

Leichtes Spiel mit dem Schwerpunkt

Harte und weiche Stoßexperimente lassen sich im Kopf berechnen, wenn man die Bezugssysteme geschickt wählt.

Von Norbert Treitz

Die Physik beschreibt – frei nach Einstein – die Natur so einfach wie möglich, aber nicht einfacher. Von einem kurvenfahrenden Auto aus betrachtet, fliegen Häuser und Bäume auf krummen Bahnen um einen herum, angetrieben von Scheinkräften. Diesen Standpunkt einzunehmen ist nicht falsch, aber sehr ungeschickt. Eine viel einfachere Beschreibung gelingt in einem Inertialsystem, das heißt einem Bezugssystem, in dem die Gegenstände nicht Scheinkräften, sondern nur systeminternen Kräften, vor allem aber der eigenen Trägheit (lateinisch *inertia*) folgen. In diesem Fall sagt nämlich der Impulserhaltungssatz (das dritte der berühmten Gesetze aus Newtons »Principia mathematica«) sehr weit gehend, was *nicht* geschehen kann.

Hat man ein Inertialsystem, dann ist jedes Bezugssystem, das sich gegenüber diesem mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, ebenfalls ein Inertialsystem. (Konstant nach Richtung und Betrag, wohlgemerkt – rotierende Bezugssysteme sind nicht gemeint!) Mehr noch: Alle diese Systeme sind gleichberechtigt. Man kann sie durch (systeminterne) mechanische Experimente nicht voneinander unterscheiden. Insbesondere gibt es kein Bezugssystem, das man als absolut ruhend auszeichnen könnte. Das ist das Relativitätsprinzip. Mit der Relativitätstheorie hat es – fast – nur den Namen gemeinsam; es gilt auch schon in der klassischen (»nichtrelativistischen«) Mechanik, von der hier die Rede ist.

Unmittelbar erfahrbar ist es beim Eingießen von Getränken im fahrenden ICE oder auf der mit beachtlicher Tan-

genialgeschwindigkeit rotierenden Erde, die ja außerdem noch schneller um die Sonne und um die Mitte der Galaxis läuft: Man muss sich nicht im Geringsten um diese Geschwindigkeit kümmern und kann sie auch nicht mechanisch messen.

Bei aller Gleichberechtigung gibt es für jede Wechselwirkung zwischen zwei Objekten ein spezielles Inertialsystem, das dadurch ausgezeichnet ist, dass in ihm die Beschreibung noch einfacher geht: das gemeinsame Schwerpunktsystem. Es ist dasjenige System, in dem die Summe der Impulse gleich null und die Summe der Bewegungsenergien kleiner ist als in jedem anderen.

Im Folgenden soll es um Stöße gehen; das sind Wechselwirkungen, bei denen Impuls plötzlich, das heißt in ziemlich kurzer Zeit und bei ziemlich kurzen Laufwegen von einem Objekt zu einem anderen überspringt, sodass man die lan- ▷

Ein kleiner Ball auf einem großen hüpf überraschend hoch, wenn man beide zugleich fallen lässt.



▷ ge Zeit davor und die lange Zeit danach nahezu konstante Impulsvektoren hat. Ein Stoß heißt elastisch, wenn die Summe aller Bewegungsenergien vorher und nachher – nicht unbedingt während der Impulsübergabe! – gleich ist, und total inelastisch, wenn beide Objekte hinterher relativ zueinander ruhen. Dazwischen liegt die Mehrheit der realistischen Fälle, die uns aber zu kompliziert sind.

Spender gesucht: Zwei Bälle A und B stoßen elastisch zusammen. Dabei springt eine Impulsdifferenz $d\vec{p}$ von A nach B , das heißt, A hat nachher den Impuls $d\vec{p}$ weniger, B mehr als vorher, und wir wollen etwas spezieller annehmen, dass wir kein Überspringen von Drehimpuls zu betrachten haben. Wer gibt nun wem Bewegungsenergie? Wenn Ball A vorher ruht und nachher nicht mehr, ist er Empfänger von Energie. Wenn B vorher ruht, ist es umgekehrt: A ist Spender. Wegen des Relativitätsprinzips sind das möglicherweise nur zwei Beschreibungen desselben Vorgangs in zwei Inertialsystemen.

