven eines ruhigen Marktgeschehens, wie es der Portfolio-Theorie entspricht. Diese speziellen Generatoren heißen unifraktal, und sie erfüllen sehr einschränkende Bedingungen. Der zentrale Fehler der Portfolio-Theorie ist, sich auf diese Spezialfälle zu beschränken. Sie ist wie eine Theorie der Ozeanwellen, in der Wellenhöhen oberhalb von zwei Meter verboten sind.

Dagegen ist die fraktale Geometrie von solcher Allgemeinheit, daß sie sowohl die ruhigen Märkte der Portfolio-Theorie als auch die tumultartigen Aktivitäten der jüngsten Zeit erfaßt. Die eben beschriebene Konstruktionsmethode für ein fraktales Preismodell läßt sich so abändern, daß die Marktaktivität sich mal beschleunigt, mal verzögert. Im Gegensatz zum klassischen Modell ist also die Volatilität („Flüchtigkeit") eines Kurses, die Durchschnittsrate seiner Veränderung pro Zeiteinheit, selbst mit der Zeit veränderlich – daher der Vorsatz „Multi" vor „Fraktal".

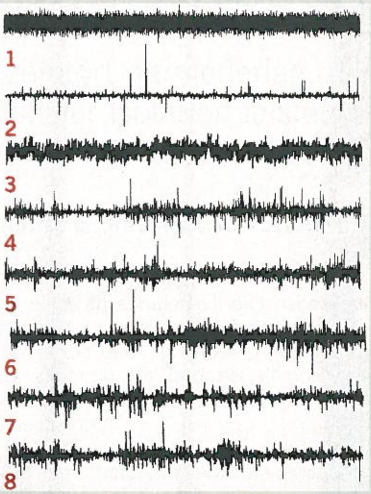
Aus einem Unifraktal ein Multifraktal zu machen ist sehr einfach: Man verlängert beim Generator die (horizontale) Zeitskala an einer Stelle und verkürzt sie entsprechend an einer anderen, so daß die Teile des Generators gestreckt oder gestaucht werden. Die vertikale Achse kann dabei unverändert bleiben. So wird in Bild 2 das erste Teilstück des unifraktalen Generators U zugunsten des zweiten schrittweise verkürzt. Aus U werden nacheinander die multifraktalen Generatoren M1 bis M4. Die Handelsaktivität, die dem ersten Teilstück des Generators entspricht, konzentriert sich also auf einen kürzeren Zeitraum und wird dadurch heftiger; entsprechend flaut sie durch die Verlängerung des zweiten Teilstücks ab (Bild 3).

Wenn man auf den so veränderten Generator den beschriebenen Interpolationsprozeß anwendet, entsteht eine Kurve, die von M1 bis M4 zunehmend den charakteristischen Schwankungen eines unbeständigen Marktes ähnelt (Bild 4). Um der Realität noch näher zu kommen, wurden die drei Stücke des Generators zufällig permutiert – was im Bild nicht dargestellt ist: Man würfelt gewissermaßen bei jedem In-

Welche Kurve ist die gefälschte?

Wie gut können Multifraktale echte Preis-Charts wiedergeben? Vergleichen wir mehrere historische Preisverläufe mit ein paar künstlichen Modellen.

Die erste Kurve ist offensichtlich noch weit von der Realität entfernt. Sie ist außerordentlich einförmig und läuft auf einen konstanten Hintergrund kleiner Preisänderungen hinaus, wie das Rauschen beim Radioempfang. Die Volatilität bleibt gleichförmig, ohne plötzliche Sprünge. Wenn das die Aufzeichnung eines historischen Preisverlaufs wäre, würden sich die Veränderungen zwar von Tag zu Tag unterscheiden, aber die Monate würden insgesamt doch sehr gleichartig verlaufen.



Die ziemlich einfache zweite Kurve ist schon besser, denn sie zeigt viele plötzliche Zacken. Aber die stehen isoliert gegen einen unveränderlichen Hintergrund, in dem die Variabilität der Preise ungefähr gleich bleibt. Das ist bei der dritten Kurve besser getroffen; dafür zeigt sie keine urplötzlichen Sprünge.

Alle drei Diagramme sind mit bloßem Auge als unrealistisch zu erkennen. Woher stammen sie? Kurve 1 folgt einem Modell, das der französische Mathematiker Louis Bachelier (1870 bis 1946) im Jahre 1900 eingeführt hat. Die Preisveränderungen folgen einer Irrfahrt (*random walk*); dazu gehört die Glockenkurve, womit das Modell auf die Portfolio-Theorie hinausläuft. Die Kurven 2 und 3 ergeben sich aus Verbesserungsversuchen von Bacheliers Arbeiten. Die eine entspricht einem Modell, das ich 1963 vorgeschlagen habe (basierend auf Lévy-stabilen Zufallsprozessen) und einem, das ich 1965 publiziert habe (basierend auf *fractional Brownian motion*). Beide sind nur unter sehr speziellen Marktbedingungen sinnvoll.

