Aufstieg zum Gran Tribonacci

Das seltsame Land der »4-Tupel« ist weit gehend flach. Aber es gibt einen Gipfel – unbezwingbar, denn er ist unendlich hoch.

Von Achim Clausing

Hochsommer in den Dolomiten, ein strahlend schöner Tag. Auf der Bergwiese vor der Calcolata-Hütte, fast 2000 Meter hoch am Einstieg zum Gran Tribonacci gelegen, faulenzen drei Wanderer. Enrico ist ein Mathematiklehrer aus Neapel, Typ Naturbursche mit Vollbart und unvermeidlicher Pfeife. Ada und Charly studieren in London Computer Science, sie gehören eher zu der neuerdings öfter anzutreffenden Spezies der Hightech-Hiker. Enrico und das Pärchen haben sich erst beim Aufstieg zur Hütte kennen gelernt, aber bei aller Verschiedenheit versteht man sich bestens.

Während Charly sein Handy in das Subnotebook stöpselt, um im Internet den Wetterbericht nachzusehen, zeigt Ada Enrico, wie man auf ihrem GPS-Gerät die Höhe der Hütte ablesen kann. »Die hab' ich schon auf der Tafel am Hütteneingang gelesen«, lacht Enrico. Und dann zu Charly, auf die Zapfen einer Latschenkiefer deutend: »Und dass es morgen nicht mehr so schön wird wie heute, seh ich an denen da.«

»Ach komm«, meint Ada, »ich finde das spannend: Erst wenn das GPS Signale von vier Satelliten empfängt – hier, am Display sieht man, wie es einen nach dem anderen reinkriegt –, kann es die Höhe ausrechnen.«

Jetzt wird Enrico lebhaft. »Aus vier Zahlen die Höhe ausrechnen? Das ist wirklich spannend! Ich habe da nämlich was ganz Seltsames entdeckt.« Er kramt einen Bleistiftrest aus der Tasche und beginnt auf der Rückseite seiner Wanderkarte zu schreiben.

»Du fängst mit vier Zahlen an, zum Beispiel

37 18 15 3.

Diese vier Zahlen beschreiben eine Stelle im Gebirge, aber du weißt noch nicht, wie hoch sie liegt. Unter jede Zahl schreibst du den Abstand zu ihrem rechten Nachbarn:

19 3 12 34

(Die letzte Zahl hat die erste als rechten Nachbarn.) Diese Rechnung heißt ›ein Schritt abwärts‹. Jetzt machst du so lange Abwärtsschritte, bis du bei vier gleichen Zahlen ankommst – gewissermaßen im Flachland. Die Anzahl deiner Schritte bis dahin ist die ›Höhe‹ der vier Zahlen, mit denen du angefangen hast.«

Ada übt sich in der längst verlernten Kunst des Kopfrechnens. Unerwartet schnell ist alles vorbei:

37	18	15	3
19	3	12	34
16	9	22	15
7	13	7	1
6	6	6	6

»Nach vier Schritten ist schon finito«, kommentiert Enrico. »Nicht gerade Schwindel erregend hoch, was? Aber genau das ist das Eigenartige an der Sache: Egal, wo du startest, jedesmal bist du mit ein paar Schritten in der Ebene.«

»Vielleicht muss man für größere Höhen einfach größere Zahlen nehmen?« Ada probiert es aus, aber Enrico hat Recht:

596 101	201 938	203 377	60 249
394 163	1 439	143 128	535 852
392 724	141 689	392 724	141 689
251 035	251 035	251 035	251 035

»Es nützt dir auch nicht viel, wenn du deine Zahlen noch größer machst. Meistens bist du trotzdem ruck, zuck unten. Übrigens kommst du manchmal schon mit kleinen Zahlen etwas höher hinauf:

0	1	4	9
1	3	5	9
2	2	4	8
0	2	4	6
2	2	2	6
0	0	4	4
0	4	0	4
4	4	4	4

Aber was soll's, Höhe 7 ist immer noch kein Hochgebirge.« Mit Grandezza weist er auf die Bergwelt ringsum. »Dreitausender will ich sehen!«

Inzwischen hört auch Charly zu. »Die können doch nicht so schwer zu finden sein. Du musst nur gründlich suchen! Gib mir ein paar Minuten Zeit zum Probieren.« Das nun einsetzende Tastaturgeklapper stört ein wenig die nachmittägliche Stille.

