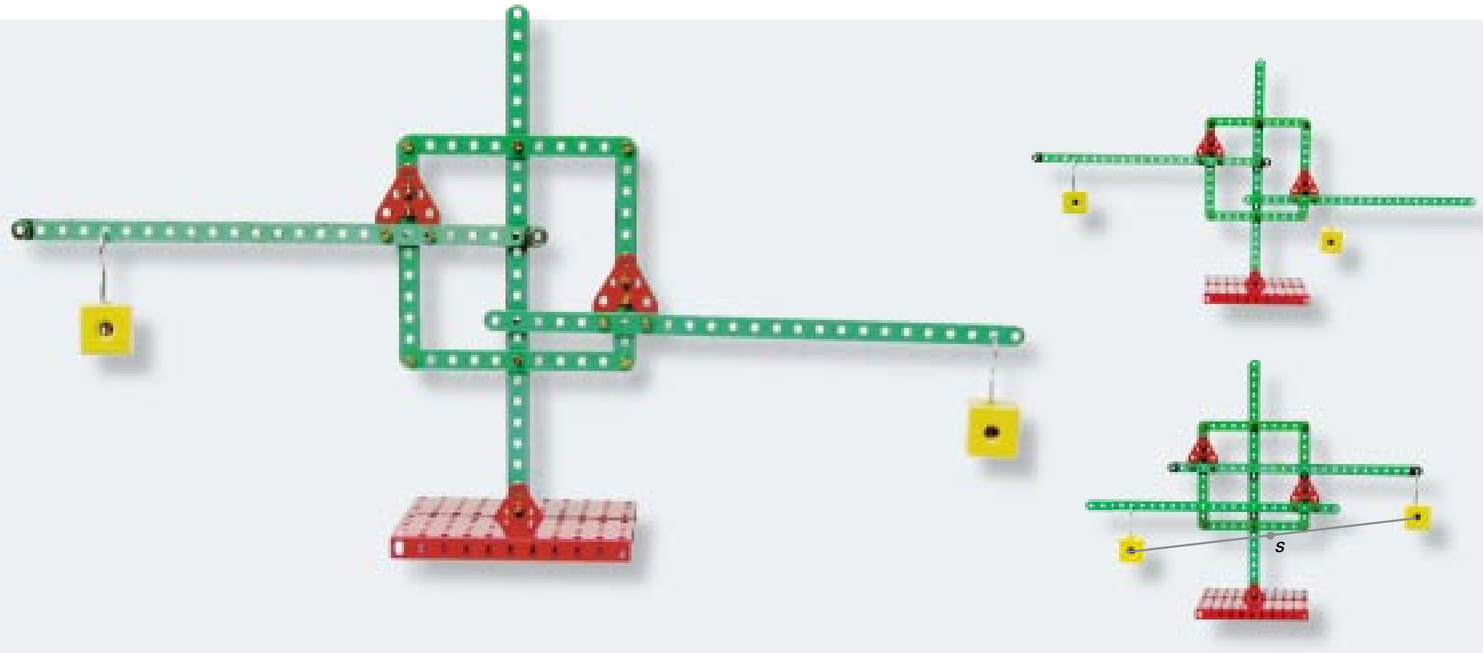


Ziemlich einfache Maschinen

Waagen oder Flaschenzüge lassen sich am elegantesten über die Energie beschreiben. Denn was davon im Überschuss vorhanden ist, verkrümelt sich beizeiten.

