

Die Lösung eines Jahrhundertproblems

Allem Anschein nach hat der russische Mathematiker Grigori Perelman die berühmte Poincaré'sche Vermutung bewiesen. Damit finden hundert Jahre vergeblichen Bemühens ein glückliches Ende.

Von Graham P. Collins

Stellen Sie sich einen Formationsstanz vor: Ein Schritt vor, ein Schritt zurück, einer nach rechts, einer nach links, in die Knie gehn, ein Luftsprung – und das war's schon. In den Einzelheiten mag es die größten Unterschiede geben, aber im Prinzip gibt es nur drei verschiedene Raumrichtungen, in die sich ein Tänzer – oder irgendein materieller Gegenstand – bewegen kann. Genau das ist es, was die Mathematiker eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit oder kurz 3-Mannigfaltigkeit nennen: Von innerhalb gesehen, gibt es in jedem Punkt der Mannigfaltigkeit drei zueinander senkrechte Richtungen, in die man sich fortbewegen kann – zumindest ein kurzes Stück.

Anders ausgedrückt: Die Umgebung jedes Punkts ist durch drei Koordinaten beschreibbar. So kann man in der Nähe der Erdoberfläche jeden Punkt durch drei Zahlen beschreiben: geografische Länge, geografische Breite und Höhe über dem Meeresspiegel. Offensichtlich ist der uns umgebende Raum eine 3-Mannigfaltigkeit. (Auf die Spekulationen der Stringtheoretiker, nach denen die Welt »in Wirklichkeit« zehn oder elf Dimensionen habe – vergleiche Spektrum der Wissenschaft 2/2003, S. 24, und 4/1998,

S. 62 –, kommt es in unserem Zusammenhang nicht an.)

Die 3-Mannigfaltigkeit, in der wir leben, erstreckt sich nicht nur über eine kurze Strecke, sondern über Milliarden von Lichtjahren. Ist sie wirklich der unendlich ausgedehnte Raum, den die Theoretiker »euklidisch« nennen, weil er schon den alten Griechen im Prinzip geläufig war? Die Physiker versuchen den uns umgebenden Raum durch mathematische Modelle zu beschreiben.

Innerhalb der durch Newton begründeten klassischen Mechanik oder in der traditionellen Quantenmechanik ist er ein für alle Mal gegeben. Er ist gewissermaßen eine Bühne, auf der sich die Phy-

sik abspielt. In Einsteins Allgemeiner Relativitätstheorie dagegen gehört der Raum zu den Mitspielern. So hängt der Abstand zwischen zwei Punkten davon ab, wie viel Energie und Materie sich in der Nähe dieser zwei Punkte befindet. Auch in diesem Fall wird der Raum durch eine 3-Mannigfaltigkeit beschrieben. Was wir über diese Objekte sagen können, betrifft daher unmittelbar unser Verständnis von den Grundlagen der Physik.

Da Raum und Zeit in der Relativitätstheorie eng miteinander verknüpft sind, ist auch die vierdimensionale Mannigfaltigkeit, die der Raumzeit entspricht, von physikalischer Bedeutung. Allgemein haben die Mathematiker keine Scheu, mit

IN KÜRZE

- ▶ **Seit 100 Jahren** versuchen Mathematiker, eine Vermutung von Henri Poincaré zu beweisen. Sie besagt, dass ein spezielles geometrisches Objekt, die so genannte dreidimensionale Sphäre (3-Sphäre), durch eine besondere Eigenschaft unter allen dreidimensionalen Objekten ausgezeichnet ist.
- ▶ Nun scheint **der russische Mathematiker Grigori Perelman** Poincarés Vermutung bewiesen zu haben. Darüber hinaus bringt er mit seinen neuen Arbeiten ein groß angelegtes Forschungsprogramm zur Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten zum Abschluss.
- ▶ **Unser Universum ist durch eine 3-Mannigfaltigkeit gegeben.** Insofern hat Perelmans Arbeit auch eine vergleichsweise konkrete Bedeutung. Unabhängig davon hat sein Lösungsansatz Bezüge zu verschiedenen Aspekten der theoretischen Physik, insbesondere zu Einsteins Theorie der Gravitation.



◀ Henri Poincaré vermutete 1904, dass jedes dreidimensionale Gebilde, das sich in einigen wesentlichen Aspekten wie eine 3-Sphäre verhält, schon die 3-Sphäre ist. Es dauerte 99 Jahre, bis die Mathematiker diese Vermutung beweisen konnten. (Aber Achtung: Eine 3-Sphäre ist nicht das, was Sie sich wahrscheinlich gerade darunter vorstellen!)

vollständige Klassifizierung aller 3-Mannigfaltigkeiten liefert. Das ist der Inhalt der Geometrisierungsvermutung, einer Verallgemeinerung der Poincaré'schen Vermutung, die William P. Thurston von der Universität von Kalifornien in Davis (heute an der Cornell-Universität) in den 1970er Jahren aufgestellt hat.

Was ist nun eine 3-Sphäre? Wer sich darunter etwas Kugelförmiges, zugleich aber Hauchdünnes und Ungreifbares vorstellt, liegt schon ungefähr richtig. Aber man muss noch ein wenig geistige Gymnastik treiben (Kasten S. 90/91). Der Rand einer dreidimensionalen Kugel heißt nicht 3-Sphäre, sondern 2-Sphäre, denn er ist eine 2-Mannigfaltigkeit: Bereits zwei Zahlen, zum Beispiel Breitengrad und Längengrad, reichen aus, um eine Position auf ihr festzulegen.

Ein Käfer, der auf einem Luftballon, oder ein Mensch, der auf der Erdoberfläche herumkriecht, hält seine Welt zunächst für flach: Auf kurze Entfernungen ist die 2-Sphäre nicht von der zweidimensionalen euklidischen Ebene zu unterscheiden, wie es sich für eine Mannigfaltigkeit gehört. Erst wenn der Käfer lange genug geradeaus läuft, macht sich die Krümmung bemerkbar, und die Illusion der Ebene bricht zusammen: wenn er an seinem Ausgangspunkt wieder eintrifft.

Entsprechend würde eine Mücke in der 3-Sphäre zunächst annehmen, sie sei in einem gewöhnlichen dreidimensionalen Raum. Flöge sie aber immer weiter in eine feste Richtung, so würde auch sie wieder an der Stelle ankommen, an der sie losgeflogen ist.

Sphären gibt es in jeder Dimension. Die 1-Sphäre ist jedem geläufig: Sie entspricht dem Rand eines zweidimensionalen Vollkreises. Je größer die Dimension n wird, desto schwerer ist es, sich eine n -Sphäre vorzustellen.

Nachdem Henri Poincaré seine Vermutung gegen Anfang des 20. Jahrhunderts aufgestellt hatte, vergingen unge- ▶

FOTO: AP EMILIO SEGRE VISUAL ARCHIVES; ILLUSTRATION: JANA BRENNING; MIT 3-D-FORMEN VON DON FOLEY

n -Mannigfaltigkeiten beliebiger Dimension n umzugehen. Aber ausgerechnet der Fall $n = 3$, der uns aus dem Alltag geläufig ist, stellt sich als der schwierigste heraus.

Der Zweig der Mathematik, der sich mit den globalen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten beschäftigt, ist die Topologie. Typische Fragestellungen sind: Welches ist der einfachste Typ von 3-Mannigfaltigkeiten? Kann man ihn durch topologische Eigenschaften beschreiben oder sogar eindeutig bestimmen? Welche Arten von 3-Mannigfaltigkeiten gibt es überhaupt?