Alle Wege führen in die Ebene

Von jedem ganzzahligen 4-Tupel (a, b, c, d) kommt man in endlich vielen Abwärtsschritten in die Ebene, das heißt zu dem 4-Tupel (0, 0, 0, 0). Warum?

Ein Abwärtsschritt erzeugt aus dem Tupel (a, b, c, d) das neue Tupel $(|a-b|, |b-c|, |c-d|, |d-a|)$. In den Beispielen von Enrico und Ada beobachtet man, dass spätestens nach vier solchen Schritten alle Zahlen gerade sind.

Das gilt immer: Wenn zum Beispiel a, b, c gerade sind und d ungerade ist, dann verlaufen die Abwärtsschritte wie folgt:

$(0, 0, 0, 1) \to (0, 0, 1, 1) \to (0, 1, 0, 1) \to (1, 1, 1, 1) \to (0, 0, 0, 0)$.

Dabei steht 0 für eine gerade und 1 für eine ungerade Zahl, $\to$ für einen Abwärtsschritt. Die anderen Kombinationen aus Gerade und Ungerade überlegt man sich entsprechend.

In einem Tupel aus lauter geraden Zahlen darf man jede Zahl durch 2 teilen: Wenn das halbierte Tupel vier gleiche Zahlen erreicht, dann gilt das auch für das »gerade« Tupel und damit für das Starttupel.

Die größte unter den vier Zahlen eines Tupels wird bei einem Abwärtsschritt zumindest nicht größer (meistens sogar kleiner). Beim Teilen durch 2 wird auch dieses Maximum des Tupels halbiert. Also kann man nach jeweils vier Schritten mit einem Tupel weiterrechnen, dessen Maximum sich halbiert hat oder noch kleiner geworden ist. Und weil alles ganzzahlig ist, landet man irgendwann unvermeidlich bei einem Tupel aus vier Nullen.

Ada liegt wieder auf dem Rücken und schaut in den blauen Himmel. »Sag mal, Enrico, woher nimmst du eigentlich die Sicherheit, dass man immer ins ›Flachland‹, also zu vier gleichen Zahlen kommt? Wenn ich im Gebirge bei jedem Schritt abwärts gehe, könnte ich ja zum Beispiel statt im Tal an einem hoch gelegenen See landen, um den ich dann höchstens noch auf gleicher Höhe herumwandern kann, ohne dass es weiter abwärts geht. Kann hier nicht auch so was passieren? Könnte man nicht vielleicht bei ein paar Vierergruppen ankommen, zwischen denen die Rechnung dann immer im Kreis läuft?«

Solche Fragen sollte man einem Mathematiker besser nicht stellen. Mit Begeisterung erklärt Enrico ihr haarklein, warum das keinesfalls vorkommen kann (Kasten links unten; siehe auch Spektrum der Wissenschaft 1/2002, S. 112). »Aber nur, wenn du mit Vierergruppen von Zahlen rechnest. Bei 3- oder 5-Tupeln tritt genau das ein, was du vermutet hast – man landet in der Regel in einem Zyklus aus mehreren Tupeln, aus dem die Rechnung nicht mehr herausfindet.«

»Tupel?«

»Ja. Kleiner lateinischer Sprachscherz der Mathematiker. Drei Zahlen heißen ein Tripel, vier ein Quadrupel, dann geht es weiter: Quintupel, Sextupel, …, und wenn man sich auf die Anzahl der Zahlen nicht festlegen will, nennt man es n-Tupel. Für $n=4$ dann ein 4-Tupel.«

Der Gran Tribonacci

Ada hat besser zugehört, als man bei ihrer schläfrigen Haltung vermuten würde. »Was du sagst, hat alles mit ganzen Zahlen zu tun. Wie sehen denn die Höhen aus, wenn du etwas krummere Zahlen nimmst? Dann könnten die Zahlen bei den Abwärtsschritten doch immer kleiner werden, ohne dass das jemals aufhört, oder?«

»Eine wunderbare Frage, Ada, ehrlich! Aber es geht wie durch ein Wunder nicht so, sondern man kommt ebenfalls blitzschnell auf vier gleiche Zahlen. Schau, dieses Beispiel ist typisch.« Enrico rechnet mit beeindruckender Geschwindigkeit:

$$\begin{array}{cccc} 1 & e & \sqrt{7} & \pi \\ e-1 & e-\sqrt{7} & \pi-\sqrt{7} & \pi-1 \\ \sqrt{7}-1 & \pi-e & \sqrt{7}-1 & \pi-e \end{array}$$