Von Norbert Treitz

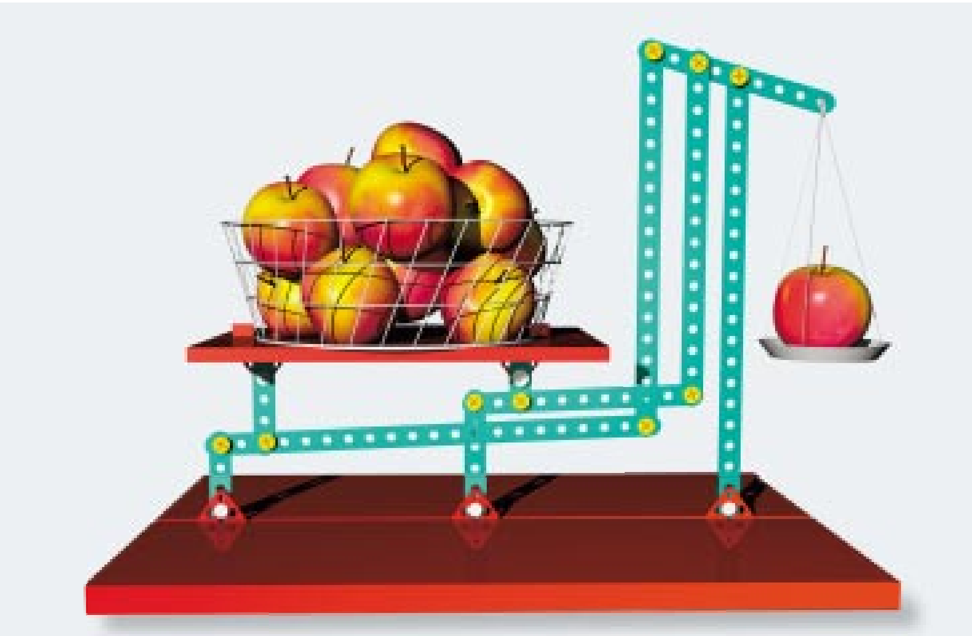
Kraft mal Kraftarm ist gleich Last mal Lastarm. Oder: Von zwei gleich schweren Menschen bringt derjenige die Wippe zum Sinken, der weiter außen sitzt. Das Hebelgesetz ist so tief in unserem Bewusstsein verankert, dass wir es auch auf das System von Gilles Personne de Roberval (1602–1675) anwenden (Bild oben). Unwillkürlich erwarten wir, dass das Gerät sich zur Seite neigt, wenn wir eines der beiden angehängten gleichen Gewichte nach außen verlagern. Ein Kollege hielt sogar ein ihm zugesandtes Manuskript, das anderes behauptete, zunächst für einen bösen Scherz. Aber in der Tat: Es neigt sich nichts!

Nicht der Apparat, sondern die physikalisch Gebildeten kommen aus ihrem – kognitiven – Gleichgewicht, raufen sich die Haare (»Ich versteh die Physik nicht mehr!«) oder flüchten sich in Ad-hoc-Definitionen darüber, was in diesem speziellen Fall als Kraftarm aufzufassen sei, damit die Hebelgesetze wieder stimmen. Kein Geringerer als Louis Poinsot (1777–1859), dem wir den Begriff des Drehmoments (und, in ganz anderem Zusammenhang, zwei nichtkonvexe reguläre Polyeder) verdanken, hat sich eine Konstruktion mit gedachten Zusatzkräften überlegt, die sich gegenseitig aufheben und nur dort Drehmomente bilden, wo es nichts zu drehen gibt. Die Konstruktion ist ziemlich kompliziert, da die Anordnung nicht weniger als sechs Drehachsen hat.

Umso verblüffender ist es, dass man die scheinbar komplizierte Sache auch viel einfacher erklären kann. Zunächst ist wegen der Symmetrie klar, dass das Gerät ohne die Gewichte in jeder Stellung in einem indifferenten Gleichgewicht ist. Aus seiner Konstruktion folgt außerdem, dass eine Hebung des einen Gewichts zwangsläufig mit einer Senkung des anderen um den gleichen Höhenunterschied einhergeht (das ganze System hat nur einen Freiheitsgrad). Bei gleich schweren Gewichten ändert also der gemeinsame Schwerpunkt seine Höhe nicht. Das gilt auch, wenn man eins der Gewichte nach außen und/oder das andere weiter nach innen hängt.

Es geht also gar nicht um Hebelarme, sondern um miteinander gekoppelte Höhenverlagerungen im homogenen Schwerefeld. Nur beim einfachen zweiarmigen Hebel (der Wippe oder der Balkenwaage) sorgen zueinander ähnliche Dreiecke dafür, dass diese Höhenänderungen sich wie die Längen der »Arme« verhalten. Das nehmen die Physiker zum Anlass, aus ihnen und den Kräften den nicht besonders elementaren Begriff des Drehmoments zu definieren.