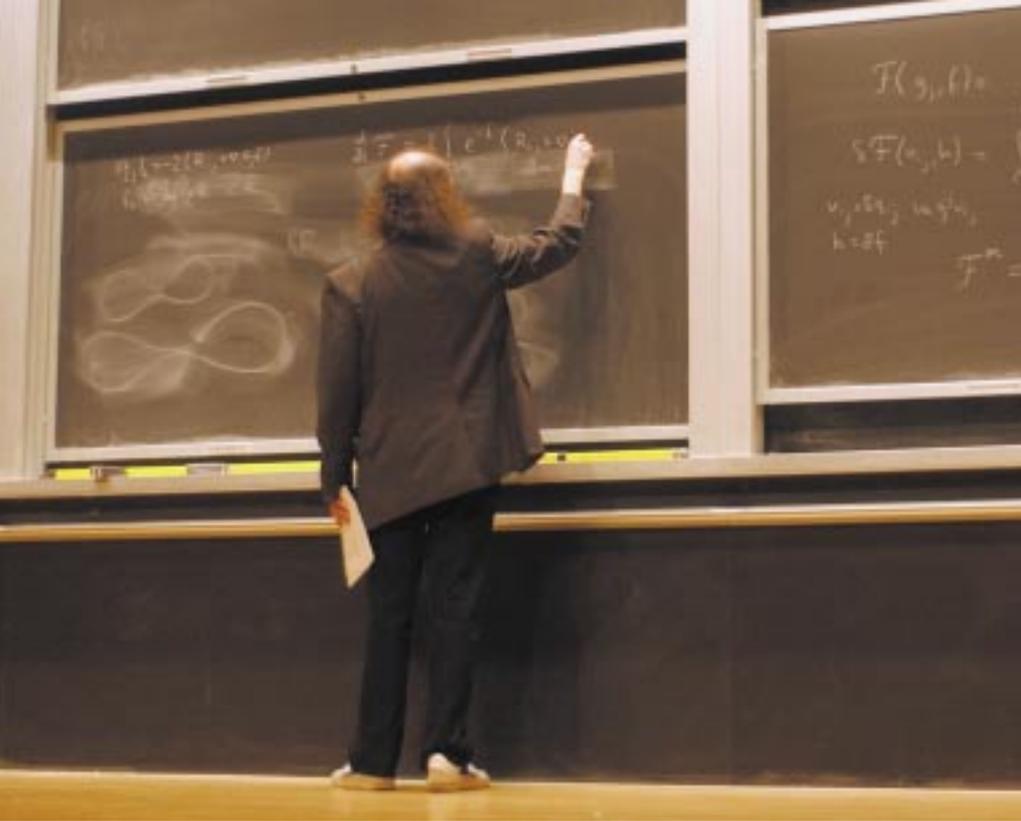
Wohlgemerkt: Den Topologen geht es hier um kompakte Mannigfaltigkeiten ohne Rand; das heißt, der Abstand zweier Punkte kann nicht beliebig groß werden, und man stößt beim Wandern in der Mannigfaltigkeit nirgends an eine Grenze. Damit ist die einfachste denkbare 3-Mannigfaltigkeit, der dreidimensionale euklidische Raum, bereits außer Diskussion, denn er ist unendlich ausgedehnt.

Die einfachste kompakte 3-Mannigfaltigkeit ist die so genannte 3-Sphäre. Das ist schon lange bekannt. Die beiden anderen Fragen stehen jedoch schon über ein Jahrhundert lang unbeantwortet im Raum. Nun hat höchstwahrscheinlich Grigori («Grisha») Perelman, ein russischer Mathematiker aus St. Petersburg, diese Fragen erledigt und damit auch die berühmte Poincaré-Vermutung bewiesen.

Poincaré und die 3-Sphäre

Henri Poincaré (1854–1912), einer der größten Mathematiker seiner Zeit, hatte vermutet, dass die 3-Sphäre unter den 3-Mannigfaltigkeiten eindeutig ist: Jede 3-Mannigfaltigkeit, die über gewisse topologische Eigenschaften der 3-Sphäre verfügt, kann zu einer 3-Sphäre zurechtgebogen werden und ist ihr damit, topologisch gesehen, bereits gleich.

Wenn Perelmans Beweis der Überprüfung standhält, beantwortet er die dritte Frage gleich mit, indem er eine



◀ Grigori Perelman spricht an der Universität Princeton im April 2003 über seinen Beweis der Poincaré'schen Vermutung und von Thurstons Geometrisierungsvermutung.

Hamilton von der Columbia-Universität in New York in den 1990er Jahren entwickelt hat. Hamiltons Arbeiten wurden Ende 2003 vom Clay Institute durch einen Forschungspreis ausgezeichnet. Perelmans Analyse räumte gewisse Hindernisse aus dem Weg, an denen Hamilton noch gescheitert war.

Sollte sich Perelmans Argumentation als hieb- und stichfest erweisen (wovon alle ausgehen), so beweist er damit nicht nur die Poincaré-Vermutung, sondern auch die schon erwähnte Geometrisierungsvermutung von Thurston. Hätte sich die Poincaré-Vermutung als falsch erwiesen, so wäre auch die Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten insgesamt weit aus komplizierter und unübersichtlicher ausgefallen. Die Geometrisierungsvermutung verschafft uns dagegen ein klares und einleuchtendes Gesamtbild.

Die seltsame Welt der Topologie

Poincarés Vermutung und Perelmans Beweis beziehen sich auf Gegenstände, auf deren genaue Form es nicht ankommt. Man darf sich vorstellen, sie seien aus Knete, die man nach Belieben strecken, verbiegen oder zusammendrücken kann, solange man sie nicht zerschneidet oder zwei getrennte Stücke zusammenfügt. Der zugehörige Zweig der Mathematik ist die Topologie. Der Abstand zweier Punkte, in der klassischen (metrischen) Geometrie von zentraler Bedeutung, ist in der Topologie unwesentlich; in ihr gelten zwei Gegenstände bereits dann als gleich, wenn sie durch die genannten Verformungen auseinander hervorgehen. Durch diese Identifizierung lenkt die Topologie den Blick auf Eigenschaften räumlicher Gegenstände, die fundamental sind als diejenigen, die man durch Angabe von Längen und Winkeln ausdrücken kann.

Ein beliebtes Einführungsbeispiel ist die Aussage, dass das in den USA beliebte Gebäck namens »Kringel« (*doughnut*) eigentlich dasselbe ist wie eine Kaffeetasse mit Henkel. (Asketischere Naturen dürfen den Kringel durch einen Rettungsring oder Fahrradschlauch ersetzen.) Man

▷ fährt 50 Jahre, bis ein erster wesentlicher Fortschritt erzielt wurde. In den 1960er Jahren bewiesen die Mathematiker eine analoge Vermutung für Sphären der Dimension 5 und größer. Erstaunlicherweise war es einfacher, sich in den »höheren Sphären« zurechtzufinden, als in den »anschaulicheren« niedrig-dimensionalen. Der Fall $n=4$ erwies sich als unerwartet schwierig und wurde erst 1982 erledigt. Damit blieb nur noch die ursprüngliche Vermutung Poincarés ungeklärt (die Fälle $n=1$ und $n=2$ sind unproblematisch).

