

*Aus urheberrechtlichen Gründen
können wir Ihnen die Bilder leider
nicht online zeigen.*

Im R4 ist viel Platz

Wer unversehens in den IR⁴ gerät, erlebt eine ungeahnte Reichhaltigkeit an geometrischen Körpern – und die eigene Beschränktheit.

Von Christoph Pöppe

Kennen Sie noch den alten R4? Krückstockschaltung, gewöhnungsbedürftige Straßenlage, nichts für die Anhänger einer sportlichen Fahrweise. Keine Materialverschwendung für Komfort oder Lärminderung – aber viertürig und erstaunlich geräumig, vorausgesetzt, man war bereit, den eigenen Körper und das Gepäck in geeigneter Weise zusammenzufalten.

In einem solchen Gefährt fand ich mich wieder, nachdem ich über die papierne Datenbank in der Mensa eine Mitfahrgelegenheit nach Berlin gefunden hatte (die Geschichte ist schon reichlich zwanzig Jahre her). Wir waren fünf Leute samt Rucksäcken, hatten uns mit beträchtlicher Mühe in dem Auto verstaут, die Fahrt versprach lang zu werden, und ich versuchte ein bisschen zu schlafen.

Auf einmal war es überall ziemlich hell. Das musste der Grenzkontrollpunkt sein. Ich blinzelte und griff unwillkürlich nach meinem Reisepass – aber irgendwie stimmte nicht. Noch nie hatte ich in einem Auto den schwer zugänglichen Hohlraum unter den Vordersitzen so gut beleuchtet gesehen. War das eine Spezialität des R4?

Dann hatte ich das unangenehme Gefühl, dass jemand seine Aufmerksamkeit sehr speziell auf mich richtete, auch wenn ich mir nicht vorstellen konnte warum. Mein Pass war noch gültig, und ich hatte nichts bei mir, das den Grenzorganen der DDR hätte missfallen können.

Das Gekicher, das unlokalisierbar von allen Seiten her an mein Ohr drang, wirkte sehr unamtlich. Und dann der Ausruf: »Der ist ja sowas von dünn!«

Ich schloss beruhigt die Augen und klappte mich wieder auf dem Sitz zusammen. Man kann mir ja einiges nachsagen; aber dünn bin ich nun wirklich nicht. Die mussten jemand anders meinen. Nur: Wieso war es bei geschlossenen Augen immer noch so hell?

Nicht um die Kragenebene knicken!

»Wieso der?« fragte eine andere Stimme. »Sieht man doch, dass das ein Männchen ist«, kam die Antwort. Plötzlich fühlte ich mich an intimer Stelle unangenehm berührt, schrak hoch, überprüfte hastig meine Kleidung – aber daran war nichts zu beanstanden.

Die Berührung wechselte zu meinen eingeklemmten Füßen, und dann geschah etwas noch Seltsameres: Meine Füße waren mit einem Mal verschwunden! Zumindest sah ich sie nicht mehr, und der Rucksack, unter dem sie gesteckt hatten, hörte plötzlich auf zu drücken. Stattdessen fühlte es sich so an, als wollte jemand meine Knie überstrecken: jene charakteristische Bewegung, mit der man beim Hühnerbein den einen Knochen vom anderen löst.

»Vorsicht«, kam wieder eine Kicherstimme. »Verknick ihn nicht.«

Aber es tat überhaupt nicht weh. Vorübergehend bekam ich auch meine Füße wieder zu sehen. Überall, von innen wie von außen, fassten irgendwelche

Hände mich an, wilde Lichteffekte schwirrten um mich her; dann beruhigte sich allmählich die ganze Szenerie. Ich fand mich auf einer Art weißem Tisch sitzend wieder, vollständig und, soweit erkennbar, unversehrt.

