

## Warum steigt der Wasserspiegel?

Man muss nicht den Druck bemühen, um Gleichgewichte in der Hydrostatik zu finden. Der Energiebegriff erweist sich als nützlicher.

Von Norbert Treitz

**D**ruck ist Kraft geteilt durch Fläche, lernt man in der Schule. Das klingt einfach und macht plausibel, dass in der Mechanik der Flüssigkeiten der Druck als zentrale Größe gilt. In Wirklichkeit ist es nicht ganz so einfach. Es handelt sich um den (skalaren) Quotienten aus dem Vektor Kraft und dem Vektor, der die Fläche beschreibt (und auf ihr rechtwinklig steht); beide Vektoren müssen in dieselbe Richtung weisen. Um die eigentlich triviale Tatsache zu zeigen, dass dieser Skalar »nach allen Richtungen« gleich ist, werden sogar spezielle Geräte angeboten.

Nehmen wir stattdessen einen viel bequemeren Begriff, der seine Nützlichkeit schon »im Trockenem«, nämlich beim Studium von Waagen, bewiesen hat: die Energie (Physikalische Unterhaltungen, Oktober 2004). Dabei lassen wir den Beitrag der Kapillarität zur Energie außer Acht, füllen also unsere Flüssigkeit nicht in sehr enge Röhrchen. Verformungsenergien sollen ebenfalls keine Rolle spielen, denn Flüssigkeiten sind nahezu inkompressibel. (Eine Flüssigkeit nimmt zwar durch Druck kaum an Volumen ab; aber nur durch diese minimale Kompression setzt sich – über Stöße zwischen den Molekülen – auf Kolbendruck am einen Ende des Zylinders das Wasser am anderen Ende in Bewegung. Gleichwohl ist in der Energiebilanz die Verformungsenergie vernachlässigbar.)

**Als Modell für ein Schiff** auf einem See diene ein Stück Holz in einem wassergefüllten Becher. Wie wandert der gemeinsame Schwerpunkt von Schiff und Wasser, wenn das Schiff von einem Riesen – oder im Modell von Ihnen – tiefer eingetaucht oder angehoben wird? Die

einzelnen Schwerpunkte gehen verschiedene Wege, aber ob sich das ausgleicht?

Die einzige Energie, auf die es hier ankommt, ist die potenzielle Energie im homogenen Schwerfeld; die ist proportional der Höhe des Schwerpunkts (über einer willkürlichen Nulllinie). Da zum stabilen Gleichgewicht ein lokales Minimum der potenziellen Energie gehört, muss die tiefste Lage des Schwerpunkts beim normal schwimmenden Schiff vorliegen, denn in diese Lage kehrt es nach dem Eingriff des Riesen so oder so zurück. Einerlei ob der das Schiff tiefer tunkt oder anhebt, der Schwerpunkt des Gesamtsystems erhöht sich.

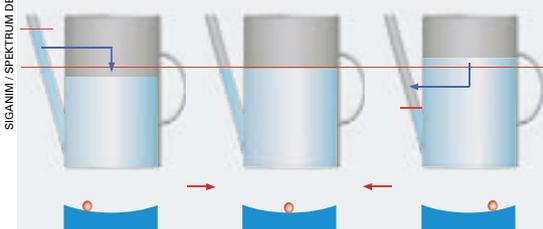
Das wird noch deutlicher, wenn man ein U-Rohr betrachtet. Seine Schenkel dürfen verschieden weit und unregelmäßig geformt sein – nur nicht zu eng, damit die Kapillarität vernachlässigbar ist. Der Schwerpunkt der Flüssigkeit liegt genau dann am tiefsten, wenn die »Spiegel«, das heißt die Grenzflächen zur Atmosphäre, in beiden Schenkeln gleich hoch sind. Denn für jede Änderung aus diesem Zustand heraus müsste *per saldo* ein Teil der Flüssigkeit von einem tieferen zu einem höheren Niveau verlagert werden, was den Schwerpunkt anheben würde. Das klärt auch, warum das Wasser in beiden Teilen einer Gießkanne (oder sonst in »kommunizierenden Gefäßen«) gleich hoch steht (Bild rechts).