Erst 2002 gab es einen wesentlichen Schritt vorwärts. In diesem Jahr legte Grigori Perelman einen ersten Artikel zu diesem Thema auf den Preprintserver www.arxiv.org, auf dem Mathematiker und Physiker ihre noch nicht begutachteten wissenschaftlichen Arbeiten zu veröffentlichen pflegen. Perelman erwähnte zwar in professionellem Understatement mit keinem Wort, dass seine Arbeit auf einen Beweis der Poincaré-Vermutung hinausliefe; aber das war für einen Topologen ohne weiteres erkennbar.

Im März 2003 legte Perelman einen zweiten Artikel nach, im April und Mai kam er in die USA, um seine Ideen einer breiteren Öffentlichkeit vorzustellen. Er hielt Vortragsreihen am Massachusetts Institute of Technology und an der Universität des Staates New York in Stony Brook; allein dort sprach er zwei Wochen lang täglich drei bis sechs Stunden.

Einer seiner kompetentesten Zuhörer, der Topologe und Differenzialgeome-

ter Michael Anderson aus Stony Brook, kommentierte: »Jede der aufkommenden Fragen konnte er ohne weiteres beantworten. Seine Antworten waren immer sehr klar und sind bisher nicht ernsthaft in Frage gestellt worden. Ein kleinerer Teil der ganzen Arbeit muss noch überprüft werden, aber niemand glaubt, dass der Beweis an diesem letzten Stück scheitern wird.« Der erste Artikel enthält die wesentlichen Ideen und gilt inzwischen als gründlich überprüft; mit der zweiten Arbeit, die einige Anwendungen und kompliziertere Argumentationen enthält, sind die Mathematiker noch nicht soweit.

Für den Beweis der Poincaré-Vermutung hat das Clay Institute of Mathematics, eine private Stiftung zur Förderung der Mathematik, im Jahre 2000 ein Preisgeld von einer Million US-Dollar ausgesetzt: Die Vermutung ist eines der »Millennium-Probleme« (Spektrum der Wissenschaft, Spezial 4/2003: Omega, S. 40). Nach den Ausschreibungsbedingungen des Clay Institute muss der Beweis veröffentlicht werden und danach mindestens zwei Jahre lang jeder Kritik standhalten. Eigentlich ist unter »veröffentlicht« der Abdruck in einer anerkannten Fachzeitschrift gemeint – was für Perelmans Arbeiten nicht zutrifft. Aber jede klassische Begutachtung könnte nicht besser sein als die zurzeit stattfindende Überprüfung der Ergebnisse.

Perelmans Arbeit führt ein Forschungsprogramm weiter, das Richard S.

CELENE CHANG, DAILY PRINCETONIAN

kann nämlich eine Tasse aus Knete durch Verformung in die Form eines Kringels bringen, ohne ein Loch hineinzuschneiden oder ein weiteres Knetegebilde an die Tasse anzukleben (Kasten S. 92). Eine Kugel aus Knete dagegen kann man nur dadurch zum Kringel machen, dass man entweder ein Loch in die Mitte hineindrückt oder die Kugel zu einem Zylinder ausrollt und dessen Enden zusammenfügt. Also sind Kugel und Tasse verschiedene Dinge – auch für einen Topologen.

Statt massiver Kugeln und Kringel kann man auch ihre Oberflächen studieren. Sie sind aus topologischer Sicht ebenfalls verschieden: Die Oberfläche der Kugel ist eine 2-Sphäre; sie lässt sich nicht in die Oberfläche des Kringels verformen. Die Mathematiker nennen diese Ringfläche einen Torus. Beide Gebilde, 2-Sphäre und Torus, sind zweidimensionale Mannigfaltigkeiten oder kurz Flächen.

Die Topologie wirft also vieles in einen Topf, aber nicht alles. Für Flächen stellt sich die nahe liegende Frage: Welche topologisch verschiedenen Flächen gibt es überhaupt, und wie kann man sie beschreiben? Auf diese Frage fanden die Topologen bereits Ende des 19. Jahrhunderts eine elegante Antwort: Es ist die Anzahl der »Henkel« oder auch der »Löcher«, welche die topologische Natur einer Fläche festlegt (Kästen S. 92 und 93). Man nennt diese Anzahl das Geschlecht der Fläche. Insbesondere erkannte man, dass die 2-Sphäre die einzige Fläche von besonderer Einfachheit ist, und begann sich zu fragen, ob sich die 3-Sphäre in ähnlicher Weise gegenüber den anderen 3-Mannigfaltigkeiten auszeichnet.

An dieser Stelle betritt Henri Poincaré die Szene, um 1900 einer der beiden Mathematiker von absolutem Weltrang (der andere war David Hilbert). Man nannte ihn auch den letzten Universalisten der Mathematik: Er brachte alle Zweige seines Fachs voran, bis zu Gebieten wie Himmelsmechanik, Elektromagnetismus und Philosophie der Wissenschaften. Über Letztere verfasste er mehrere viel gelesene Bücher.

Vor allem aber gilt Poincaré als Begründer des Zweiges der Mathematik, den man heute »algebraische Topologie« nennt. Um die Wende zum 20. Jahrhundert erarbeitete er einen Begriff, der in der Folge von zentraler Bedeutung für die Topologie wurde: Homotopie.

Homotopie: die Kunst, die Schlinge zuzuziehen

Stellen Sie sich vor, in der Mannigfaltigkeit liege eine geschlossene Kurve, eine »Schleife« – irgendwie. Sie darf sich beliebig oft überschneiden. Außerdem ist sie ebenso deformierbar wie die Mannigfaltigkeit selbst: Man kann sie nach Belieben in die Länge ziehen oder zusammenschrumpfen lassen, im Extremfall bis auf einen einzigen Punkt. Nur aus der Mannigfaltigkeit heraus darf man sie nicht bewegen. Zwei Schleifen, die sich auf diese Weise ineinander deformieren lassen, nennt man zueinander homotop.

Kann man unter diesen Bedingungen jede Schleife bis auf einen Punkt zusammenziehen? Nein. Bei einer Schleife, die einmal um den äußeren Rand eines Torus herumläuft, gelingt das nicht, denn das Loch in der Mitte ist ein Hindernis.



HULTON-DEUTSCH-COLLECTION / CORBIS

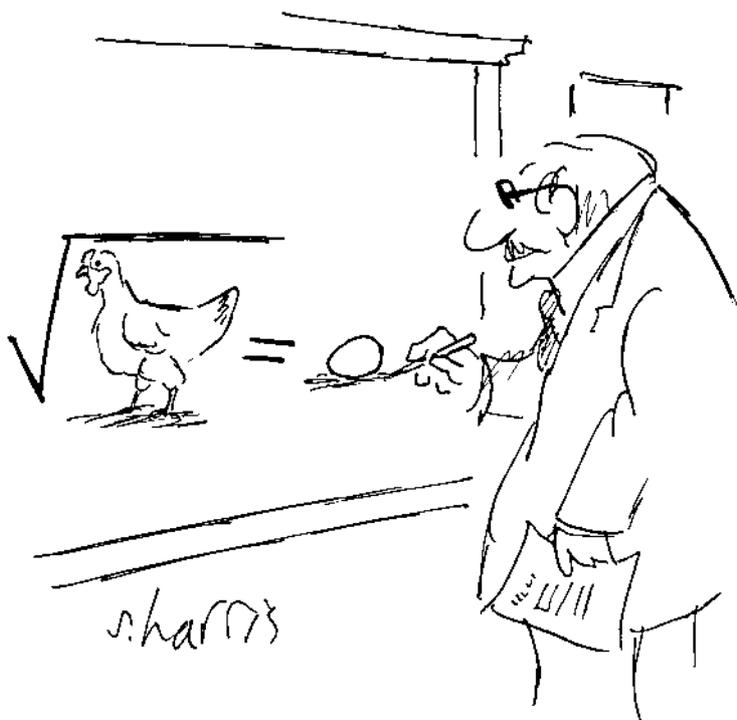
▲ Poincaré (sitzend, im Gespräch mit Marie Curie) nahm 1911 an der ersten Solvay Physics Conference in Brüssel teil. Hinter ihm Ernest Rutherford, Heike Kamerlingh Onnes (der wenige Monate zuvor die Supraleitung entdeckte) und Albert Einstein. Möglicherweise war dies das einzige Zusammentreffen von Einstein und Poincaré, der neun Monate später starb.