Wir können uns die Sache bequem machen und in allen Fällen das beiden Bällen gemeinsame Schwerpunktsystem verwenden: Vorher haben die Bälle zwei entgegengesetzte Impulse gleichen Betrags, nachher auch; allerdings hängen deren (entgegengesetzte) Richtungen von Details des Kontakts ab – die schlechte Billardspieler dem Zufall überlassen. Dank dieser Symmetrie muss man im Schwerpunktsystem nur drei Fälle unterscheiden: Die Beträge der beiden Impulse sind nach dem Stoß

- ▷ (a) größer als vorher,
- ▷ (b) so groß wie vorher oder
- ▷ (c) kleiner als vorher.

ZUR ERINNERUNG

Für den Impuls $\vec{p}$ und die kinetische Energie E eines Massenpunkts der Masse m , der sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt, gelten die Formeln

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

und

$$E = (m/2) v^2$$

$\vec{v}$ und $\vec{p}$ sind Vektoren, was zum Beispiel bei der Addition von Impulsen zu beachten ist. Mit v (ohne Pfeil) wird der Betrag des Vektors $\vec{v}$ bezeichnet.

Der Fall (c) tritt vor allem bei Reibung auf, also Übergang von Energie in solche Formen, die man makroskopisch – wenn überhaupt – nur als Temperaturerhöhung bemerkt. Auch der Fall (a) kommt in der Realität vor, wenn nämlich im Stoß dem System Energie aus anderen Quellen zugeführt wird. Frösche und Knallfrösche sind typische Beispiele.

Fall (b) ist der elastische Stoß. Wegen der Betragsgleichheit der Impulse ist im Schwerpunktsystem nicht nur die Summe der Bewegungsenergien vorher und nachher dieselbe, sondern jeder der beiden Bälle bekommt am Ende seine Bewegungsenergie genau wieder; während des Kontakts kann sie ganz oder teilweise als Verformungsenergie zwischengelagert sein. Im Falle einer Anziehungskraft ist die Bewegungsenergie während des Kontakts sogar größer als vorher und nachher.

Beim elastischen Stoß zweier Objekte im gemeinsamen Schwerpunktsystem wird also zwar Impuls, aber keine Energie übertragen – ein gewöhnungsbedürftiges Ergebnis. Unter einem Wechsel des Bezugssystems ändern sich nicht nur Impulse und Energien, sondern möglicherweise auch die Rollen von Spendern und Empfängern der Energie.

Frontaler Zusammenstoß: Am Biertisch sitzen die Helden der Autobahn und diskutieren, welcher Unfall schwerer sei: wenn zwei gleich schwere Autos frontal mit den Geschwindigkeiten v und $-v$ zusammenstoßen, oder wenn eins davon steht und das andere von vorne mit $2v$ dagegen fährt. Sie meinen wegen der gleichen Geschwindigkeitsdifferenz, dass beides gleich schlimm sein müsse. Zwei Physikstudenten hören das und wissen es wegen der Formel für die Bewegungsenergie besser (Kasten links): Im zweiten Fall sei die Energie beider Wagen zusammen doppelt so groß und der Unfall also schlimmer. Wer hat Recht?

Der unmittelbare Stoß hat wenig mit den Geschwindigkeiten relativ zur Straße zu tun, und die für Zerstörung oder Verformung »nutzbare« Energie ist die Bewegungsenergie im Schwerpunktsystem, also in beiden Fällen die gleiche. Insofern haben die Biertischexperten Recht. Der Unterschied kann aber bei einem Folgeereignis bedeutsam werden: Im zweiten Fall bewegt sich der gemeinsame Schwerpunkt weiter, gedämpft durch Reibung mit der Straße, und die

Autos können von der Fahrbahn abkommen und gegen Bäume oder Häuser prallen. Wenn also jemand von hinten mit 150 km/h auf einen Wagen mit 140 km/h fährt, so ist das nicht gefährlicher als ein Stoß mit 10 km/h auf einen ruhenden Wagen, vorausgesetzt, man macht das nicht auf der schmalen Autobahn, sondern auf dem Großen Salzsee ohne Hindernisse rundherum.

