FREISTETTERS FORMELWELT

UNENDLICH VIEL BIER NACH FEIERABEND

Selbst wenn zahllose Menschen in eine Kneipe gehen, trinken sie nicht zwingend alle Vorräte leer.

Florian Freistetter ist Astronom, Autor und Wissenschaftskabarettist bei den »Science Busters«.

spektrum.de/artikel/1634756

»Unendlich viele Mathematiker gehen in eine Bar. Der erste bestellt ein Bier. Der zweite ein halbes Bier. Der dritte ein viertel Bier. Der vierte ein achtel Bier. ›Geht mir nicht auf die Nerven‹, sagt der Barkeeper und stellt zwei Bier auf den Tresen.«

Diesen Scherz habe ich Anfang 2018 auf dem Twitter-Account der »Science Busters«, einer Wissenschaftskabarettgruppe, zu deren Ensemble ich gehöre, gepostet. Und selbst mehr als ein Jahr später beschäftigt er die Leser immer noch. Der scheinbare Widerspruch ist gleichermaßen verwirrend und faszinierend. »Nie im Leben reichen zwei Bier für unendlich viele Mathematiker«, antwortete jemand darauf, und selbst eine lange Diskussion konnte ihn nicht vom Gegenteil überzeugen.

Den Witz kann man jedoch über eine geometrische Reihe erklären:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_0\, q^k = \frac{a_0}{1-q}$$

Diese Formel gilt, wenn q kleiner als 1 und größer als –1 ist. Für die Werte $a_0 = 1$ und $q = \frac{1}{2}$ ergibt sich die Abfolge aus dem Witz. Man setzt der Reihe nach 0, 1, 2, 3, … für k ein und summiert die Ergebnisse: 1+ ½ + ¼ + ⅛ + … Der Barkeeper kennt schon den Grenzwert dieser Folge, der sich durch die Formel berechnen lässt, und weiß, dass er mit zwei vollen Biergläsern die unendlich vielen Mathematiker bedienen kann. Je größer k wird, desto kleiner wird q^k, und insgesamt wird die Summe nie größer als 2.

Man kann das überraschende Ergebnis aber auch geometrisch veranschaulichen. Stellen wir uns ein Rechteck mit den Seitenlängen 1 und 2 vor, das also den Flächeninhalt 2 hat, und entfernen davon Rechtecke, deren Fläche jeweils den einzelnen Termen der unendlichen Reihe entsprechen.

Der erste Summand ist dann ein Quadrat mit Seitenlänge 1, also genau die Hälfte des Rechtecks. Für den zweiten Term streichen wir eine Fläche der Größe ½, das heißt ein Rechteck mit Seitenlängen 1 und ½, was der Hälfte des verbliebenen Quadrats entspricht. Und auch der dritte Term (¼) halbiert die verbleibende Hälfte; heraus kommt ein Quadrat mit Seitenlänge ½. Das geht ewig so weiter. Jeder folgende Term passt in den übrig gebliebenen Teil des ursprünglichen Rechtecks. Im Grenzfall unendlich vieler Summanden ist das Rechteck komplett beseitigt, so dass sich die Terme insgesamt zu 2 addieren.

Geometrische Reihen findet man nicht nur in wissenschaftlichen Witzen, sondern in vielen Bereichen der Mathematik. Zum Beispiel lässt sich so auch die verwirrende Tatsache erklären, dass 0,99999… gleich 1 ist. Die nicht enden wollende periodische Dezimalzahl ist nämlich nichts anderes als eine geometrische Reihe mit $a_0 = \frac{9}{10}$ und $q = \frac{1}{10}$, also die unendliche Summe von 0,9 + 0,09 + 0,009 + … Der Grenzwert, der sich aus der Formel errechnet, beträgt dann 0,9 geteilt durch (1 – 0,1), was nichts anderes als 1 ergibt.

Meist verunsichern uns Unendlichkeiten, weil unser intuitives Verständnis bei niemals endenden Prozessen versagt. In solchen Fällen muss man auf die Mathematik zurückgreifen und akzeptieren, dass die Ergebnisse unseren Erwartungen widersprechen können. Denn manchmal hat selbst die Unendlichkeit ein Ende: im obigen Witz bei zwei Gläsern Bier – obwohl sich manche vielleicht mehr wünschen, um die verwirrenden Aspekte der Unendlichkeit erträglicher zu machen.