Dieser wird aber erst dann wirklich bedeutsam, wenn es um die Belastungsgrenzen einer Waage geht. Aussagen über Gleichgewichte diesseits solcher Grenzen gelingen viel einfacher mit Energiebetrachtungen. In besonders einfachen Fällen – wie unserem – laufen sie auf die Frage hinaus, ob der gemeinsame



FOTOS: CHRISTOPH PÖPPE; ALLE GRAFIKEN: SIGANIM / SDW, NACH: NORBERT TREITZ

Das Hebelsystem von Roberval (links), mit dem Metallbaukasten gebaut. Es kommt nicht darauf an, an welche Stelle der beiden waagerechten Stangen man die Gewichte hängt. Die Stangen dürfen sogar über die Mitte des Geräts hinaus auf die »falsche« Seite ragen (kleine Bilder). *S* ist der gemeinsame Schwerpunkt beider Gewichte. Rechts eine Dezimalwaage: Wie man an den Löchern abzählen kann, hebt (senkt) sich die Lastplatte links nur um ein Zehntel des Wegs, den das Gewicht im Körbchen rechts sich senkt (hebt).

Schwerpunkt der beweglichen Teile bei einer infinitesimalen Bewegung (»virtuellen Verrückung«) auf- oder absteigt.

Was ist Lageenergie? Eine Testfrage für angehende Physiklaboranten lautete sinngemäß: »Ist der Schwerpunkt eines Systems im stabilen Gleichgewicht tiefer als im Ungleichgewicht?« »Ja«, stand als Vorgabe im Antwortenverzeichnis. Leider war die eigentlich korrekte Antwort »Manchmal« nicht vorgesehen.

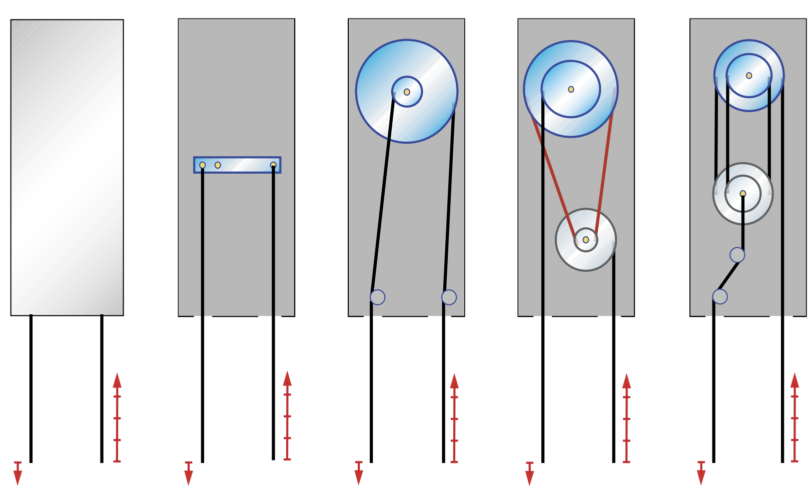
Die Behauptung trifft dann zu, wenn die entscheidende potenzielle Energie die des homogenen Schwerefelds ist. Bei der Federwaage ist das offensichtlich nicht der Fall. Die potenzielle Energie hat nämlich außer dem mit der Höhe linear steigenden Term des Schwerefelds noch einen elastischen, der quadratisch mit der Verlängerung oder Verkürzung der Feder gegenüber ihrer neutralen Länge geht. Die Summe beider Energien hat offenbar bei einer gewissen Höhe ein Minimum, und um dieses herum kann die Last an der Federwaage auch schwingen.

Sind nun die »starren« Stangen der Roberval-Waage etwa nicht elastisch, oder wenn doch: Wieso kann man das vernachlässigen? Nach dem Hooke'schen Gesetz ist die Auslenkung x einer Feder der angreifenden Kraft F proportional: $F = Dx$ mit einer Federkonstanten D. Die elastische Energie ist dann $W = Dx^2/2$, was offenbar bei kleinen x sehr wenig ist. Deutlicher wird es, wenn man das für eine gegebene Kraft F als $W = F^2/(2D)$ schreibt: Je größer die Federkonstante D (das heißt je härter das Material), desto weniger trägt die Elastizität zur Energiebilanz bei, im idealen Grenzfall starrer Körper gar nicht. Bei dem Wort »Lageenergie« ist also nicht immer klar, ob nur die Energie des Schwerefelds (im homogenen Fall die Höhenenergie) gemeint ist oder alle Arten potenzieller Energie, insbesondere die der Elastizität.