Aus dem gleichen Grund ist in der Elementarteilchenphysik entscheidend, welche Energie die zusammenprallenden Teilchen in ihrem gemeinsamen Schwerpunktsystem haben. Ein Collider, in dem Elementarteilchen frontal aufeinander geschossen werden, erzielt weit höhere Kollisionsenergien als ein klassischer Beschleuniger, der die Teilchen gegen ein ruhendes Target schleudert. In der Relativitätstheorie ist zwar der Zusammenhang zwischen Energie und Impuls anders als in der klassischen Physik, das Ergebnis ist jedoch qualitativ ganz ähnlich.

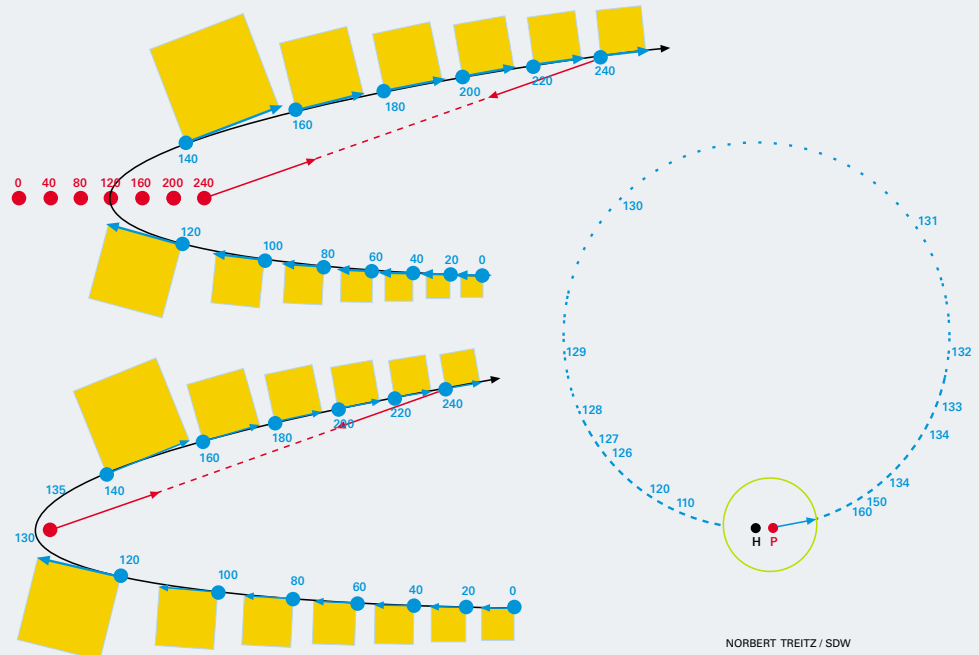
Huckepack fallende Bälle: Lassen Sie mit zwei Händen zwei deutlich verschiedenen schwere Bälle von möglichst guter Elastizität wenige Dezimeter tief auf den Tisch fallen derart, dass beim Start der leichte lose genau mitten auf dem schweren liegt. Der leichte springt dann überraschend hoch und übersteigt dabei seine Starthöhe (Bild S. 101). Offenbar bekommt er Energie vom schweren, aber wieso?

Mit einer Betrachtung im gemeinsamen Schwerpunktsystem kann man das fast ohne Rechnung einsehen: Der erste Stoß erfolgt zwischen dem unteren, schweren Ball und der noch viel schwereren Erde. Das gemeinsame Schwerpunktsystem unterscheidet sich fast gar nicht vom Laborsystem, in dem die Beobachter auf der Erde sitzen. Wenn wir die Geschwindigkeit am Ende des freien Falls $-v$ nennen, so kehrt der Ball beim Kontakt mit dem Tisch (beziehungsweise dem Planeten) nach oben um und steigt mit $+v$ auf. Der leichte ist aber immer noch mit $-v$ unterwegs, und beide bekommen nun einen engeren Kontakt, während der untere Ball den Kontakt zum Planeten verliert. Wenn wir nun idealisierend die Masse des kleinen Balls als vernachlässigbar gering annehmen, ruht der schwere Ball im gemeinsamen Schwerpunktsystem beider Bälle; der leichte kommt von oben mit $-2v$ in diesem Schwerpunktsystem an und wird