Ich wackelte mit dem Kopf – alles in Ordnung. Nur dieses schattenlose, diffuse Licht ohne eine erkennbare Lichtquelle war nach wie vor höchst verwirrend. Ich wackelte etwas heftiger mit dem Kopf – und wieder war alles durcheinander. Heftiges Lichtgeflicker, ich sah wieder nichts von mir selbst, und große Aufregung unter den unsichtbaren Kicherstimmen: »Pass auf, er fällt ♦wärts!« Und wieder fassten mich unzählige Hände und setzten mich zurecht.

Mit dem Zeichen ♦ versuche ich eine Art Würgelaut wiederzugeben, den ich so noch nie gehört hatte. Erst später wurde mir seine Bedeutung klar.

Anscheinend wurde ich besichtigt. Augenpaare tauchten aus dem Nichts auf und verschwanden wieder, gelegentlich konnte ich ein erstauntes Gesicht dazu sehen, einige besonders Vorwitzige schienen mit den Fingern in mir herumzustochern – jawohl, in mir. Es fühlte sich sehr merkwürdig an, wie eine verschärfte Form von Nasebohren. Nachdem ich mehrfach erschrocken zusammengezuckt war, ließ man von mir ab.

»Knick ihn doch noch einmal um diese Ebene«, schlug eine der Stimmen vor und fasste mich um und in meinen Bauch. Noch bevor ich ernsthaft in Panik geraten konnte, verspürte ich wieder dieses Knirschgefühl, mein Unterleib verschwand im Unsichtbaren – aber es tat wieder nicht weh.

»Kopf hoch«, flüsterte ich mir selbst zu, »anscheinend geht es mir noch nicht an den Kragen.«

»Nicht Kopf hoch«, erwiderte eine der Stimmen. »Kopf ♦!« ♦ war ein anderer Würgelaut, den ich ebenfalls noch nie gehört hatte. »Um die Kragenebene abknicken.« Hilfreiche Hände packten mich am (im?) Kopf, es knirschte nur ganz wenig, aber mich packte die blanke Angst um meine Halswirbel. Wieder tanzten die Lichteffekte um mich, meine Arme wurden unsichtbar, dafür tauchten auf einmal meine Füße dicht vor meiner Nase auf. Ich hätte ohne weiteres an meinem großen Zeh nuckeln können, was mir seit Kleinkindertagen nie wieder gelungen war. Das Merkwürdigste war: Ich fühlte mich überhaupt nicht verkrümmt! ▷

▷ Offensichtlich war ich nicht der Einzige, der staunte. Von allen Seiten her erschienen Augenpaare aus dem Nichts und betrachteten mich intensiv, hektisches Geflüster setzte ein, und dann die entscheidende Bemerkung: »Der ist nicht bloß dünn – ist der vielleicht dreidimensional?«

Was für eine Frage! »Natürlich bin ich dreidimensional«, erwiderte ich mit einer gewissen Entrüstung. »Ich habe eine Länge, eine Breite und eine Dicke, und das nicht zu knapp. Das wäre ja fürchterlich, wenn ich zweidimensional wäre. Platt wie eine ausgebreitete Frischhaltefolie, und beliebig verknitterbar.«

Eine meiner Gesprächspartnerinnen nahm plötzlich diesen ganz besonders therapeutischen Tonfall an. Offensichtlich versuchte sie, mir schonend etwas beizubringen, das ich kaum zu verstehen im Stande wäre. »Ich fürchte, du bist dreidimensional, platt und beliebig verknitterbar. Es wäre kein Problem, dich handlich zusammenzurollen.«

»Wie?«

»Na, ganz einfach. Wir heben deinen Kopf ♦, rollen ihn ein, und der Rest geht dann ganz einfach ...«

»Bitte nicht. Aber welche Richtung ist ♦?«

»Was für eine Frage! Beweg dich einfach ein bisschen« – und schon griff mir jemand hilfreich in die Arme: »Rechts, links, vorne, hinten, oben, unten ...« wieder dieses Knirschgefühl, »... ♦ und ♦. Ist doch eigentlich ganz klar.«