Waagen: Die kleinste Ungleichheit der Gewichte lässt die Roberval-Waage theoretisch zu einer Seite schlagen. Ein Zeiger (das sprichwörtliche »Zünglein an der Waage«) nach oben oder unten an einer der beiden drehbaren Stangen macht das Gleichgewicht labil beziehungsweise stabil. In der stabilen Form kennen wir das Roberval-Hebelsystem als Gemüsewaage vom Wochenmarkt, bei der es bekanntlich (?) keine Rolle spielt, ob man die Äpfel oder die Gewichte weiter innen oder weiter außen auflegt: Die Kundin verlässt sich auf das Eichamt, und mit Recht, denn dort sitzen Leute, die Physik können.

Bei größeren Mengen von Energieträgern (Kartoffeln, Kohlen) ist es bequem, wenn man nicht auch noch so große Gewichte handhaben muss. Man nimmt daher eine Waage, bei der ein Gewicht mit einer zehnmal so großen Last ins Gleichgewicht kommt (Dezimalwaage). Eine Roberval-Waage mit dieser Eigenschaft hat wie eine gewöhnliche Balkenwaage zwei »Hebel«, deren einer zehnmal so lang ist wie der andere; aber die »Waagschalen« bleiben in jeder Position horizontal und könnten im Prinzip beliebig nach rechts oder links verlängert werden, ohne dass die Wirkung einer aufgelegten Last sich verändern würde.

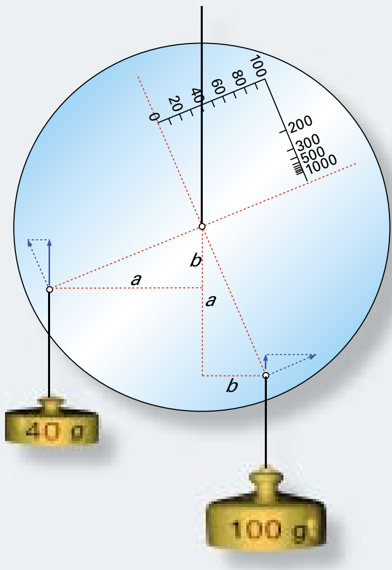
Für sehr große Gewichte wie zum Beispiel ganze Lastwagen sind auch Zentesimalwaagen (Verhältnis 1 : 100) gebräuchlich. ▷



Verschiedene Realisierungen eines Getriebes mit Übersetzung

Elementare Briefwaagen

Die Scheibe, die als Gewichtsmessgerät dient, muss nicht kreisförmig sein, sondern kann eine beliebige Form haben; sie muss nur genau im Schwerpunkt aufgehängt sein. Ihre Masse geht nicht in das Messergebnis ein. Die Skala gilt für den Fall, dass rechts 100 Gramm angehängt sind.



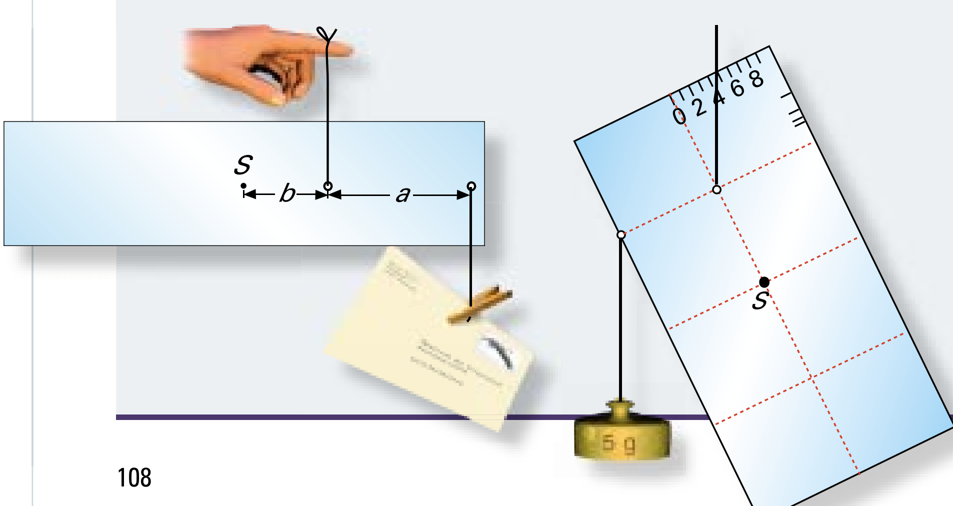
In der gezeigten Position verhalten sich die Katheten der eingezeichneten (allesamt zueinander ähnlichen) rechtwinkligen Dreiecke wie die angehängten Gewichte. Bei einer kleinen Drehung (durch die Pfeile stark übertrieben angedeutet) bleibt die potenzielle Energie unverändert: Was durch Anheben des einen Gewichts hinzukommt, geht durch Absinken des anderen verloren, denn die Höhenunterschiede sind umgekehrt proportional zu den Gewichten. Bei größeren Drehungen in die eine oder andere Richtung müsste das steigende Gewicht mehr Energie bekommen, als das sinkende abgibt; es wäre demnach eine Zugabe von Energie nötig. Also befindet sich das System aus Waage und Schwerefeld im stabilen Gleichgewicht.