Die Swing-by-Technik

Eine Raumsonde (blau) fliegt fast frontal auf einen Planeten (rot) zu und umrundet ihn in einer sehr eng anliegenden Hyperbel. Das linke Bild zeigt oben die Bahn im heliostatischen Bezugssystem (in dem die Sonne ruht), darunter dieselbe Bahn im Schwerpunktsystem von Planet und Raumsonde, das wegen der geringen Masse der Letzteren mit dem Bezugssystem des Planeten praktisch identisch ist. Die gelben Quadrate an den Geschwindigkeitsvektoren zeigen die Bewegungsenergie des Raumschiffs an, gemessen im jeweiligen Bezugssystem; die kleinen blauen Zahlen bezeichnen Zeitpunkte in willkürlichen Einheiten.

Das rechte Bild zeigt die Geschwindigkeit des Raumschiffs (Endpunkte der Geschwindigkeitsvektoren) zu den verschiedenen Zeiten des Swing-by-Vorgangs. In dieser Darstellung (dem »Geschwindigkeitsraum«) unterscheiden sich beide Bezugssysteme nur durch



NORBERT TREITZ / SDW

die Lage *H* bzw. *P* des Nullpunkts und die Bahn der Raumsonde ist ein Kreis, der im Grenzfall der Parabelbahn durch *P* geht. Der kleine grüne Kreis um *P* enthält alle Geschwindigkeiten, die zu der Bewegungs-

energie »unendlich weit« vor und nach dem Stoß gehören, also bei maximaler Energie des Schwerefelds, die ebenso bequem wie irreführend als Nullpunkt der Energie verwendet wird.

durch den Kontakt reflektiert, also hat er nachher $+2v$ darin und $+3v$ im Laborsystem Erde. Damit steigt er bis zum Neunfachen der Starthöhe, denn die Bewegungsenergie geht quadratisch mit der Geschwindigkeit, und die Schwereenergie ist so gut wie proportional zur Höhe (»homogenes Feld«).

Etwas mehr rechnen muss man, wenn der leichte Ball nicht mehr unendlich leicht ist. Wenn Sie zwei Bälle guter Elastizität mit einem Massenverhältnis von $1 : 3$ haben, können Sie einen vollständigen Transfer der im Laborsystem vorhandenen Bewegungsenergie erreichen: Auch hier hat der schwere Ball nach dem ersten Stoß die Geschwindigkeit $+v$ und der leichte $-v$, aber der gemeinsame Schwerpunkt steigt mit $+v/2$. Relativ zu diesem hat daher zwischen den beiden Stößen der schwere Ball die Geschwindigkeit $+v/2$ und der leichte $-3v/2$. Beide drehen beim zweiten Stoß nur die Vorzeichen um, und die Rückrechnung ins Laborsystem ergibt 0 für den schweren und $+2v$ für den leichten. Dieser kann also auf die vierfache Starthöhe steigen, während der schwere ohne irgendwelche Reibungsvorgänge sofort

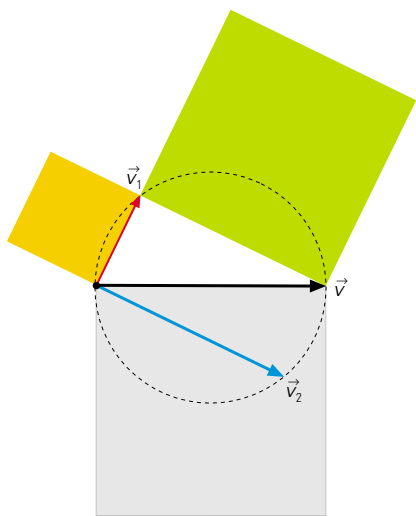
am Boden ruht. Dagegen würde er in dem idealisierten ersten Fall so hoch springen, als gäbe es den leichten gar nicht, also bis zur Starthöhe.

Die Bewegungsenergie im Laborsystem war vor beiden Stößen $2mv^2$, wenn wir die Massen m und $3m$ nennen. Nach beiden Stößen hat der leichte Ball diese Energie ganz für sich allein.