Dagegen ist auf der 2-Sphäre jede Schleife nullhomotop, das heißt auf einen Punkt zusammenziehbar.

Man kann Aussagen über die topologischen Eigenschaften einer Mannigfaltigkeit machen, indem man bestimmt, welche wesentlich, das heißt bis auf Homotopie, verschiedenen Schleifen es auf ihr gibt: Das ist der Homotopietyp der Mannigfaltigkeit.

Für 2-Mannigfaltigkeiten (Flächen) sind derartige Aussagen sogar schon erschöpfend: Alles, was es topologisch über eine Fläche zu sagen gibt, ist mit ihrem Homotopietyp gesagt. Insbesondere ist jede Fläche, auf der jede Schleife nullhomotop ist, bereits der 2-Sphäre topologisch äquivalent.

(Hier und schon zuvor haben wir stillschweigend angenommen, dass wir es mit orientierbaren Mannigfaltigkeiten zu tun haben. Eine nichtorientierbare Mannigfaltigkeit ist zum Beispiel das Möbiusband, das man erhält, wenn man die beiden Enden eines Streifens verdreht und dann aneinander klebt. Das Möbiusband hat zwar einen Rand und ist daher ohnehin nicht zugelassen, aber es gibt auch nichtorientierbare Mannigfaltigkeiten ▷

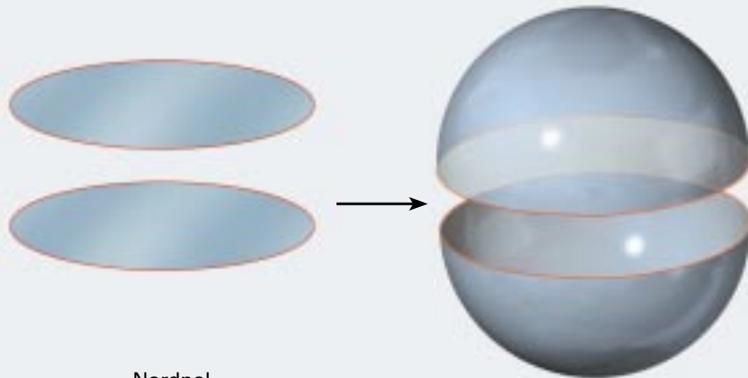


Sphärenmusik in höheren Dimensionen

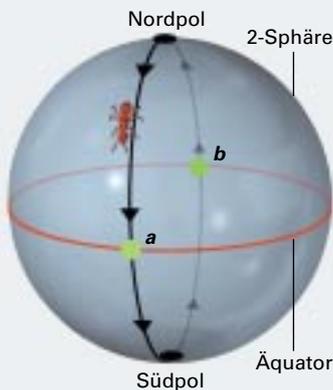
Um einen mathematischen Satz über die 3-Sphäre zu beweisen, muss man sie sich nicht unbedingt vorstellen können. Im Prinzip genügt es, Aussagen über die Eigenschaften dieses – abstrakten – Objekts logisch korrekt zu verknüpfen. Allerdings werden diese Eigenschaften in Begriffen wie »Kugel«, »Sphäre« und »Rand«

ausgedrückt, unter denen man sich in niederen Dimensionen etwas vorstellen kann. Auch der Mathematiker lässt sich von diesen intuitiven Anschauungen leiten, muss allerdings aufpassen, dass er sie nicht zu wörtlich nimmt. Das gilt insbesondere für die 3-Sphäre.

1 Betrachten wir zunächst die Scheibe und den Kreis, der ihren Rand ausmacht. Die Mathematiker bezeichnen diese beiden Objekte als »zweidimensionale Kugel« und »eindimensionale Sphäre«. Eine »Kugel« bezeichnet immer ein ausgefülltes Objekt (Beispiel: Billardkugel), während die »Sphäre« die Oberfläche der Kugel ist (Beispiel: Luftballon). Der Kreis ist eindimensional, weil schon eine Zahl ausreicht, um einen Punkt auf ihm festzulegen.

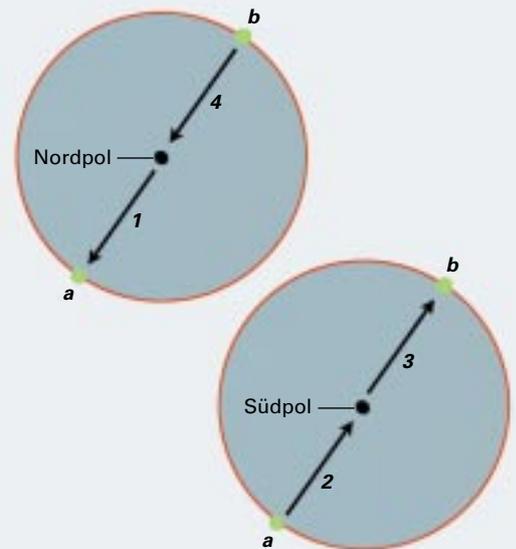


2 Aus zwei Exemplaren der zweidimensionalen Kugel, also zwei Scheiben, können wir eine zweidimensionale Sphäre bauen. Dazu beulen wir beide Scheiben zu halben Sphären (Hemi-sphären) aus, eine nördliche und eine südliche, und kleben sie an den Rändern zusammen, die dadurch zum Äquator werden. Fertig ist die 2-Sphäre!



3 Eine Ameise kriecht vom Nordpol aus entlang des Meridians von Greenwich immer geradeaus (links). Wenn wir ihren Weg statt auf der Sphäre auf den beiden Scheiben verfolgen (rechts), beginnt der Weg im Mittelpunkt der nördlichen Scheibe und verläuft in gerader Linie (1) bis zu deren Rand (a). Dort springt er auf den entsprechenden Punkt der südlichen Scheibe über und verläuft in gerader Linie durch den Mittelpunkt der Scheibe zur anderen Seite (2 und 3). Schließlich wechselt er wieder auf die nördliche Scheibe (b) und erreicht in gerader Linie den Nordpol (4).

Ein Rundweg über die 2-Sphäre erscheint also als zwei Wege über die beiden Scheiben. Merkwürdigerweise scheint die Ameise beim Wechsel von einer Scheibe auf die andere die Laufrichtung zu wechseln.



ALLE GRAFIKEN: DON FOLEY

▷ ohne Rand. Ein Beispiel ist die so genannte Klein'sche Flasche.)