Und schon in der nächsten Zeile steht viermal derselbe Ausdruck: $\sqrt{7}+e-\pi-1$. »Alles exakt gerechnet, nicht mit Näherungswerten wie $e=2{,}71828\ldots$ oder $\sqrt{7}=2{,}64575\ldots$ Aber die Zahlen in die- ▷

Der Weg nach oben: die Tribonaccizahlen

Für eine genauere Beschreibung des Aufstiegs nummerieren wir die Tribonaccizahlen: $t_0=0,\ t_1=0,\ t_2=1,\ t_{n+3}=t_n+t_{n+1}+t_{n+2}$. Das n-te »Tribonaccitupel« ist dann $T_n=(t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},\ t_{n+3})$. Die ersten drei Abwärtsschritte von T_n aus verlaufen so:

$$T_n \rightarrow T_{n-2}+T_{n-1} \rightarrow T_{n-3}+T_{n-1} \rightarrow 2 \cdot T_{n-2}$$

Das kann man mit etwas Geschick unschwer nachrechnen. Uns genügt ein Beispiel:

$(81, 149, 274, 504) = T_{10} \rightarrow (68, 125, 230, 423)$
$= (24, 44, 81, 149) + (44, 81, 149, 274) = T_8 + T_9$
$\rightarrow (57, 105, 193, 355) = (13, 24, 44, 81) + (44, 81, 149, 274)$
$= T_7 + T_9 \rightarrow (48, 88, 162, 298) = 2\cdot(24, 44, 81, 149) = 2\cdot T_8$

Daraus sieht man, dass beim Übergang von T_{n-2} zu T_n die Höhe um 3 anwächst. Die genaue Höhe des Tupels T_n ist $3n/2+2$ für gerades n und $(3n+1)/2$ für ungerades n. Der kleinste »Dreitausender« unter den Tribonaccitupeln ist demnach T_{2000} mit der Höhe 3002. Die kleinste Zahl t_{2000} dieses Tupels hat 529 Dezimalstellen! Wenn man diese riesige Zahl nur um 1 erhöht, so ist das geänderte Tupel schon um 998 niedriger. Klar, dass es aussichtslos ist, so hohe Tupel durch zufälliges Probieren zu suchen.

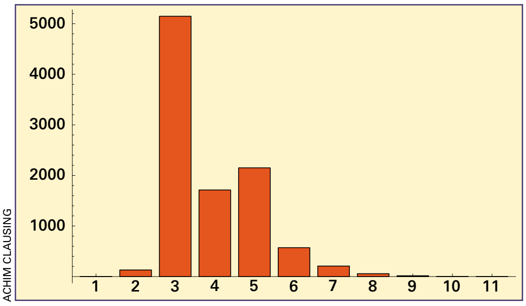
Wie groß muss ein Tupel mit einer vorgegebenen Höhe mindestens sein? Die Antwort gibt eine Zahlenfolge, die eng mit der Tribonaccifolge verwandt ist:

0, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 9, 11, 13, 31, 37, 44, 105, 125, 149, 355, …

Das n-te Element a_n dieser Folge gibt an, wie groß die größte Zahl in einem 4-Tupel der Höhe n mindestens ist. Beispielsweise ist $a_7=9$, weil es Tupel der Höhe 7 mit dem Maximum 9 gibt, zum Beispiel (0, 1, 4, 9), nicht aber solche, deren Elemente alle kleiner sind als 9. Die Glieder dieser Folge sind

$t_1,\ t_0+t_2,\ t_1+t_2,\ t_3,\ t_2+t_4,\ t_3+t_4,\ t_5,\ t_4+t_6,\ t_5+t_6,\ t_7,\ \ldots$

Aus den Werten $a_{24}=t_{17}=5768$ und $a_{25}=t_{16}+t_{18}=13\,745$ sieht man, dass Charly mit seiner Suche in den Zahlen bis 10 000 bestenfalls ein Tupel der Höhe 24 hätte finden können.