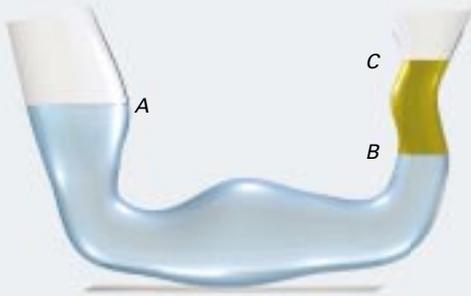
Wenn das Wasser im U-Rohr schwappt, wandert der Schwerpunkt der ganzen Flüssigkeit exakt auf einer nach oben offenen Parabel (2. Grades), wenn die Schenkel zylindrisch und senkrecht, aber nicht notwendigerweise gleich dick sind. Zum Minimum im Scheitel der Parabel gehört das Gleichgewicht mit beiden Oberflächen in einer gemeinsamen horizontalen Ebene.

**Dichtemessungen:** Auf einer Seite des U-Rohrs werde eine leichtere Flüssigkeit hinzugegeben, die sich mit der anderen nicht mischt. Welche Gleichgewichtskonfiguration stellt sich ein? Hier hilft es, sich die Materie so vorzustellen wie Isaac Newton: Die kleinsten Teilchen sind alle gleich schwer (also müsste man heute am ehesten an Nukleonen denken), sie sind nur mit größeren oder kleineren Zwischenräumen gepackt. Wenn ein Glas mit Bier und Schaum darüber auf der Waage steht, kann der Schaum zerfallen. Dabei sortiert sich das Gemisch aus Gas und Bier (also der Schaum) vertikal, sodass nachher das Gas ganz über der Flüssigkeit ist. Die *quantitas materiae* (wir sagen heute Masse) hat sich nicht geändert, die Waage schlägt nicht aus, der Schaum ist sozusagen mit Luft verdünntes Bier; aber auch Eis ist – aufgespreizt durch die Brückenbindungen – mit etwas mehr Vakuum verdünntes Wasser.

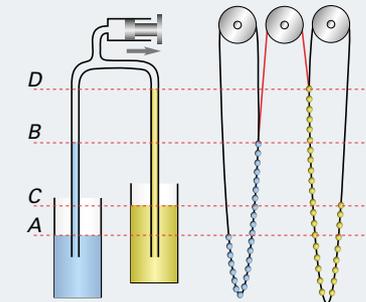
Öl ist hinsichtlich des Schwerfelds so etwas wie (zum Beispiel) auf das 1,25-fache Volumen verdünntes Wasser. Wenn eine Ölschicht von 1 cm Höhe in einem Schenkel ist, sollte der andere Schenkel mit Wasser 8 mm über der unteren Grenze, also 2 mm unter der oberen des Öls gefüllt ein. Denn eine infinitesimal kleine Verlagerung des Öls um ein Volu-

Stabiles Gleichgewicht und Ungleichgewichte der Gießkanne mit Analogie





Wenn sich die Flüssigkeiten um ein sehr kleines Volumen  $dV$  nach rechts verschieben, wandert ein Volumen  $dV$  der blauen Flüssigkeit abwärts von Höhe A nach B und ein gleiches Volumen der gelben aufwärts von B nach C. Verhalten sich die Dichten wie die Höhendifferenzen, besteht (stabiles) Gleichgewicht.



Dichtemessung nach Watt, Variante mit verkleinertem Luftvolumen: Das Verhältnis der Dichten von gelber und blauer Flüssigkeit ist  $(B-A):(D-C)$ . In der Analogie mit Ketten anstelle der Flüssigkeiten (rechts) tritt an die Stelle der Dichte die Masse pro Längeneinheit.

SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

men  $dV$  nach oben entspricht dem Hochpumpen von  $dV$  Öl um 1 cm und gleichzeitig dem Absenken des gleichen Volumens Wasser um 8 mm (Bild oben, links). Die potenzielle Energie (und die Höhe des gemeinsamen Schwerpunkts) als Funktion der Pegeländerung haben hier also eine Horizontalstelle, und zwar ein Minimum, wie man beim Betrachten größerer Verschiebungen sieht.