Jetzt endlich begriff ich. »Seid ihr etwa vierdimensional?«

»Ja selbstverständlich. Von jedem Punkt aus kann man sich in vier Richtungen bewegen, die alle aufeinander senkrecht stehen – wie man leicht sieht.«

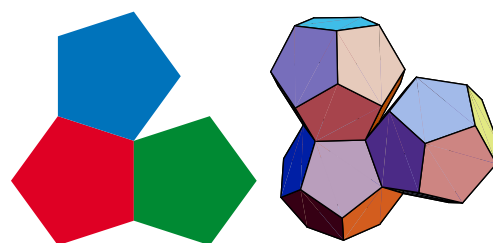
Ich sah es nicht. Nach einer Weile wurde den geheimnisvollen Unbekannten klar, dass mein Vorstellungsvermögen hier an unüberwindliche Grenzen stieß. Zum Glück bemerkten wir, dass uns ein Verständigungsmittel zur Verfügung stand, das von solchen Einschränkungen unabhängig war: die abstrakte Sprache der Mathematik. Reelle Zahlen waren uns geläufig, ebenso die Tatsache, dass man, wenn man sich erst einmal einen Nullpunkt und ein Koordinatensystem zugelegt hat, jeden Punkt im Raum durch drei reelle Koordinaten ...

»Nein, vier reelle Koordinaten. Wir sind hier im $\mathbb{R}^4$.«

Leben in vier Dimensionen

Schon richtig. Mit $\mathbb{R}$ bezeichnet man die reelle Zahlengerade, $\mathbb{R}^2$ ist so etwas wie das Produkt der Menge $\mathbb{R}$ mit sich selbst, das heißt die Menge aller Paare reeller Zahlen oder auch das, was man normalerweise die Ebene nennt. Der uns umgebende Raum heißt entsprechend $\mathbb{R}^3$, und mehr gibt es nicht – dachte ich, bis ich in jenen merkwürdigen $\mathbb{R}^4$ stieg.

Das Leben in der Ebene muss ausgesprochen öde sein. Die Augen eines $\mathbb{R}^2$ -Menschen sehen nicht ein zweidimensionales Bild, sondern nur eine Li-



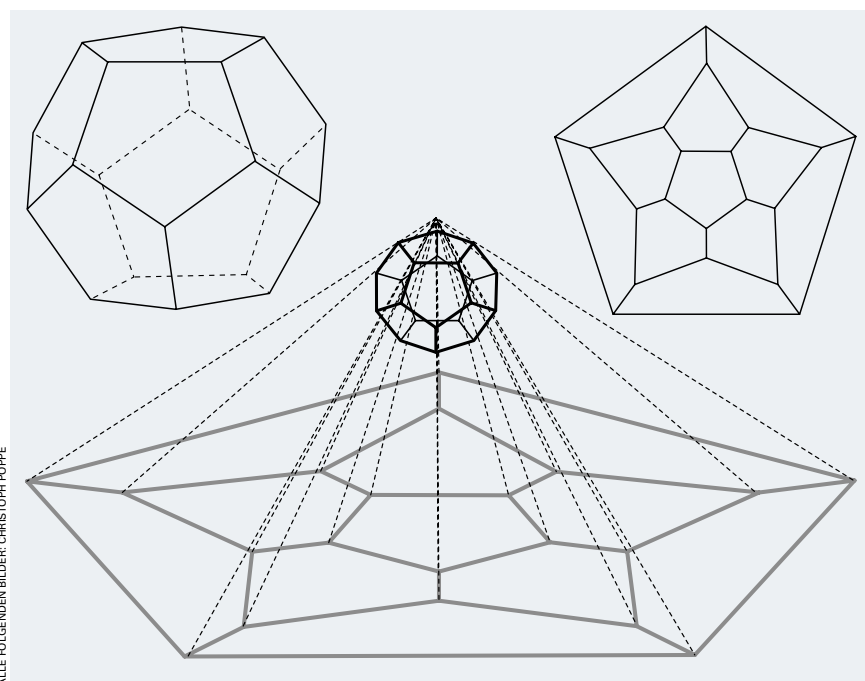
▲ Drei regelmäßige Fünfecke in der Ebene lassen eine Lücke, die durch Falten entlang der gemeinsamen Kanten geschlossen wird (links). Entsprechend schließt man im vierdimensionalen Raum die Lücke zwischen drei Dodekaedern, indem man sie gegeneinander faltet – entlang der gemeinsamen Ebenen.