Charlys Statistik: So verteilen sich die Höhen von 10 000 zufälligen 4-Tupeln mit Werten unterhalb von 10 000. Darunter sind nur drei Tupel mit Höhe 10 und zwei mit Höhe 11: (4147, 88, 766, 1934) und (8955, 334, 4958, 7737). Das Bild ist typisch, auch für Tupel mit viel größeren Zahlen. Insbesondere hat immer ungefähr die Hälfte aller Tupel die Höhe 3.

ser Rechnung liegen so weit auseinander, dass es egal ist, ob wir exakt oder näherungsweise rechnen. Wir könnten ebenso mit den Näherungen

1,00 2,71 2,64 3,14

oder gleich mit den ganzen Zahlen

100 271 264 314

anfangen, die Rechnung würde nicht anders verlaufen. Das ist – in sträflicher Vereinfachung – der Grund, warum man auch von solchen ›krummen‹ 4-Tupeln so schnell zu vier gleichen Zahlen kommt. Meistens jedenfalls! – Charly, was machen die Dreitausender, schon was gefunden?«

»Leider nein. Über die Höhe 11 bin ich noch nicht hinausgekommen. Langsam habe ich Zweifel, ob es in deinem mathematischen Gebirge Dreitausender gibt!« (Bild links oben)

»Wer hoch hinauf will, muss klettern«, meint Enrico und stopft gemütlich seine Pfeife, »du wirst sehen, damit kommt man ganz schön weit. In Höhe 3000 wird die Luft allerdings dünn … Mit Klettern meine ich, dass man Aufwärtsschritte machen muss! Man muss zu einem Tupel (a, b, c, d) ein anderes Tupel (x, y, z, u) finden, von dem aus es in einem Abwärtsschritt nach (a, b, c, d) geht – also eines, das über (a, b, c, d) liegt. So ein Tupel gibt es leider nicht immer. Aber wenn $a+b+c=d$ ist, existiert eins. Dann liegt nämlich $(x, y, z, u) = (0, a, a+b, a+b+c)$ einen Schritt über (a, b, c, d). Das sieht man, oder? Zum Beispiel erfüllt (19, 3, 12, 34) die Bedingung: Es gilt $19+3+12=34$, also liegt (0, 19, 22, 34) einen Schritt darüber.

Hat man diesen Anstieg erst geschafft, ist auf der neuen Höhe leicht herumwandern, indem man zu den Zahlen des gefundenen Tupels eine Konstante addiert und/oder ihr Vorzeichen umdreht. So kommt man zu meinem ersten Beispiel (37, 18, 15, 3) = (37, 37, 37, 37) – (0, 19, 22, 34), das ebenfalls einen Aufwärtsschritt über (19, 3, 12, 34) liegt.«

Enrico entzündet seine Pfeife und fährt unter dicken Rauchwolken fort:

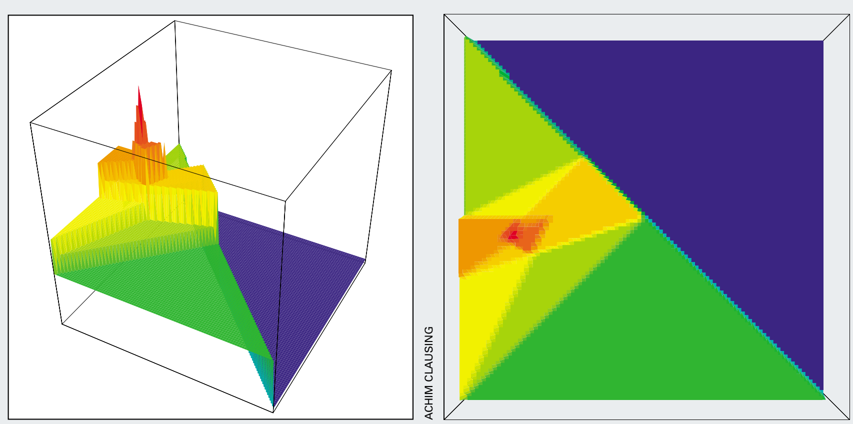
»Um nun in richtig große Höhen zu gelangen, sollte das um einen Schritt höhere Tupel am besten wieder von der Art

Der Gipfel der Tupel

Um auch bei schlechtem Wetter einen Blick auf den Gran Tribonacci zu werfen, normiert man alle Tupel, indem man zuerst das Minimum abzieht und dann durch das Maximum teilt. Beispiel: Aus (37, 18, 15, 3) wird zuerst (34, 15, 12, 0) und dann (1, 15/34, 12/34, 0). Dadurch ändert sich an der Höhe des Tupels nichts, aber zwei der Komponenten haben die Werte 0 und 1, die anderen liegen irgendwo dazwischen. Durch Umstellung der Reihenfolge kann man noch (ohne Änderung der Höhe!) erreichen, dass die Null an der ersten Stelle steht und die Eins entweder an der dritten oder der vierten Stelle: $(0, x, 1, y)$ oder $(0, x, y, 1)$. Die Höhen dieser Punkte lässt man sich von einem Computer zeichnen.