So kann man mit dem U-Rohr (das ziemlich unregelmäßig geformt sein darf) Dichteverhältnisse sehr einfach bestimmen, wenn die Flüssigkeiten sich nicht mischen. Geht das auch, ohne dass man etwas von beiden aus ihren Flaschen ausgießt?

Nach James Watt nimmt man dafür ein umgekehrtes U-Rohr, in das man mit einer absperribaren Verzweigung einen kleinen Überdruck pusten muss. Bei ungiftigen Flüssigkeiten oder entsprechenden Vorsichtsmaßnahmen darf es auch ein Unterdruck sein, wobei die nutzbare Höhe des Rohrs dann kaum noch begrenzt ist. Etwas aufwändiger ist eine kleine Arztspritze zur Verlagerung des eingeschlossenen Luftvolumens. Dieses »Stück Luft« wirkt dabei wie ein verschiebbares, nahezu invariables Volumen fast ohne Masse.

Alternativ kann man die eingetauchten Röhrchen nach oben offen lassen, dafür aber die Lufträume über beiden Flüssigkeitsspiegeln in den Flaschen durch einen Schlauch miteinander verbinden und gegen die Außenluft abdichten. Das ist die Watt'sche Anordnung unter Vertauschung von Innen- und Außenbereich.

Wenn es Sie stört, dass wir nun doch den Druckbegriff im Spiel haben: Man könnte im Gedankenversuch irgendeine Flüssigkeit nehmen, die fast masselos ist

und etwas mehr – oder etwas weniger – Volumen hat, als im Schlauch sonst zwischen den Spiegeln frei wäre. Im stabilen Gleichgewicht steht nun an beiden Enden des U-Rohrs die jeweilige Flüssigkeit innen tiefer – im zweiten Fall höher – als außen. Das Verhältnis dieser Differenzen ist der Kehrwert des Dichteverhältnisses (Bild oben, rechts).

Wenn unsere eingeschlossene Luft – die wir als inkompressibel ansehen dürfen, obwohl niemand das allgemein als Eigenschaft der Luft bezeichnen würde – um ein infinitesimales Volumen  $dV$  verschoben würde, dann würde an beiden Enden die Flüssigkeitsmenge  $dV$  um die jeweils dazugehörige Höhendifferenz nach oben beziehungsweise unten verlagert. Wenn das zusammen energetisch neutral sein soll (Horizontalstelle der potenziellen Energie), müssen sich die Höhendifferenzen umgekehrt wie die Dichten verhalten.

Kaum zu glauben: Die beiden Schenkel des Röhrchens müssen nicht gleich weit sein, nicht einmal zylindrisch, es kommt nur auf das Verhältnis der beiden Höhendifferenzen an, denn zum Volumen  $dV$  gehören verschwindend kleine Höhen, und was in die »Rechnung« eingeht, sind nicht diese Höhen, sondern die gedachten Höhenwanderungen, also die Höhenunterschiede zwischen den Stellen, wo das Volumen weggenommen und wo es zugefügt wird.

Das Bild rechts daneben zeigt eine Analogie mit Ketten und masselosen, undehnbaren Fäden an reibungslosen Rollen. Für sich genommen ist jede Kette im Gleichgewicht, wenn beide Enden ihres massebehafteten Teils gleich hoch hängen. Der rote Faden erzwingt, dass die beiden inneren Enden höher liegen, lässt aber wegen der mittleren Rolle frei,

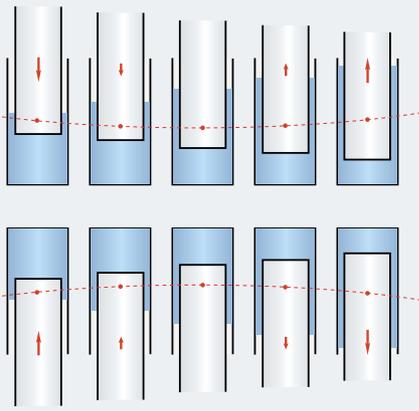
wie sich diese Anhebung auf beide Ketten verteilt. Dieses Verhältnis wird durch das Verhältnis der längenbezogenen Massen der Ketten bestimmt.