Planeten als Impulsspender: Nehmen wir an, dass wir eine Fernsehkamera mit Zubehör zu fernen Planeten schießen wollen, um sie und ihre Satelliten aus der Nähe anzusehen. Leider ist der gravitative Potenzialtopf der Sonne sehr tief, und wir kreisen mit der Erde ziemlich weit unten darin. Wenn das Raumschiff heliostatisch (das heißt relativ zu einem Inertialsystem, in dem die Sonne ruht) mit 10 km/s läuft, ist das schon nicht schlecht, aber viel zu wenig. Wenn man das Gerät mit 10 km/s gegen einen hinreichend elastisch gepolsterten Planeten wirft, hat seine Geschwindigkeit nach dem Abprallen eine andere Richtung und denselben Betrag – relativ zum Planeten. Wenn der aber seinerseits in Bewegung ist, kann sich die heliostatische

Geschwindigkeit des Raumschiffs erheblich ändern.

Nur sind Planeten leider nicht gepolstert und auch aus anderen Gründen als Reflektoren für Raumschiffe ungeeignet. Da hilft ein Trick: Für einen abrupten Richtungswechsel auf dem Schulhof kann man, statt sich von einer Wand abzustoßen, auch um eine Säule oder einen freundlicherweise anwesenden Mitschüler herumschwingen. Im letzteren Fall bewirken die Arme eine Anziehung. Planeten stellen uns hierzu ihr Gravitationsfeld zur Verfügung. Zielt das Raumschiff knapp neben den Planeten, so läuft es im gemeinsamen Schwerpunktsystem auf einer Hyperbel. Von dieser brauchen wir fast nur die Asymptoten als Näherung für Hin- und Rückweg. Wenn der Planet nicht punktförmig ist, dann ist eine Richtungsänderung um 180° Grad allerdings nicht erreichbar, weil der Scheitel der Bahn sonst in den Planeten eintauchen müsste. Weit draußen auf den Asymptoten haben wir in gleichen Abständen gleiche Beträge der Geschwindigkeit des Raumschiffs – relativ zum Planeten. Uns interessieren aber die heliostatischen Geschwindigkeiten. ▷

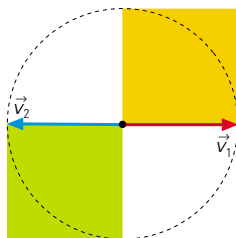


► Wie beim Stoß der Bälle zeigt sich hier die entscheidende Stärke der Energie- und Impulsbilanz: Wir können die Geschwindigkeiten »vorher« und »nachher« bestimmen, ohne uns um die Details zu kümmern. Wir müssen nicht einmal wissen – und können von weitem auch gar nicht sehen –, ob es sich um Anziehung oder Abstoßung handelt. Nehmen wir als heliostatische Geschwindigkeiten vorher -10 km/s für das Raumschiff und $+20 \text{ km/s}$ für den Planeten an, so hat die Relativgeschwindigkeit vorher und nachher den Betrag 30 km/s . Im Falle fast vollständiger Richtungsumkehr kann das Raumschiff daher mit fast 50 km/s heliostatisch weiterreisen. Das ist das Prinzip hinter der »Swing-by«-Technik, das den Voyager-Raumsonden die weite Reise durch das ganze Sonnensystem ermöglichte. Erst vor einem Monat erreichte auch die Sonde »Cassini« ihr Ziel, das Ringsystem des Saturns, indem sie sich *en passant* zusätzlichen Impuls bei der Venus (zweimal), der Erde und dem Jupiter holte (siehe S. 48).

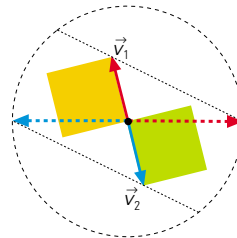
Allgemein kann das weitaus leichtere Objekt fast das Doppelte der Geschwindigkeit des schwereren zugewinnen; das gilt für jedes Inertialsystem. Aus diesem Grund ist auch ein vorher fast ruhender Tischtennisball doppelt so schnell wie der Schläger.

Pythagoreisches Billard: Beim Billard sind die Bälle gleich schwer. Deswegen läuft die Addition ihrer Impulse auf die Addition ihrer Geschwindigkeiten hinaus. Die Darstellung im Geschwindigkeitsraum, die wir im Kasten auf der vorigen Seite kennen gelernt haben, liefert hier überraschend schnell ein klares Bild.