Dabei stellt sich heraus, dass die Punkte $(0, x, 1, y)$ langweilig sind: Ihre Höhe reicht nur bis 5. Die Abbildung zeigt die Höhen der Punkte $(0, x, y, 1)$ (nur eine Hälfte des Diagramms ist gezeichnet, die andere sieht genauso aus). Wieder ist eine Hälfte langweilig: Für $x > y$ hat man immer Höhe 3 (die grüne Region). In der anderen Hälfte liegt der rot eingezeichnete Gran Tribonacci. Die Koordinaten seines Gipfels kann man genau bestimmen, es ist das Tupel $(0, 1/x^3, 1/x^3 + 1/x^2, 1) = (0, 0{,}160\ldots, 0{,}456\ldots, 1)$, wobei $x = 1{,}839\ldots$ die positive Lösung der »Tribonacci-Gleichung« $1 + x + x^2 = x^3$ ist. Ohne Normierung hat der Gipfel die Koordinaten $(1, x, x^2, x^3)$ mit diesem x.

Hier und nur hier, in der unmittelbaren Nähe dieses Gipfels findet man wirklich hohe Tupel. Und der Gipfel selbst? Er ist der einzige Punkt, von dem aus man auch mit noch so vielen Schritten nicht in die Ebene gelangt! Von $(1, x, x^2, x^3)$ kommt man in einem Abwärtsschritt nach $0{,}839\ldots \cdot (1, x, x^2, x^3)$. Das kann man noch so oft wiederholen, die Koordinaten werden nicht gleich. Auch wenn die Grafik das nicht darstellen kann: Der Gipfel des Gran Tribonacci ist unendlich hoch.



Blick auf den Gran Tribonacci aus dem Flugzeug (links) und aus dem Satelliten, der in großer Höhe genau über dem Gebirge schwebt (rechts)

sein, dass seine ersten drei Zahlen zusammen die vierte ergeben, ebenso das darüber liegende Tupel, und immer so weiter. Das wäre ein echter Steilaufstieg! Und den gibt es tatsächlich. Hier ist er: Es sind die Zahlen

0, 0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274, 504, …

Man bekommt sie, wenn man mit 0, 0, 1 anfängt und dann immer die Summe der letzten drei Zahlen als nächste hinschreibt: $0+0+1=1$, $0+1+1=2$, $1+1+2=4$, … Das ist genau unsere »$a+b+c=d$«-Regel. Zu Ehren des Gran Tribonacci will ich sie die Tribonaccizahlen nennen. Das Wunderbare an ihnen ist: Wenn man je vier aufeinander folgende Tribonaccizahlen zu einem Tupel macht, dann werden diese Tupel höher und höher! Die Steigung auf unserem Aufstieg ist allerdings nicht gleichmäßig, es geht immer ein Stück eben, dafür liegt das nächste Tupel gleich um 3 Schritte höher:

2, 2, 5, 5, 8, 8, 11, 11, 14, 14, 17, …

Zum Beispiel hat (0, 0, 1, 1) die Höhe 2 und (81, 149, 274, 504) die Höhe 17. Na ja, und weil dieser Weg endlos nach oben führt, kommt man auf ihm irgendwann auch über die Dreitausender-Grenze. Und noch weit höher … Was für ein Berg, der Gran Tribonacci!«

Am nächsten Morgen hat es sich zugezogen, die Latschenkiefer und der Wetterbericht haben Recht behalten. Enrico lässt sich dadurch nicht von der Gipfelbesteigung abhalten, aber Ada und Charly finden den Aufstieg bei schlechtem Wetter zu riskant. Man tauscht noch Namen und E-Mail-Adressen aus, dann macht Enrico sich auf den Weg.