Eine infinitesimale Änderung würde alle vier Niveaus A, B, C und D um die gleiche kleine Differenz  $dh$  nach oben beziehungsweise unten ändern. Das entspricht per saldo einer Wanderung eines Kettenstückes der Länge  $dh$  von A nach B und eines gleich langen – eher gleich kurzen – Stückes der anderen Kette von D nach C. Im Gleichgewicht ist das energetisch neutral, wenn sich  $B-A$  und  $D-C$  umgekehrt wie die längenbezogenen Massen verhalten.

Wer glaubt, man müsse die Hydrostatik unbedingt überall mit Drücken diskutieren, müsste sich hier um die Abhängigkeit der Fadenspannung von der Höhe Gedanken machen. Einfacher geht es in beiden Fällen mit der Energie, die obendrein im Gegensatz zum Druck keine spezielle Größe für die Hydrostatik ist, sondern bei allen Gleichgewichten in der ganzen Physik die gleiche Rolle spielt.

Trotzdem ist die Analogie nicht ohne Tücken. Bei den Ketten spielen die Gewichte entscheidende Rollen, bei den Flüssigkeiten aber die Dichten. Man pflegt von Flüssigkeitssäulen (statt Flüssigkeitsschichten) zu sprechen und erklärt damit stillschweigend den Fall gleicher Querschnitte zum Normalfall. Und schon ist man genötigt, über das »hydrostatische Paradoxon« zu staunen, das nichts weiter besagt, als dass es – auch für den Druck – nicht wirklich auf das Gewicht von Säulen ankommt, sondern auf das Integral der Dichte nach der vertikalen Koordinate, völlig unabhängig vom waagerechten Querschnitt. Was aber in allen Fällen entscheidet, ist die Energieänderung bei einer infinitesimalen (»virtuellen«) Verlagerung von gleich kleinen infinitesimalen Volumen-(Längen-)Stückchen um große – und messbare – Höhendifferenzen.

**Wieso spritzt in Herons Brunnen** das Wasser höher als über jede Füllhöhe in dem System? Man kann sagen: Mit Überdruck, der mit dem leichten Medium Luft auch nahezu unvermindert zwischen verschiedenen Höhen »übertragen« werden kann, wird Wasser aus dem oberen Topf gespritzt (Bild rechts oben). Man kann aber auch sagen: Wenn man das Ausgussrohr einer vollen Gießkanne ▷



◀ Schiff (inneres Röhren) im See in verschiedenen Startpositionen vor dem Umdrehen (oben) und danach. Die Pfeile zeigen an, in welche Richtung der gemeinsame Schwerpunkt jeweils wandern wird.

▶ Herons Brunnen; das eingesperrte nahezu konstante Luftvolumen ist grau gezeichnet.



▷ weit unten abschneidet, spritzt das Wasser nach oben heraus. Auf Herons Brunnen angewandt: In einem längeren Röhren an der Stelle des Spritzröhrens (das im Bild rechts oben nur zur Erläuterung eingezeichnet ist) muss im Gleichgewicht der Niveauunterschied zwischen den »linken« Wasserspiegeln so groß sein wie zwischen den »rechten«. Da das rechte Röhren aber in Wirklichkeit zu kurz ist, spritzt dort das Wasser heraus.

Man ersetze in Gedanken die Ölschicht aus der ersten Anordnung zur Dichtemessung (diesmal mit zylindrischen Röhren) durch ein festes Objekt gleicher Dichte, zum Beispiel einen reibungsfreien Stöpsel definierter Masse, der fast den ganzen Querschnitt ausfüllt. Am stabilen Gleichgewicht ändert sich dadurch nichts. Dann kann man aber auch gleich auf die zwei Schenkel des U-Rohrs verzichten und den Stöpsel einfach wie ein Schiff schwimmen lassen – kentern darf er natürlich nicht.

### Vom U-Rohr zum umgekehrten Schiff:

Als Nächstes wählen wir als Schiff und als See zwei zylindrische Röhren (zum Beispiel aus einer Glas-Spardose für Münzen) mit etwas verschiedenen Durchmessern. Dass die Kapillarität die Sache ungenau macht, ändert nichts am stabilen Gleichgewicht: Tunken wir das innere Röhren tiefer und lassen los, kommt es zurück, aber auch, wenn wir es etwas anheben und dann loslassen.

