

Ich würde sagen: Schon aus touristischen Gründen sollte man sich einen Besuch in einem höheren $\mathbb{R}^n$ nicht entgehen lassen. Es gibt dort einfach unglaubliche Dinge, die einem zu Hause im $\mathbb{R}^3$ nicht im Traum in den Sinn gekommen wären. Für die professionellen Mathematiker gehört das Arbeiten mit abstrakten Vektoren, die mehr als drei Komponenten haben, ohnehin zum Alltagsgeschäft.

Von n -Eck-Puzzles zu Penrose-Parkettierungen

Manchmal verschafft einem der Ausflug in die höheren Dimensionen sogar Einsichten über Zweidimensionales, die man dortselbst beim besten Willen nicht gewinnen kann. Man nehme nicht nur einen Fünferwürfel, sondern deren beliebig viele. Wie ihre mickrigen Kollegen aus dem $\mathbb{R}^3$ lassen sie sich raumfüllend und lückenlos zu beliebig ausgedehnten Türmen stapeln. Im $\mathbb{R}^5$ ist, wie nicht anders zu erwarten, der Verbrauch an Bauklötzen höher, denn jeder Würfel hat wesentlich mehr als sechs Nachbarn, die mit ihm zumindest eine Fläche gemeinsam haben.

Das Projektionsbild eines solchen Würfelstapels besteht aus Zehneckern, die sich teilweise überlappen; denn in der von uns gewählten schrägen Perspektive sind die Würfel nicht säuberlich getrennt. Es kommen aber nach wie vor nur die gewohnten dicken und dünnen Rauten vor. Wir gewinnen also eine Pflasterung, das heißt eine lückenlose, überlappungsfreie Überdeckung der Ebene mit dicken und dünnen Rauten. Je nachdem, wie wir unseren Stapel im $\mathbb{R}^5$ bauen, hat diese Pflasterung sehr interessante Eigenschaften. So lassen sich insbesondere die berühmten Penrose-Parkettierungen mitsamt ihren Quasi-kristall-Eigenschaften aus einer geschickt gewählten Würfelstapelung im $\mathbb{R}^5$ herleiten (Bild links; siehe auch Spektrum der Wissenschaft 2/2002, S. 64). ◁



Christoph Pöppe ist promovierter Mathematiker und Redakteur bei Spektrum der Wissenschaft.

Von Penrose-Parkettierungen zu n -Eck-Puzzles. Von Heinz Klaus

Strick in: Praxis der Mathematik, Bd. 44, Nr. 3, S. 105, 2002

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.

PREISRÄTSEL

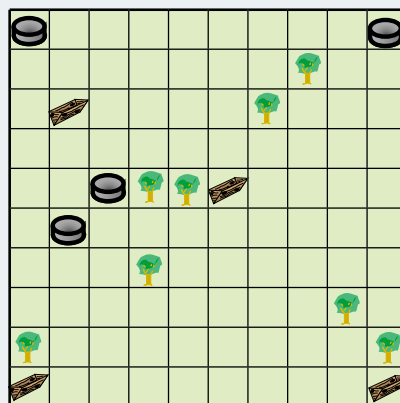
Jans zerstrittene Herde

Von Roland Mildner

Bauer Jan möchte seinen vier zerstrittenen Milchkühen vier getrennte, aber in sich zusammenhängende und zueinander kongruente Weideflächen abstecken. Dabei möchte er die Zäune ausschließlich auf den vorgegebenen Linien ziehen. Auf jeder Weide sollen ein Brunnen, zwei Bäume zum Reiben und ein Trog mit Kraftfutter stehen.

Wie kann Jan die Weide für seine zerstrittene Herde einteilen?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 104840, D-69038 Heidelberg.



Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir einen Globus »Globus 4 Kids«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 15. Februar 2005, eingehen.

Lösung zu »Kindergeburtstag« (Dezember 2004)

Die zehn möglichen Kombinationen der Kuchenstücke sind in der Tabelle unten eingetragen.

A	1	4	8	3	12	7	2	11	6	1
B	1	3	2	6	1	5	9	4	8	12
C	12	8	6	6	4	4	4	2	2	2

Heinrich Biener aus Weilheim zeigte, wie sich dieses Problem auch »zu Fuß«, das heißt ohne Einsatz eines Computerprogramms lösen lässt:

a , b und c sind die Stückzahlen der Kuchensorten A (zum Preis von 0,80 Euro), B (1,– Euro) und C (1,10 Euro). Aus der Bedingung, dass die Gesamtsumme genau 15 Euro betragen muss, ergibt sich die Gleichung

$$0,8a + 1b + 1,1c = 15,$$

die durch Multiplikation mit 10 in die folgende diophantische Gleichung (nicht nur die Konstanten, auch die Lösungen müssen ganze Zahlen sein) übergeht:

$$8a + 10b + 11c = 150$$

Man ziehe auf beiden Seiten der Gleichung 11 c ab und dividiere durch 2:

$$4a + 5b = (150 - 11c) / 2$$

Aus dieser Gleichung lassen sich zwei Dinge schließen:

► Da a und b mindestens 1 sind, ist

$$9 \leq (150 - 11c) / 2 \text{ und damit } c \leq 12.$$

► Da $4a + 5b$ eine natürliche Zahl ist, muss $150 - 11c$ gerade sein und folglich auch c .

Für c kommen deshalb nur 2, 4, 6, 8, 10 und 12 in Frage. Für jeden dieser Werte gewinnt man aus der obigen Gleichung die möglichen Werte für a und b .

Beispiel: Für $c = 2$ folgt $4a + 5b = 9$ und daraus sofort $a = 1$ sowie $b = 1$.

Die anderen Lösungen findet man analog hierzu rasch durch Ausprobieren.

Die Gewinner der drei CDs mit Soundtrack zum Film »Genesis« sind Renate Stürmer, Zweibrücken; Berthold Hajen, Boppard; und Roland Jung, Bischofsheim.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal [wissenschaft-online](http://www.wissenschaft-online.de) (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.