Charly sitzt schon wieder über seinem kleinen Notebook. »Guck doch mal ›Tribonacci‹ im Internet nach«, schlägt Ada vor. Und siehe da: Google findet nicht weniger als 1210 Webseiten. Plötzlich ist Charly elektrisiert: »Schau mal, da ist ja die Tribonaccifolge! Und ich dachte … Dabei gibt es sie ganz offiziell, Nummer A73 in der ›Online Encyclopedia of Integer Sequences‹.

Das ist eine interessante Webseite: Man kann die ersten paar Glieder einer Zahlenfolge eintippen, und die Encyclopedia gibt die Auskunft zurück, wie die Folge weitergeht, wie sie heißt und was die Mathematik darüber weiß. «

Charly tippt die Folge von gestern ein, und die Online Encyclopedia gibt sogar zwei Treffer zurück: A45794 und A65678. »Da steht ja die Geschichte, die Enrico uns als seine Entdeckung vorgesetzt hat. So ein Gauner!«

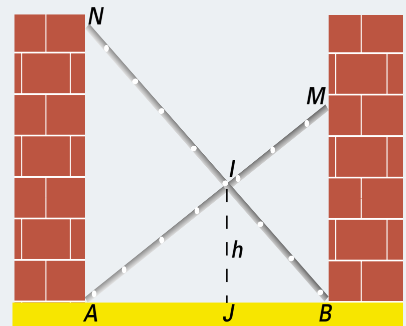
Ada kramt den Zettel mit Enricos Adresse heraus. »Enrico Ducci«, liest sie vor, »mal sehen, ob man unseren Freund googeln kann.« Die Suchmaschine spuckt merkwürdige Dinge aus: »R. Honsberger refers to the four-number sequence problem as Professor Enrico Ducci's observation.« Und, in italienischer Sprache, einen Lebenslauf: »Enrico DUCCI (1864–1940). Nacque a Fermo il 15–5–1864 e morì a Napoli il 29–7–1940. Autore di parecchi lavore di carattere didattico Necr.: Periodico di Matematiche (4) 20 (1940), 340.«

Auch ohne Italienischkenntnisse ist klar: Dieser Enrico Ducci weilt seit 1940 nicht mehr unter uns. »Irgendetwas stimmt da nicht.« Sie schauen aus dem Fenster, ob Enrico noch zu sehen ist. Aber den haben die Nebel längst verschluckt, mitsamt dem steilen Aufstieg und dem ganzen Gran Tribonacci, als hätte es das alles nie gegeben. ◁

PREISRÄTSEL

Leitern

Von Pierre Tougne



Folgendes Rätsel sorgte Anfang des 20. Jahrhunderts für Kopfzerbrechen:

»Zwei Leitern unterschiedlicher Länge $\overline{AM}=a$ und $\overline{BN}=b$ stehen auf waagerechtem Boden schräg zwischen zwei senkrechten Mauern (siehe Skizze rechts). Der Schnittpunkt der beiden Leitern befindet sich in der Höhe h. Berechnen Sie den Abstand d der beiden Mauern.«

Das Problem ist ohne Computer nur schwer zu lösen – und mit Computer nicht besonders reizvoll. Deshalb ist es dieses Mal Ihre Aufgabe, zu vorgegebenen Werten von a und b diejenigen Werte von h zu bestimmen, für die das Problem überhaupt eine Lösung hat (formelmäßige Darstellung in Abhängigkeit von a und b).

Finden Sie außerdem für die ganzzahligen Werte $a=119$ und $b=70$ einen ganzzahligen Wert von h, für den sich ebenfalls ganzzahlige Werte für $\overline{AB}$, $\overline{AN}$ und $\overline{BM}$ ergeben.

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir fünf Prepaidkarten »Holiday«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 13. Juli 2004, eingehen.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

Achim Clausing ist Professor für Informatik an der Universität Münster (Westfalen).

A Mathematical Mountain Walk. Von Achim Clausing. Erscheint in: Pi in the Sky, 2004

Playing Diffy with real sequences. Von K. R. McLean in: Mathematical Gazette, Bd. 83, S. 58, 1999

Ingenuity in Mathematics. Von Ross Honsberger. Random House, New York 1970

Su una interessante curiosità numerica. Von C. Ciamberlini und A. Marengoni in: Periodico di Matematiche, Bd. 17, S. 25, 1937

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.