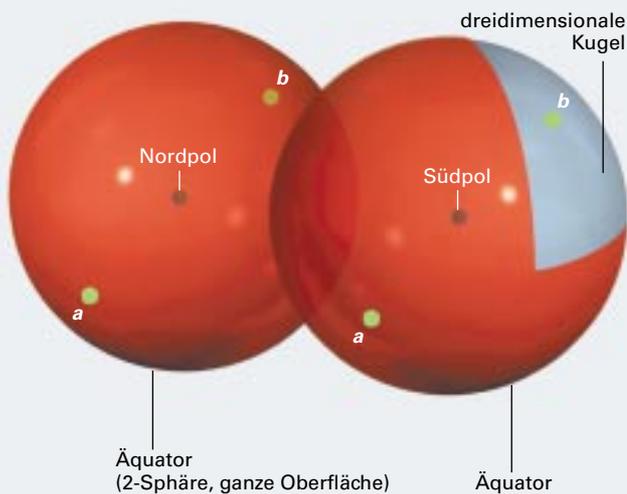
Poincaré vermutete nun, dass analog auch jede 3-Mannigfaltigkeit, auf der alle Schleifen nullhomotop sind, bereits der 3-Sphäre äquivalent ist. Aber er konnte es nicht beweisen, und so ging die Behauptung als die Poincaré-Vermutung in die Geschichte ein. Im Laufe der Zeit behaupteten verschiedene Mathematiker immer wieder, dass sie die Vermutung bewiesen hätten, aber jedesmal erwiesen sich die Beweise als falsch. Perelmans Beweis ist der erste, der einer genaueren Untersuchung bisher standgehalten hat.

Ironischerweise kommen in seinem Ansatz die Längen und Winkel der metrischen Geometrie, vor denen der Topologe so sorgfältig die Augen verschließt, wieder zu Ehren. Eine Kaffeetasse und ein schöner runder Torus sind zwar topologisch dasselbe, aber an dem Torus sieht man wegen seiner ebenmäßigen Gestalt Dinge, die an der Kaffeetasse dem Blick verborgen bleiben. Allgemeiner gibt es zu jeder 2-Mannigfaltigkeit eine topologisch äquivalente, aber geometrisch besonders schöne Mannigfaltigkeit, gewissermaßen ein Musterbeispiel dieser topologischen Klasse. Die geometrisch perfekte Sphäre

ist das Musterbeispiel für alle Flächen mit dem Homotopietyp der Sphäre, der Torus ist der entsprechende Vertreter für alle Flächen mit genau einem Henkel, und so weiter.

Geometrisierung: die Glättung der Kartoffel

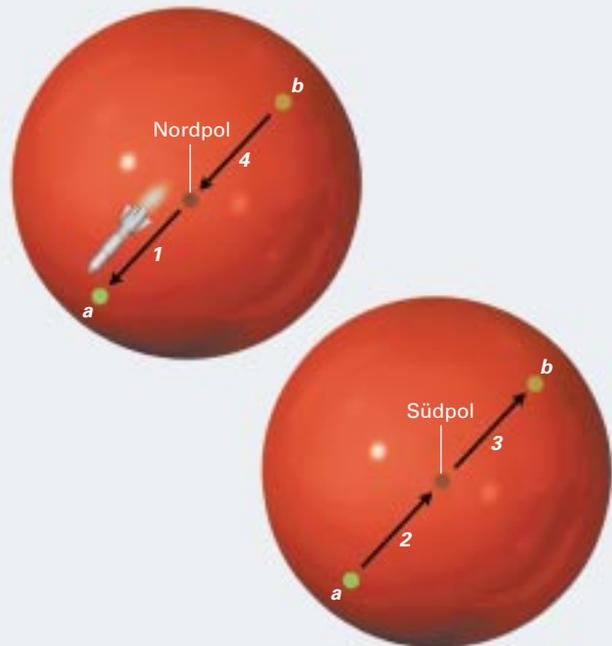
Wie findet man zu, sagen wir, einer Kartoffel deren ideale geometrische Gestalt, nämlich die Sphäre? Indem man ihre vorstehenden Auswüchse eindrückt, ihre Dellen heraushebt, allgemein ihre Oberfläche so verändert, dass sie an allen Stellen die gleiche Krümmung hat. Dazu



4 Nun treiben wir dasselbe Spiel eine Dimension höher: Wir nehmen zwei dreidimensionale Kugeln und kleben sie entlang ihrer Ränder zusammen. In diesem Fall sind die Ränder allerdings zweidimensionale Sphären, und wir können uns nicht vorstellen, wie wir die in den vierdimensionalen Raum hinein ausbeulen sollen, damit wir sie zusammenkleben können. Aber das brauchen wir auch nicht unbedingt. Es genügt zu wissen, welcher Punkt am Rand der einen Kugel mit welchem Punkt am Rand der anderen verklebt wird.

Das Ergebnis der Klebung ist die 3-Sphäre. Sie ist ihrerseits die »Oberfläche« (der Rand) einer vierdimensionalen Kugel. (Die »Oberfläche« eines vierdimensionalen Gebildes ist etwas Dreidimensionales.) Wir können eine der beiden dreidimensionalen Kugeln die nördliche und die andere die südliche Hemisphäre nennen. Nord- und Südpol der 3-Sphäre entsprechen dann den Kugelmittelpunkten, genauso wie in Absatz 3 die Pole der 2-Sphäre den Mittelpunkten der beiden Scheiben entsprechen.

5 Stellen wir uns nun vor, die zwei dreidimensionalen Kugeln seien zwei große, leere Teilbereiche des Weltalls, und wir starteten mit einem Raumschiff am Nordpol und flogen geradewegs in eine beliebige Richtung. Irgendwann würden wir den »Äquator«, also den Rand der nördlichen Hemisphäre, erreichen (1), kämen in die südliche Hemisphäre und würden dort, stets geradeaus, durch den Südpol wieder zum Äquator fliegen (2 und 3). Danach kämen wir wieder in die nördliche Hemisphäre und zu unserem Nordpol zurück (4). Die Rakete trifft ihre eigene Startrampe von hinten! Dies entspricht einer Reise auf dem Rand einer vierdimensionalen Kugel, also einer 3-Sphäre. Das Gebilde, das wir aus zwei dreidimensionalen Kugeln zusammengesetzt haben, ist genau die 3-Sphäre, um die es bei der Poincaré-Vermutung geht. Nach einigen Spekulationen ist unser Universum tatsächlich eine 3-Sphäre.



Den beschriebenen Vorgang kann man auf noch höhere Dimensionen verallgemeinern. Die n -Sphäre entsteht stets aus zwei n -dimensionalen Kugeln, die man entlang ihrer Ränder aneinanderklebt. Jeder der beiden Ränder ist dabei eine $(n-1)$ -Sphäre, genau wie der Rand einer Scheibe (einer 2-dimensionalen Kugel) ein Kreis (eine 1-Sphäre) ist. Die so entstandene n -Sphäre wiederum ist der Rand einer $(n+1)$ -dimensionalen Kugel.

muss gewissermaßen Krümmung von den stark positiv gekrümmten Stellen (Auswüchsen) zu den negativen transportiert werden, sodass sämtliche Differenzen sich ausgleichen. Tatsächlich kann man sich vorstellen, Krümmung sei so etwas wie Temperatur. Den physikalischen Prozess, der bewirkt, dass Temperaturunterschiede sich ausgleichen, kann man in einer mathematischen Gleichung (genauer: einer Differenzialgleichung) beschreiben. Nach dem Modell dieser Wärmeleitungsgleichung kann man eine Gleichung aufstellen, die den Ausgleich von Krümmungen beschreibt. Unter der Wir-

kung dieser Gleichung deformiert sich unsere Kartoffel allmählich zur Sphäre. Dabei »fließt« Krümmung von einer Stelle der Oberfläche zur anderen; diese Strömung heißt Ricci-Fluss (*Ricci flow*) nach dem italienischen Mathematiker Gregorio Ricci-Curbastro (1853–1925).