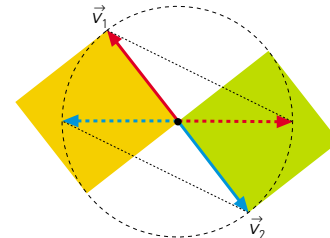
Ein Billardball trifft mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ einen auf dem Tisch ruhenden Ball. Im Geschwindigkeitsraum



vorher



während des Stoßes



nachher

liegen die Bälle vor dem Stoß im Schwerpunktsystem symmetrisch im Abstand $v/2$ vom Nullpunkt. Das muss nach einem elastischen Stoß wieder so sein (nicht aber während dessen). Die Eintragungen liegen also hinterher auf dem gleichen Kreis mit Radius $v/2$ um den Nullpunkt einander gegenüber. (Bei einer Bewegung in allen drei Dimensionen ist der Kreis durch eine Kugel zu ersetzen.) Nennen wir die neuen Geschwindigkeiten $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, so bilden die Punkte 0 , $\vec{v}$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ die Ecken eines Rechtecks (Bild links, oben).

Dem Übergang vom Schwerpunktsystem zum Laborsystem – das heißt dem System, in dem der Billardtisch ruht – entspricht im Geschwindigkeitsraum nichts weiter als eine Verschiebung des Nullpunkts. Der Vektor $\vec{v}$, also die Geschwindigkeit des stoßenden Balls vorher, ist nun die Diagonale des Rechtecks oder, wenn man das Rechteck entlang dieser Diagonale halbiert, die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Dessen Katheten werden durch die beiden Geschwindigkeitsvektoren »nachher« gebildet (Bild links, unten).

Auf diese schlichte Weise erkennt man nicht nur, dass nach dem Stoß die Bälle auf zueinander rechtwinkligen Bahnen einander davonlaufen, sondern auch, dass die gesamte Bewegungsenergie wieder erreicht wird. (Sie bleibt streng genommen nicht erhalten, weil sie während des Stoßes teilweise als elastische Energie zwischengelagert wird.) Denn nach dem Impulserhaltungssatz muss $\vec{v}$ die Vektorsumme aus $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ sein, das heißt, die drei Vektoren müssen ein Dreieck bilden, und nach dem Satz des Pythagoras muss dieses Dreieck rechtwinklig sein, denn aus der Energiebilanz folgt (wegen der gleichen Massen) $v^2 = v_1^2 + v_2^2$.

Während des Stoßes wandern die Spitzen der Pfeile $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ auf geraden Linien von der Anfangs- zur Endposition. Unterwegs ist das Dreieck nicht rechtwinklig und die Quadratsumme der Geschwindigkeiten vorübergehend kleiner als v^2 , denn ein Teil der Energie wird

Beim elastischen Stoß zweier Billardbälle, dargestellt im Geschwindigkeitsraum (links im Laborsystem, oben im Schwerpunktsystem), ist die Gesamt-Bewegungsenergie hinterher die gleiche wie vorher, wie aus dem Satz des Pythagoras folgt. Nur während des Stoßes steckt ein Teil der Energie in der Deformation der Bälle.

als Deformationsenergie zwischengelagert. Die Richtung der übertragenen Impulsdifferenz haben wir bisher als zufällig angesehen. Bei kugelrunden Bällen ist sie einfach die Richtung zwischen den Mittelpunkten während des Kontakts. Ein fast genau vorwärts weglaufernder Ball bekommt fast die ganze Energie, ein fast rechtwinklig weggestoßener fast gar keine. Welcher Ball das jeweils ist, ist beim fast genau zentralen Stoß anders als beim knapp streifenden.

Wahrscheinlich hat Pythagoras von Samos nicht Billard gespielt. Eigentlich schade, denn er hätte eine schöne Anwendung für den nach ihm benannten Satz finden können: die Umverteilung der Bewegungsenergie beim Billardstoß. ◀



Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie anschauliche Erklärungen dazu nutzt er

nicht nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hochbegabter Kinder und Jugendlicher.

Nüsse & Rosinen. Von Norbert Treitz. CD mit Buch. Harri Deutsch, Frankfurt (Main), in Vorbereitung

Brücke zur Physik. Von Norbert Treitz. 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 2003

Spiele mit Physik! Von Norbert Treitz. 4. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1996

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.