nie. Wer mit dem Blick nach Osten aus einem zweidimensionalen Ei geschlüpft ist, muss einen Kopfstand machen, um westwärts zu schauen (Norden und Süden gibt es sowieso nicht). Der Autor A. K. Dewdney hat die Bewohner seines »Planiversums« deshalb vorsorglich mit einem Ost- und einem Westauge ausgestattet. Knoten sind undenkbar, ebenso wie viele andere Dinge, die das Leben im $\mathbb{R}^3$ erfreulich machen. Ob es so etwas wie Elektrizität gibt, ist unklar; unsereins kann sich jedenfalls die Maxwell'schen Gleichungen in weniger als drei Dimensionen nicht vorstellen.

Wer immer über die $\mathbb{R}^2$ -Welt nachdenkt oder gar ein Buch schreibt, den befällt unweigerlich ein gewisses Mitleid mit den armen, ach so beschränkten Kreaturen. Und siehe da: Auf einmal gingen meine $\mathbb{R}^4$ -Freundinnen auffällig höflich und behutsam mit mir um. Offensichtlich hatten sie begriffen, wie beschränkt ich war.

Was geschieht mit einem $\mathbb{R}^2$ -Menschen, wenn ein gewöhnlicher ($\mathbb{R}^3$ -)

◀ So macht man einem $\mathbb{R}^2$ -Menschen ein Dodekaeder (links) begrifflich: Man setzt ein Drahtmodell auf die Ebene und hängt eine punktförmige Lichtquelle dicht über seine Deckfläche (Mitte). Der Schatten des Drahtmodells in der Ebene ist das Schlegel-Diagramm (rechts): Es besteht aus teilweise verzerrten Fünfecken, aber gewisse Eigenschaften, zum Beispiel dass sich in jeder Ecke drei Fünfecke treffen, bleiben erhalten.



ALLE FOLGENDEN BILDER: CHRISTOPH PÖPPE

Mensch ihn aus seiner Ebene heraushebt und zusammenfaltet? Nichts Schlimmes. Hinterher kann man ihn wieder glattlegen, und da er – für unsere Begriffe – unendlich dünn ist, bleibt noch nicht einmal eine Knickspur zurück. Aber in seiner Welt gibt es Drehungen nur um einen Punkt. Rotationen um eine ganze Achse sind für ihn unvorstellbar. Wenn bei einer solchen auch noch ein Teil von ihm aus seiner Welt herausgerät, wird er unweigerlich in Panik geraten.

Ich war durchaus dankbar, dass meine Freundinnen davon abließen, mich um eine Ebene zu knicken und mich dabei von innen zu berühren.

Sie zeigten mir eine Hauswand von außen – eine ganz gewöhnliche Ziegelmauer. Dass das, was ich für ein ganzes Haus gehalten hatte, nur eine seiner Wände war und fast das ganze Volumen mit Ziegeln ausgefüllt war, konnte ich nicht sehen. Ob man das Innere nicht hohl lassen könne? »Natürlich nicht. Dann zieht's doch rein. In der Mitte des Volumens ist ein Glasblock« – von dem ich nichts sehen konnte – »damit Licht hereinkommt.«

Dreidimensionale Schatten

Einer unter den $\mathbb{R}^4$ -Damen fiel ein, wie man meinem Vorstellungsvermögen aufhelfen könnte: »Wir gehen einfach eine Dimension herunter. Projektion! Gib mir doch mal einen Schreibblock, ich will ihm etwas aufklotzen.«

Vor meinen Augen tauchte aus dem Nichts ein massiver Klotz aus Papier auf, wabbelte ein wenig und nahm dann wieder Quaderform an.