Von den – wichtigeren – fünf unteren Diagrammen beruht wenigstens eines auf echten Marktdaten, und wenigstens ein weiteres ist ein computergeneriertes Beispiel meines letzten multifraktalen Modells. Bevor Sie weiterlesen, versuchen Sie, diese Charts richtig zuzuordnen! Ich hoffe, daß auch Sie auf die Fälschungen hereinfallen.

Tatsächlich sind nur zwei der Charts echte Marktdaten. Chart 5 stellt den Kurs der IBM-Aktie dar und Chart 6 den Wechselkurs DM gegen amerikanische Dollar. Die anderen Kurven (4, 7 und 8) ähneln ihren zwei echten Gegenstücken zwar stark, sind aber vollständig künstlich, erzeugt mit einer weiter verfeinerten Form meines multifraktalen Modells.

terpolationsvorgang aufs neue aus, in welcher Reihenfolge man die Teilstücke des Generators aneinandersetzt.

Was sollte nun ein professioneller Anleger, Devisenhändler oder sonstiger Marktstratege aus all dem schließen? Die Diskrepanzen zwischen der Portfolio-Theorie und der Realität sind offensichtlich. Die Preise variieren nicht stetig, sondern oszillieren wild, und zwar auf allen Zeitskalen. Die Volatilität ist die entscheidende Bestimmungsgröße – aber sie ist eben weder konstant noch leicht berechenbar. In der Vergangenheit nahmen die Geldmanager hin, daß die Portfolio-Theorie die Stetigkeit und Beschränktheit der Preisbewegungen voraussetzt, weil sie nichts Besseres hatten. Aber nun müssen sie die gegenwärtigen Finanzmodelle nicht mehr zum Nennwert akzeptieren.

Statt dessen kann man nunmehr mit Multifraktalen ein Portfolio einem Härtetest unterziehen. Dabei versucht man die Regeln (im wesentlichen die Generatoren) so zu gestalten, daß die entstehenden Multifraktale die gleichen Muster erzeugen wie die unbekannten Regeln, welche die echten Märkte regieren. Die Theorie beschreibt exakt den Zusammenhang zwischen der Form des Generators und den Auf- und Ab-Mustern der Preisbewegungen, die sich in den echten Charts finden.

Demnach müßte sich zu historischen Marktdaten ein korrekter fraktaler Generator finden lassen. Unser aktuelles Modell extrapoliert nicht einfach, was sich gestern oder letzte Woche im Markt abgespielt hat. Vielmehr liefert es eine realistischere Darstellung von Marktfluktuationen; der Fachausdruck ist *fractional Brownian motion* (Brownsche Bewegung mit gebrochenem Exponenten) in multifraktaler Handelszeit.

Das Modell ist geeignet, auf der Grundlage zurückliegender Handelsaktivitäten verschiedene Szenarien für die Zukunft durchzurechnen. Das geht zwar nicht so weit, daß ein Preisanstieg oder -abfall an einem bestimmten Tag prognostiziert werden könnte. Aber es gibt immerhin Schätzungen für die Wahrscheinlichkeit zukünftiger Ereignisse und damit die Möglichkeit, sich gezielter auf die unweigerlichen Wetterumschwünge einzustellen.

Die neuen Modellierungsverfahren können ein Licht der Ordnung in das scheinbar undurchdringliche Dickicht der Finanzmärkte bringen. Und sie bestätigen die alte Seefahrerregel, die, wie die jüngsten Ereignisse gezeigt haben, alle Beachtung verdient: Selbst bei der ruhigsten See kann kurz hinter dem Horizont der Sturmwind aufziehen. ■

Benoît B. Mandelbrot *hat zu vielen Gebieten der Wissenschaft und der Kunst beigetragen. Von Haus aus Mathematiker, ist er seit 1987 Professor für Mathematik an der Yale-Universität in New Haven (Connecticut). Am Thomas-J.-Watson-Forschungszentrum in Yorktown Heights (New York), wo er von 1958 bis 1993 arbeitete, hat er den Status eines IBM Fellow Emeritus für Physik. Er ist Mitglied mehrerer Wissenschaftsvereinigungen und wurde mit zahlreichen Preisen ausgezeichnet.*

Literaturhinweise

Die fraktale Geometrie der Natur. Von Benoît B. Mandelbrot. Birkhäuser, Basel 1991.

Fractals and Scaling in Finance: Discontinuity, Concentration, Risk. Von Benoît B. Mandelbrot. Springer, New York 1997.

The Multifractal Model of Asset Returns. Diskussionspapier der Cowles Foundation for Economics, Nummern 1164–1166. Von Laurent Calvet, Adlai Fisher und Benoît B. Mandelbrot. Cowles Foundation, Yale University 1997.