Die Primitivform dieser Waage (Bild rechts unten) besteht aus einem schlichten Rechteck aus Karton. Man kann es sich in eine obere und eine untere Hälfte zerlegt denken. Die obere ist wie die oben abgebildete Kreisscheibe im Schwerpunkt aufgehängt, die untere dient als Gegengewicht.

Mit der Drehmomentbilanz an der zentralen Achse der Scheibe kommt das gleiche Ergebnis heraus, allerdings mit größerem begrifflichem Aufwand.

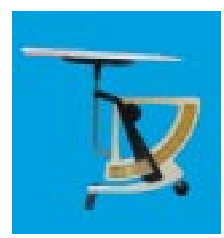
Will man noch mehr (hier) entbehrliches Wissen einbringen, so kann man die Skala bogenförmig als Viertelkreis um den Mittelpunkt machen und feststellen, dass die Bezifferung dann über die Funktionen Tangens und Cotangens zu bestimmen ist, denn die lineare Skala (und ihre reziproke Fortsetzung) liegen auf Tangenten an diesen Viertelkreis.

Die Lineal-Briefwaage verwendet die Masse M des Lineals als Vergleichsgröße. Auf einer Seite einer Geraden durch den Schwerpunkt S bringt man mehrere Bohrungen an. Das Bild zeigt nur zwei davon mit den Abständen a und b. Durch Kippen aus der Waagerechten (daher der Name) zeigt die Linealwaage an, ob die rechts angehängte Masse m größer oder kleiner als Mb/a ist. Für jede im Portotarif vorkommende Intervallgrenze kann man ein Loch für die Aufhängung der Waage anbringen und die Last immer an das linke Loch hängen.



▷ Streng genommen ist diese Waage nur nahe der Position mit waagerechten und senkrechten Stangen indifferent, aber die Fehler sind sehr klein.

Das Wort »Gleichgewicht« ist in solchen Fällen ein Missbrauch der Umgangssprache, denn auf der Dezimalwaage oder allgemein beim ungleicharmigen Hebel sind im Gleichgewichtszustand die Gewichte eben nicht gleich. Was ist dann aber wirklich gemeint? In einem System mit einem einzigen Freiheitsgrad wie einer Waage ist die potenzielle Energie als Funktion einer einzigen Koordinate, zum Beispiel des Winkels der drehbaren Stangen, beschreibbar. Gleichgewicht herrscht genau da, wo der Graph dieser Funktion eine Horizontalstelle hat: im stabilen Gleichgewicht ein Minimum, im labilen ein Maximum. Wenn der Graph ein ganzes Stück horizontal verläuft, herrscht indifferentes Gleichgewicht.



Briefwaagen: Die klassische Bürobriefwaage mit umklappbarem Gegengewicht zum Umschalten zwischen den beiden Messbereichen hat ebenfalls ein Parallelogrammgestänge, zumindest für die Waagschale, auf welcher der Brief liegt.

Eine ausgesprochen einfache Briefwaage mit einem theoretisch unendlichen Messbereich zeigt das Bild rechts unten in nebenstehendem Kasten. In dieser Position ist das angehängte Gewicht halb so schwer wie das Rechteck. Die Skala ist zwischen 0 und dem vollen Gewicht des Rechtecks linear und für »den Rest« bis unendlich linear zum Kehrwert, aber auf der anderen Rechteckseite.