»Ach nein, gib mir lieber einen Overheadblock, sonst sieht er nichts im Inneren.«

Der Papierklotz verschwand und wurde durch einen durchsichtigen Klotz ersetzt. In dessen Mitte erschien die Spit-

ze eines Filzstifts und zeichnete eine vertraute Figur – räumlich.

»Ihr Mathematiker steht doch so auf die platonischen Körper. Das hier ist ein Dodekaeder; es besteht aus zwölf regelmäßigen Fünfecken, die jeweils zu dritt an eine Ecke grenzen.«

Das Gebilde war mir geläufig.

»Jetzt überleg dir, wie du so ein Ding aus Papier machst.«

Da kannte ich mich aus. »Ich zeichne ein regelmäßiges Fünfeck auf Papier und an jede seiner Seiten ein gleichartiges Fünfeck. Zwischen den äußeren Fünfecken bleiben kleine keilförmige Lücken, die schneide ich heraus und knicke das ganze Gebilde entlang der Grenzen zwischen den Fünfecken, sodass die

äußeren Fünfecke sich treffen. Das gibt ein halbes Dodekaeder, und die andere Hälfte geht genauso.«

»Nicht schlecht, wenn man bedenkt, wie beschränkt er ist«, kam ein Kommentar von dritter Seite. »Benimm dich«, versetzte meine Freundin, »er kann doch nichts dafür.« Und zu mir: »Aber eure platonischen Körper sind nur ein müder Abklatsch von unseren. Pass auf.«

Auf dem Boden vor mir erschien ein massives Dodekaeder. »Das ist das mittlere Dodekaeder.« Klack, saß auf einer seiner Seitenflächen ein gleichartiger Körper und – klack – auf der Nachbarfläche ein dritter. »Eigentlich müsste ich jetzt auf jede Fläche des mittleren Dodekaeders ein weiteres aufsetzen; aber die beiden reichen für den Anfang. Du siehst die keilförmige Lücke zwischen den äußeren Körpern?«

»Sicher.«

»Jetzt passiert etwas ganz Einfaches. Ich knicke die äußeren Dodekaeder gegen das mittlere, und zwar entlang der gemeinsamen Grenzfläche, bis sich die beiden berühren. Und schon ist die Lücke zu.«

Es knirschte ein bisschen – und dann waren die beiden äußeren Dodekaeder meinem Blick entschwinden.

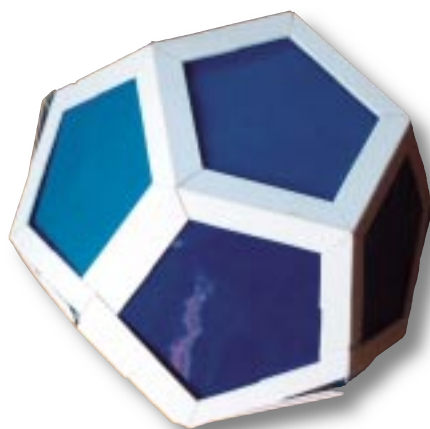
»Er sieht wieder nichts«, kommentierte eine Kollegin aus dem $\mathbb{R}^4$. »Dazu ist er doch zu dünn.«

»Schon gut«, erwiderte meine erste Gesprächspartnerin. »Deswegen mache ich doch das Licht an. Schau dir den Overheadklotz an.«

Gleichmäßiges Licht durchflutete den Klotz; mit einem kurzen Wischen war die Zeichnung aus seinem Inneren verschwunden, und es erschien das Abbild der drei Dodekaeder, ohne irgendeine Lücke zwischen ihnen. Allerdings sahen zwei von ihnen ein bisschen verzerrt aus.