Die Idealgestalten der 2-Mannigfaltigkeiten haben nun stets konstante Krümmung, und zwar je nach topologischer Klasse verschiedene: Die Sphäre ist positiv gekrümmt, der Torus ist »flach«, das heißt, er hat Krümmung null, und alle Flächen höheren Geschlechts haben negative Krümmung (Kasten S. 93).

Poincaré, Paul Koebe und Felix Klein (nach dem die Klein'sche Flasche benannt wurde) trugen zu dieser geometrischen Klassifikation, das heißt zur Geometrisierung der 2-Mannigfaltigkeiten, bei.

Es liegt nun nahe, ähnliche Techniken auch auf 3-Mannigfaltigkeiten anzuwenden. Kann man auch unter ihnen besonders wohlgeformte Exemplare finden, bei denen die Krümmung über die ganze Mannigfaltigkeit gleichverteilt ist? Das ist im Allgemeinen nicht möglich. Allerdings kann man eine 3-Mannigfaltigkeit in geeignete Teilstücke zerlegen, sodass jedes von ihnen eine der ausgezeichneten \triangleright

▷ Geometrien besitzt, ähnlich wie man jede natürliche Zahl in Primfaktoren zerlegen kann. Außerdem gibt es bei den 3-Mannigfaltigkeiten nicht nur drei, sondern acht verschiedene Typen von besonderen Geometrien.

Dass man jede 3-Mannigfaltigkeit eindeutig durch eine solche Zerlegung beschreiben kann, ist genau die Aussage der Thurston'schen Geometrisierungsvermutung. Thurston und seine Kollegen bewiesen wichtige Teilaussagen dieser Vermutung; aber ein Kernstück, aus dem insbesondere die Poincaré-Vermutung gefolgt wäre, blieb offen.

Von 1990 an versuchte der oben genannte Richard Hamilton 3-Mannigfaltigkeiten nach dem beschriebenen Verfahren zu glätten und damit zu geometrisieren. Leider stellte sich dabei heraus, dass der Ricci-Fluss sich in speziellen Situationen völlig anders verhält als eine Wärmeströmung: Unter der Deformation kann sich die Mannigfaltigkeit an gewissen Stellen bis auf einen Punkt zusammenschnüren. Das ist so, als würde es durch einen Temperatúrausgleichsprozess an einer Stelle unendlich heiß werden! Wenn ein solcher Punkt, eine so genannte Singularität, entsteht, ist das geo-

metrische Gebilde keine Mannigfaltigkeit mehr, denn es sieht in der Umgebung dieses Punkts nicht mehr wie der gewöhnliche 3-dimensionale Raum aus.

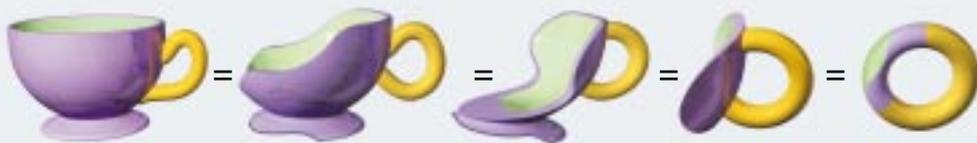
Das geschieht zum Beispiel beim dreidimensionalen Gegenstück einer Hantel: einer Mannigfaltigkeit aus zwei 3-Sphären, die durch einen dünnen Schlauch miteinander verbunden sind (Kasten S. 94). In ihrem Bestreben, schön gleichmäßig rund zu werden, verleiben sich die beiden Sphären beim Ricci-Fluss immer mehr von dem Verbindungsstück ein, sodass dieses immer dünner wird und schließlich zu einem Punkt zusammenschrumpft. Ähnliches geschieht, wenn an irgendeiner Stelle eine Art langgezogener Stachel aus der Mannigfaltigkeit herausragt: Es entsteht eine so genannte Zigarrensingularität.

Beide Typen von Singularitäten entpuppten sich als hartnäckige Hindernisse auf dem Weg zum Beweis der Poincaré'schen Vermutung. Erst Perelman gelang es, sie zu umgehen.

Topologie der Flächen

Die genaue Gestalt – die »Geometrie« – eines Objekts ist in der Topologie nicht entscheidend. Man kann sich ihre Gegenstände aus Knete oder Gummi vorstellen, sodass man sie nach Belieben strecken, stauchen und verdrehen kann,

ohne dass dies Wesentliche verändert. Zerschneiden oder Zusammenkleben ist jedoch nicht erlaubt. So gesehen sind alle Oberflächen mit genau einem Loch, wie zum Beispiel eine Kaffeetasse und ein Kringel, im Wesentlichen dasselbe.



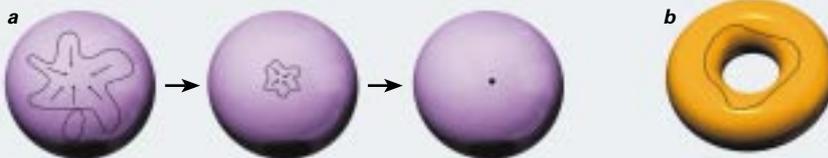
Jede zweidimensionale Mannigfaltigkeit (Fläche) ergibt sich aus der 2-Sphäre (a), indem man die richtige Anzahl von Henkeln anklebt. (Hier wie im ganzen Artikel sind Flächen als kompakt, randlos und orientiert vorausgesetzt.) Nimmt man einen Henkel zur 2-Sphäre hinzu, so erhält man den Torus, die Oberfläche eines

Kringels. Mit einem zweiten Henkel erhält man die so genannte Brezelfläche (b). Sie ist vom Geschlecht 2, während der Torus das Geschlecht 1 hat. Allgemein ist das Geschlecht einer Fläche gleich der Anzahl ihrer Löcher oder auch gleich der Anzahl der Henkel, die man der 2-Sphäre ankleben muss.



Die 2-Sphäre ist die einzige Fläche, in der man eine beliebige eingebettete Schleife auf einen Punkt zusammenziehen kann (a). Beim Torus beispielsweise kann das Loch in der Mitte dafür zu einem Hindernis werden (b), und jeder weitere angeklebte Henkel würde ein neues Hindernis liefern.

Die Poincaré-Vermutung besagt, dass die 3-Sphäre in der gleichen Weise unter den 3-Mannigfaltigkeiten ausgezeichnet ist: Jede Schleife auf der 3-Sphäre kann man auf einen Punkt zusammenziehen, und auf jeder anderen 3-Mannigfaltigkeit gibt es dafür ein Hindernis.



Asket im Dienste der Mathematik

Perelman kam 1992 als frisch Promovierter (»Postdoc«) in die USA, verbrachte einige Semester an der Universität New York und in Stony Brook sowie zwei Jahre an der Universität von Kalifornien in Berkeley. Er machte sich schnell einen Namen als genialer junger Mathematiker und bewies einige wichtige Resultate in einem Teilbereich der Geometrie. Die European Mathematical Society zeichnete ihn dafür 1996 mit einem Forschungspreis aus (den er nicht annahm).

Außerdem erhielt er schon 1994 die prestigeträchtige Einladung, auf dem internationalen Mathematikerkongress ICM vorzutragen (die er annahm). Daraufhin boten ihm mehrere namhafte mathematische Institute Stellen an, die er aber alle ablehnte, um schließlich zurück nach St. Petersburg zu gehen. Ein amerikanischer Kollege kommentierte dies: »Er ist ein typischer Russe. Materielle Dinge spielen für ihn keine große Rolle.«

Zurück in Russland, verschwand Perelman zunächst wieder von der Bildfläche. Seine einzigen Lebenszeichen waren gelegentliche E-Mails, in denen er frühere Kollegen zum Beispiel auf Fehler in deren im Internet veröffentlichten Arbeiten hinwies. Fragen nach seinen eigenen Vorhaben blieben stets unbeantwortet.