Für das Briefporto ist nur wichtig, in welchem Gewichtsintervall ein Brief liegt. Ein Lineal mit geeigneten Bohrungen und eine Wäscheklammer ergeben daher ein nützliches Gerät (links im Kasten).

Das Räderwerk in der Black Box: Aus einem Kasten schauen unten zwei Fäden heraus. Zieht man den einen um dh nach unten, so wandert der andere um $x{\cdot}dh$ nach oben. Wie muss man sie belasten, damit Gleichgewicht besteht? Offensichtlich im Verhältnis $x:1$, also umgekehrt wie die Höhenänderungen. Was in dem Kasten ist, kann sehr viele ver-

Drei Sorten Flaschenzüge: links der Differenzialflaschenzug, in der Mitte der gewöhnliche und rechts der Potenzflaschenzug (mit Potenzen von 2). Die Übersetzung ergibt sich auch hier geometrisch aus dem Verhältnis der Höhenänderungen, jedenfalls wenn man das Gewicht gewisser Seilstücke vernachlässigt.

schiedene Namen haben (Bilder S. 107 unten): Wellrad, Zahnräder, Kettenübersetzung, Flaschenzug, hydraulische Presse. Bei allen diesen Maschinen kann man – wie bei den Bauten aus dem Metallbaukasten, aber notfalls durch Messung von Längen statt Zählung der Lochabstände – geometrisch das Übersetzungsverhältnis der Wegstücke bestimmen und daraus dessen Kehrwert, das Verhältnis der Gleichgewichtsbelastungen.

Mit Kräften oder Drehmomenten kommt das Gleiche heraus, aber sie sind als Vektoren komplizierter als die skalare Größe Energie. Vor allem kann man bei der Energie stets sagen, von welchem Objekt zu welchem anderen sie wandert, zum Beispiel aus dem Schwerefeld in den fallenden Apfel. Leider verunklart man das oft durch Formulierungen wie »Verrichten von Arbeit am Apfel«. Verrichten wir auch Zahlungen am Sparschwein, oder werfen wir das Geld nicht einfach hinein?

Kräfte und Drehmomente treten dagegen in Statik und Quasistatik (Bewegungen mit fast nicht vorhandener Beschleunigung) in Paaren auf, die sich jeweils zu null ergänzen: Zieht der Apfel am Baum oder der Baum am Apfel oder beide am Ast? Dass Kräfte anschaulicher seien als die Energie, ist eine Täuschung. Wir verwechseln die Tätigkeit unserer Muskeln mit dem physikalischen Kraftbegriff, was auch innerhalb der Fachsprache gelegentlich zu Verwirrung führt.

Ein Schriftsteller hat einmal gesagt: Die Physiker sind schreckliche Menschen, sie erklären unverständliche Erscheinungen mit unverständlichen Naturgesetzen. Das ist zwar nicht falsch, trifft aber nur einen schlechten Unterricht: für jede Sorte von einfachen Maschinen ein Experiment, ein Lehrsatz und eine Rechenaufgabe. Die Physiker sind in Wirklichkeit sehr elegante Menschen. Sie erklären sehr viele unverständliche Erscheinungen mit sehr wenigen unverständlichen Naturgesetzen. So kann man alle einfachen Maschinen gemeinsam erklären: Es gibt genau dann ein stabiles Gleichgewicht, wenn jede mögliche Verlagerung ihrer Teile die Zufuhr potenzieller Energie erfordert.

Dass die Natur solche Minima der potenziellen Energie liebt, ist kein eigenes Naturgesetz, sondern eine Folge des Prinzips von der Nichtabnahme der Entropie (II. Hauptsatz): Wenn die Energie die Gelegenheit hat, sich weiträumig zu verkrümeln, so tut sie das und kommt durch Zufall kaum wieder zurück. Sie hinterlässt dabei stabile Gleichgewichte, und ohne solche Reibungsprozesse gäbe es überall nur ewiges Schwingen und Zappeln. ◁

Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie anschauliche Erklärungen dazu nutzt er nicht nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hochbegabter Kinder und Jugendlicher.

Nüsse & Rosinen. Von Norbert Treitz. CD mit Buch. Harri Deutsch, Frankfurt (Main), in Vorbereitung

Brücke zur Physik. Von Norbert Treitz. 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 2003

Spiele mit Physik! Von Norbert Treitz. 4. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1996