»Ich habe jetzt $\blacklozenge$ halb der drei Körper eine punktförmige Lichtquelle angeknipt. Wenn dir einige von ihnen verzerrt vorkommen, liegt das an der Perspektive.«

Dann hielt sie sich mit weiteren Erläuterungen nicht auf. Es machte klack, klack, klack, ... Im Original sah ich nichts davon, aber in der Projektion in den Overheadklotz fügte sich ein Dodekaeder nach dem anderen zu den bereits vorhandenen, lückenlos, versteht sich. Die einzelnen Körper wurden immer größer und immer verzerrter: Hinter einer riesengroßen Fünfecksfläche ver- ▷



Die Projektion des 120-Zells in den $\mathbb{R}^3$. Die 120 Dodekaeder erscheinen in neun Schichten: zuinnerst das »Baby« (Mitte), klein, weiß und unverzerrt, darum der Reihe nach 12 blaue, 20 rote, 12 gelbe, 30 grüne, 12 gelbe, 20 rote und 12 blaue Dodekaeder, die immer größer und verzerrter werden (alle Dodekaeder einer Schicht sind kongruent). Das alle umschließende weiße Dodekaeder, der »Käfig« (oben), ist wieder unverzerrt.

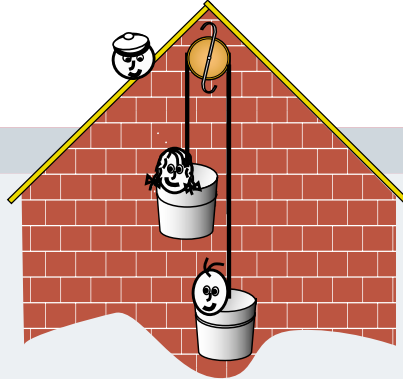
PREISRÄTSEL

Alles im Eimer?

Von Pierre Tougne

Dachdeckermeister Alois und seine beiden Lehrlinge Bernd und Christa sitzen auf dem Dach eines Hauses fest. Kurz bevor sie mit ihrem Werkzeugkasten die Leiter herabsteigen wollten, hat Stukkateur Schluri diese einfach eingepackt. Glücklicherweise steht ihnen ein sehr einfacher Lastenaufzug zur Verfügung. Er besteht aus zwei großen, gleich schweren Eimern, die mit einem Seil verbunden sind. Das Seil ist über eine Rolle am First des Hauses geführt. Ein einzelner Eimer kann nicht mehr als zwei Personen oder eine Person und den Werkzeugkasten tragen.

Die Fahrt mit dem Aufzug geschieht weit gehend ungebremst der Schwerkraft folgend. Keiner der drei Handwerker kann eingreifen. Wenn der Unterschied der beiden gefüllten Eimer mehr als zehn Kilogramm beträgt, ist mit einer so ruppigen Landung zu rechnen, dass die Passagiere Schaden nehmen könnten. Dagegen hält der



Werkzeugkasten jede Landung problemlos aus.

Alois wiegt 85 kg, Bernd 50 kg, Christa 40 kg und der Werkzeugkasten 30 kg. Am Anfang ist ein Eimer oben, der andere ist am Boden.

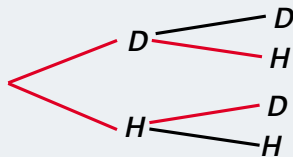
Was müssen die drei Handwerker der Reihe nach tun, um mitsamt dem Werkzeugkasten wohlbehalten den Boden zu erreichen?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir fünf Briefbeschwerer »Evolution Mensch«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 16. November 2004, eingehen.

Lösung zu »Chancengleichheit« (September 2004)

Das Publikum setzt sich aus 990 Damen und 946 Herren zusammen.