Gibt es auch labile Gleichgewichte? Dazu halten wir beiden Röhren im leicht eingetunkten Zustand fest, drehen sie schnell auf den Kopf und lassen sofort das innere Röhren los. Anschließend läuft zwar das Wasser aus, aber wir können noch beobachten, wie das innere Röhren (»Schiff«) aufsteigt. Wenn wir denselben Versuch mit dem etwas angehobenen statt eingetunkten Schiff machen, fällt es sogleich heraus, was erheb-

lich weniger überraschend ist. Des Rätsels Lösung: Durch die Umkehrung des Schwerfelds relativ zum System ist aus dem lokalen Minimum der Energie ein Maximum geworden, aus dem stabilen also ein labiles Gleichgewicht.

### Quizfragen

▶ *Der Schlüssel im Boot auf dem See:* Aus einem schwimmenden Boot wird ein Schlüssel ins Wasser geworfen. Steigt oder sinkt der Wasserstand dieses Sees dadurch? Bitte erst raten, dann Modellversuch mit Gefäßen aus Küche oder Hausbar machen, dann weiterlesen! Unter Wasser verdrängt der Schlüssel sein eigenes Volumen, im Boot aber entspricht sein Gewicht dem Zufügen von einer gleich schweren Menge Wasser. Wenn Sie gesagt haben »Viel kann es jedenfalls nicht sein«, so haben Sie natürlich Recht, aber man kann ja für konkrete Seen und Schlüssel die Anzahl der Atomlagen abschätzen. Sollte der Schlüssel eine kleinere Dichte als das Wasser haben, so muss man unterscheiden, ob er nach dem Hinauswerfen schwimmen kann (für den Wasserstand neutral!) oder ob er von einem Taucher unter Wasser festgemacht wird.

▶ *Schräg stehende Flasche:* Wenn man eine teilweise gefüllte Flasche etwas schräg stellt, wird der Schwerpunkt dabei angehoben. Wird er mehr gehoben, wenn der Inhalt flüssig oder wenn er eingefroren ist, die Oberfläche also waagrecht bleibt oder gedreht wird (die Dichte sei nicht verschieden)? Die Antwort ist sehr einfach: Wenn der gefrorene Inhalt bei der schräg gestellten Flasche schmilzt und die Oberfläche sich waagrecht einstellt, kann der Schwerpunkt dabei jedenfalls nicht steigen, und wenn er gleich hoch bliebe, gäbe es auch keinen Grund zur Veränderung der Gestalt.

▶ *Der Schwerpunkt im Trinkgefäß:* Martin Gardner, der legendäre Autor der

»Mathematischen Spielereien«, fragte im April 1972 in unserer Mutterzeitschrift Scientific American, an welcher Stelle der gemeinsame Schwerpunkt von Gefäß und Inhalt durch seine minimale Höhe wandert, wenn man eine zunächst leere Bierdose allmählich voll gießt. Im darauf folgenden Heft beschrieb er ein Gedankenexperiment mit eingefrorenem Bier in einer seitwärts auf einem Messer balancierten Dose und gelangte damit zu einem bemerkenswerten Zwischenergebnis: Der Schwerpunkt wandert genau dann durch seinen tiefsten Punkt, wenn er im Flüssigkeitsspiegel liegt.

Die Erklärung ist eigentlich auch ohne das Gedankenexperiment umwerfend einfach: Solange man Flüssigkeit zugibt, die unter dem augenblicklichen Schwerpunkt »landet«, steigt dieser ab, im umgekehrten Fall auf. Dabei muss keine Voraussetzung über Form oder Gewichtsverteilung des Gefäßes gemacht werden, außer dass der Schwerpunkt des leeren Gefäßes überhaupt für die Flüssigkeit erreichbar ist. Man kann sich also für den äußerst eleganten Beweis der Koinzidenzaussage völlig von der umweltfeindlichen Dose frei machen. ◀



**Norbert Treitz** ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie anschauliche Erklärungen dazu nutzt er nicht nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hochbegabter Kinder und Jugendlicher.

Nüsse & Rosinen. Von Norbert Treitz. CD mit Buch. Harri Deutsch, Frankfurt (Main), in Vorbereitung

Brücke zur Physik. Von Norbert Treitz. 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 2003

Spiele mit Physik! Von Norbert Treitz. 4. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1996