Schließlich, im Jahre 2002, informierte er einige Leute per E-Mail über den

Geometrisierung

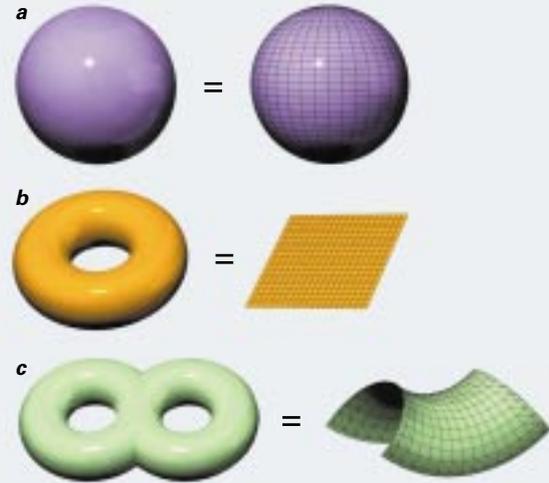
Man kann 2-Mannigfaltigkeiten (Flächen) durch die so genannte Uniformisierung oder Geometrisierung klassifizieren, das heißt dadurch, dass man jeder Fläche eine topologisch äquivalente mit einer besonders schönen geometrischen Struktur zuordnet. Insbesondere kann man eine Fläche so deformieren, dass die Krümmung auf ihr gleichmäßig verteilt ist.

- Die Sphäre (a) ist die einzige Fläche mit konstanter positiver Krümmung: In jedem ihrer Punkte scheint man auf einem (ziemlich flachen) Berggipfel zu stehen.
- Dem Torus (b) kann man eine flache Geometrie geben. Er sieht dann überall so aus wie eine (zweidimensionale) Ebene.
- Flächen, die aus dem Torus durch Ankleben weiterer Henkel entstehen (c), haben eine Geometrie mit konstanter negativer Krümmung. Weitere Einzelheiten hängen von der Zahl der Henkel ab. Einen Bereich negativer Krümmung kann man sich wie einen Sattel vorstellen.

Warum ist der Torus flach, wo doch der Kringel an der Außenseite positiv (kugelförmig), an der Innenseite negativ (sattelförmig) gekrümmt ist?

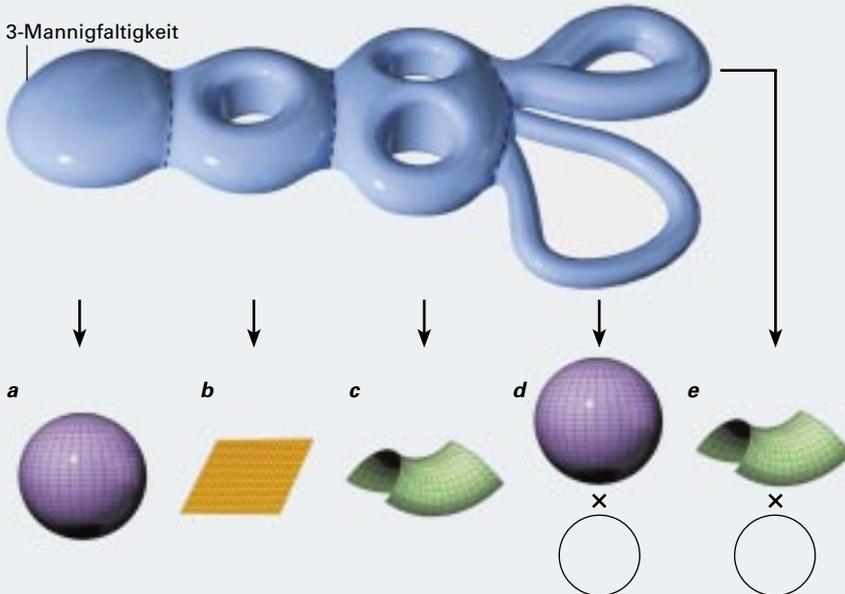
Die Mathematiker bestehen darauf, eine Mannigfaltigkeit nie »von außen« zu betrachten, sondern stets nur »von innen«, denn sie wollen auch dann von Mannigfaltigkeiten sprechen, wenn es einen »umgebenden Raum« nicht gibt oder man nichts über ihn weiß. Deswegen wird Krümmung »intrinsisch«, das heißt von innen definiert: Ein Bewohner der Mannigfaltigkeit steckt einen Kreis mit dem (kleinen) Radius r um seinen Standpunkt ab und bestimmt seine Fläche. Ist der Wert πr^2 , dann hat seine Welt an dieser Stelle die Krümmung null; ist er kleiner, dann ist die Krümmung positiv, ist er größer, dann ist sie negativ.

Obendrein misst der Bewohner einer Mannigfaltigkeit Entfernungen und damit Flächen nicht unbedingt so wie ein Beobachter »von außen«. Auf der 2-Sphäre ist der Entfernungsbegriff (die »Metrik«) derselbe wie in dem Raum, in den die Sphäre eingebettet ist. Der geometrisierte Torus dagegen erbt seine Metrik von dem Quadrat, aus dem man sich ihn entstanden denken kann: Man klebe dessen obere und untere Seite zusammen und rolle damit das Quadrat zur Röhre. Diese



biege man rund und füge beide Öffnungen zum Kringel zusammen; das entspricht dem Zusammenkleben von rechter und linker Seite des Quadrats.

Wenn man auf das Quadrat »Rechenkästchen« zeichnet, also ein Gitternetz von geraden Linien gleichen Abstands, dann sind diese Linien auf dem Torus, »von außen« betrachtet, auf der Innenseite zusammengedrängt und auf der Außenseite auseinander gezogen. Aus der (einzig maßgeblichen) »Binnenperspektive« ist der Torus jedoch einfach flach.



Die Klassifikation der 3-Mannigfaltigkeiten

die durch die Arbeiten von Perelman ihren Abschluss fand, verläuft im Prinzip ähnlich, ist jedoch um einiges komplizierter. Im Allgemeinen kann man eine 3-Mannigfaltigkeit in Teile zerlegen, deren jeder mit einer von acht möglichen Standardgeometrien ausgestattet werden kann. In der Zeichnung (links), in der wir eine 3-Mannigfaltigkeit schematisch durch eine 2-Mannigfaltigkeit dargestellt haben, kommen fünf von diesen Geometrien vor: die konstant positiv gekrümmte (a), die flache (b), die konstant negativ gekrümmte (c), das »Produkt« aus einer 2-Sphäre mit einem Kreis (d) und das »Produkt« einer negativ gekrümmten Fläche mit einem Kreis (e).

ersten der beiden oben erwähnten Artikel, den er soeben ins Netz gestellt hatte: Sie könnten ihn vielleicht interessant finden, erklärte er – eine wirklich sehr bescheidene Formulierung angesichts der Tatsache, dass die Arbeit bereits alles Wesentliche zur Lösung des Jahrhundertpro-

blems enthielt. In dem Artikel bedankt er sich außer bei seinem Arbeitgeber, dem Steklow-Institut für Mathematik, auch bei den amerikanischen Instituten, die ihn als Postdoc beschäftigt hatten, weil er in der Zwischenzeit von dem damals angesparten Geld gelebt hatte.