Die Anzahl der Damen sei mit d , die der Herren mit h bezeichnet. Die gesamte Zuschauerzahl beträgt also $h+d$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die erste zufällig ausgewählte Person eine Dame ist, beträgt $d/(d+h)$. Bei der nächsten Wahl wird mit Wahrscheinlichkeit $h/(d+h-1)$ ein Herr ausgewählt (es steht eine Dame weniger zur Auswahl). Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis »erst Dame, dann Herr« (oberer roter Zweig im Diagramm) ist das Produkt dieser Wahrscheinlichkeiten.

Analog hat der untere rote Zweig die Wahrscheinlichkeit $h/(d+h) \cdot d/(d+h-1)$ für sich. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Äste soll gleich $1/2$ sein. Diese Bedingung ergibt nach einigen Umformungen:

$$(d-h)^2 = d+h$$

Damit diese Gleichung mit natürlichen Zahlen gelöst werden kann, muss die gesamte Zuschauerzahl eine Quadratzahl sein. $1936=44^2$ ist die einzige Quadratzahl zwischen 1900 und 2000. Da folglich $d-h=44$ gilt, ist die Lösung nur noch Formsache.

Die Gewinner der fünf »Wendekreisel« sind Claudia Karle, München; Lutz Dressler, Erkrath; Martina Wassenberg, Wiesbaden; Volker Crystalla, Braunschweig; und Christine Jost, Dresden.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal [wissenschaft-online \(www.wissenschaft-online.de\)](http://www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knebelei.

▷ schwanden die elf anderen geradezu. Nachdem es eine geraume Zeit geklackt hatte, kam das letzte Dodekaeder hinzu und verdeckte alle anderen. Es war sehr groß, aber völlig unverzerrt.

»Das ist das 120-Zell, das Prachtstück unter unseren platonischen Körpern. Es besteht aus 120 Dodekaedern. An jede Ecke grenzen vier von ihnen, an jede Kante dreie, und alle sind genau gleich, obgleich es für dich nicht so aussieht. Innen ist es übrigens hohl.«

Man drehte das Prachtstück um verschiedene Ebenen; im $\mathbb{R}^4$ finden Drehungen nicht um Achsen, sondern stets um Ebenen statt. In meiner beschränkten Weltsicht konnte ich die vielen Symmetrien, über die das 120-Zell verfügt, nur mühsam errahnen. Zunächst hatte die Lampe genau $\frac{1}{2}$ halb des Körpermittelpunkts des $\frac{1}{2}$ sten Dodekaeders gehangen. So gesehen wirkte auch die Projektion sehr symmetrisch. Aber man konnte das ganze Ding auch so drehen, dass eine Fläche, eine Kante oder eine Ecke der Lichtquelle am nächsten waren, genauer: dass ein Flächenmittelpunkt, ein Kantenmittelpunkt beziehungsweise ein Eckpunkt auf die $\frac{1}{2}$ wärts gerichtete Koordinatenachse, die senkrecht auf »meinem« $\mathbb{R}^3$ stand, zu liegen kamen. Je nach Orientierung kamen die verschiedensten Symmetrien des Körpers zum Vorschein. <

Teil II erscheint im Dezemberheft.



Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Flacherland. Die unglaubliche Reise der Vikki Line durch Raum und Zeit. Von Ian Stewart. C. H. Beck, München 2003

Online in die vierte Dimension. Von Hans Borucki. Aulis, Köln 2000

Dimensionen. Figuren und Körper in geometrischen Räumen. Von Thomas F. Banchoff. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg 1991

Die Wunderwelt der vierten Dimension. Ein Kursbuch für Reisen in die höhere Wirklichkeit. Von Rudy Rucker. Scherz, München 1987

Das Planiversum. Computerkontakt mit einer dreidimensionalen Welt. Von Alexander K. Dewdney. Zsolnay, Wien 1985

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.