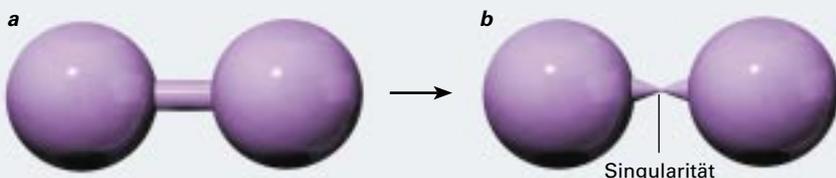
Perelmans wesentliche Idee bestand darin, einen weiteren Term zu der Gleichung für den Ricci-Fluss hinzuzunehmen. Das verhinderte zwar nicht das Auftreten von Singularitäten, gestattete jedoch eine wesentlich weiter gehende Analyse. Die Singularität, die bei der drei- ▶

Umgang mit Singularitäten

Der Versuch, eine 3-Mannigfaltigkeit zu geometrisieren und damit die Poincaré'sche Vermutung zu beweisen, scheitert zunächst an so genannten Singularitäten. Das geschieht zum Beispiel, wenn die Mannigfaltigkeit die Form einer dreidimensionalen Hantel hat, das heißt, aus zwei 3-Sphären besteht, die durch einen dünnen Schlauch miteinander verbunden sind (a). (Mangels ausreichender Dimensionen zum Darstellen müssen hier wie im ganzen Artikel

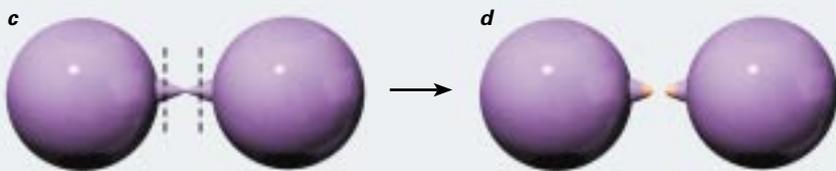
3-Mannigfaltigkeiten durch ihnen ähnliche 2-Mannigfaltigkeiten wiedergegeben werden.)

Der Ricci-Fluss, der eigentlich auf Ausgleich von Krümmungsunterschieden gerichtet ist, schnürt in diesem Fall den Schlauch in der Mitte zu einem Punkt zusammen, sodass das entstehende Gebilde keine Mannigfaltigkeit mehr ist (b). Außerdem könnte ein zweiter Singularitätentyp auftreten: die so genannte Zigarrensingularität.



Perelmans Lösung des Problems heißt »Chirurgie«. Kurz bevor sich der Schlauch einschnürt, schneidet man ein Stück beiderseits der kritischen Stelle weg und verschließt die Löcher mit kleinen 3-Kugeln; in zwei Dimensionen wären es Scheiben (c). Dann verfolgt man den modifizierten Ricci-Fluss weiter (d).

Möglicherweise treten weitere Singularitäten auf und erfordern chirurgische Eingriffe. Perelman zeigte jedoch, dass dies nur endlich oft geschieht und der Prozess damit zu einem Ende kommt. Außerdem zeigte er, dass die genannten Zigarrensingularitäten gar nicht auftreten können.



▷ dimensionalen Hantel auftritt, konnte er durch »Chirurgie« auflösen: Man schneidet den dünnen Schlauch beiderseits der kritischen Stelle weg und verschließt die beiden verbleibenden Enden mit jeweils einer Kugel (Kasten oben). Danach kann man den modifizierten Ricci-Fluss für die neue Geometrie weiterverfolgen, bis sich vielleicht wieder eine Singularität zu bilden droht. Dies kann man wieder mit der gleichen Methode verhindern. Perelman zeigt, dass man eine solche Chirurgie nur endlich oft durchführen muss. Am Ende ist die Mannigfaltigkeit in Teile zerlegt, die jeweils eine der acht besonderen Geometrien tragen. Der zweite Singularitätentyp Hamiltons, die Zigarrensingularität, kann bei seiner Methode gar nicht erst auftreten.

Wenn man diesen Prozess auf eine 3-Mannigfaltigkeit anwendet, die vom gleichen Homotopietyp wie die 3-Sphäre ist, erhält man dabei eine runde 3-Sphäre.

Also war, topologisch gesehen, die Mannigfaltigkeit von Anfang an schon eine 3-Sphäre. Das ist genau die Aussage der Poincaré'schen Vermutung.

Unerwartete Anwendungen

Über das eigentliche Ergebnis hinaus liefern Perelmans neue Methoden wertvolle Beiträge zur Analysis. Verschiedene Analytiker verwenden sie für Probleme gänzlich anderer Art.

Außerdem hat sich ein merkwürdiger Bezug zur Physik aufgetan. Der Ricci-Fluss steht im Zusammenhang mit der so genannten Renormierungsgruppe. Das ist ein Mittel, um zu beschreiben, wie sich die Stärke von Wechselwirkungen in Abhängigkeit von der Kollisionsenergie verändert. Die Stärke der elektromagnetischen Wechselwirkung wird bei niedrigen Energien durch die (dimensionslose) Zahl 0,0073 (ungefähr 1/137) beschrieben. Wenn zwei Elektronen mit fast Lichtge-

schwindigkeit, also mit sehr hohen Energien, frontal zusammenstoßen, liegt die entsprechende Zahl eher bei 0,0078.

Erhöhung der Energie läuft darauf hinaus, den Vorgang aus kürzerer Distanz zu beobachten. Die Renormierungsgruppe entspricht damit einem Mikroskop, bei dem man die Vergrößerung einstellen kann, je nachdem, ob man einen Prozess in größerem oder feinerem Maßstab beobachten möchte. Ähnliches leistet der Ricci-Fluss: Er glättet Unregelmäßigkeiten genauso aus wie ein Mikroskop, das immer näher an die Mannigfaltigkeit herangefahren wird, wodurch sie immer glatter erscheint. Die Mathematik der Renormierungsgruppe ist derjenigen, die zur Beschreibung der Geometrisierung verwendet wird, sehr ähnlich.

Schließlich hat die Gleichung des Ricci-Flusses auch einen Bezug zu den Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie, welche die Wirkung der Schwerkraft und die Struktur unseres Universums im Großen beschreiben. Der von Perelman hinzugefügte Term kommt in der Stringtheorie vor, die eine quantisierte Version der Gravitationstheorie ist. Möglicherweise gewähren Perelmans neue Techniken und Methoden auch neue Einblicke in die Allgemeine Relativitätstheorie und die Stringtheorie. In diesem Fall hätten wir durch seine Arbeiten nicht nur die Struktur von 3-Mannigfaltigkeiten im Allgemeinen, sondern auch die Struktur des Raumes, in dem wir leben, besser verstanden. ◀



Graham P. Collins hat Mathematik und Physik studiert und ist Redakteur bei Scientific American.

Einsteins Uhren, Poincarés Karten. Die Arbeit

an der Ordnung der Zeit. Von Peter Galison. S. Fischer, Frankfurt am Main 2003

Geometrization of 3-manifolds via the Ricci flow. Von Michael T. Anderson, in: Notices of the AMS, Bd. 51, S. 184, 2004

Towards the Poincaré conjecture and the classification of 3-manifolds. Von John Milnor, in: Notices of the AMS, Bd. 50, S. 1226, 2003

Stephen Smale: The mathematician who broke the dimension barrier. Von Steve Batterson. American Mathematical Society, 2000

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.