

Schritt für Schritt

Ein altes Papier-und-Bleistift-Autorennen zeigt auf, warum Physik die großartigste Form der verlustfreien Datenreduktion ist.

Von Norbert Treitz

Wie geht die Folge 1 4 10 19 31 ... weiter? Eine relativ nahe liegende – aber keineswegs die einzig richtige – Möglichkeit besteht darin, sie als arithmetische Folge zweiter Ordnung aufzufassen. Das ist eine Folge, deren Differenzenfolge – die Folge der Differenzen benachbarter Folgenglieder – eine gewöhnliche arithmetische Folge ist, in unserem Fall 3 6 9 12 ... Gewöhnliche arithmetische Folgen heißen in diesem Kontext auch »von erster Ordnung«. Das nächste Glied unserer Folge ist demnach 46.

Bilden wir umgekehrt zur Folge der natürlichen Zahlen 0 1 2 3 ... die Summenfolge, so finden wir eine arithmetische Folge zweiter Ordnung. Es ist die Folge der Dreieckszahlen 0 1 3 6 10 15 21 ... mit der allgemeinen Form $n(n+1)/2$, was »im Wesentlichen« quadratisch ansteigt, wie auch die Fläche des Dreiecks, das entsteht, wenn man 1, 3, 6, ... Spielsteine zeilenweise untereinander schön gleichmäßig auslegt. (Man beachte: Ein Glied einer Summenfolge ist nicht die Summe zweier benachbarter Glieder, sondern die Summe aller bisherigen Glieder der Ursprungsfolge!)

Man kann das zu höheren Ordnungen fortsetzen. Aus den Dreieckszahlen werden durch Bildung der Summenfolge die Tetraederzahlen 0 1 4 10 20 35 ..., die »im Wesentlichen« wie n^3 gegen unendlich gehen. Im Pascal'schen Dreieck findet man diese Folgen parallel zu den seitlichen Rändern: ganz außen die nullte Ordnung 1 1 1 1 ..., dann die erste mit 1 2 3 4 ... und so weiter.

Arithmetische Folgen zweiter Ordnung machen sich nützlich bei Problemen wie dem folgenden. Erreichen Sie mit möglichst wenigen ganzzahligen Summanden, deren erster und letzter den Wert 1 haben, die Summe 100, und zwar so, dass jeder Summand sich von seinem Vorgänger maximal um 1 unterscheidet. Die Lösung ist: 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 mit den Zwischensummen 0 1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 64 72 79 85 90 94 97 99 100.

Das hat eine große Ähnlichkeit mit dem Problem, so schnell wie möglich von einer Kreuzung bis zur nächsten roten Ampel oder von einer U-Bahn-Haltestelle zur nächsten zu fahren, wenn – nicht ganz realistisch – die Beschleunigung nach vorne und nach hinten den gleichen maximalen Betrag haben kann. Die Lösung ist, bis zur Mitte Vollgas zu geben und auf der zweiten Hälfte mit voller Kraft auf die Bremse zu steigen.

Das ist weder besonders ökologisch noch ökonomisch, aber dafür ziemlich übersichtlich. Das arithmetische Problem ist die »Diskretisierung« des Verkehrsproblems. Die Geschwindigkeit ändert sich nicht mehr stetig mit der Zeit, sondern ist über kleine Zeitabschnitte – sagen wir Sekunden – hinweg konstant und ändert sich schlagartig von Sekunde zu Sekunde. Unsere Summanden sind die in jeder Sekunde zurückgelegten Werte. In einem diskretisierten Auto würde man jede Sekunde einen heftigen Schlag in den Rücken beziehungsweise den Bauch verspüren. Aber mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung und entsprechend kürzerer Zeiteinheit steigen der Fahrkomfort und die Realitätsnähe. Die Rechnerei wird zwar mehr, bleibt aber im Prinzip so einfach wie im obigen Beispiel.

Ein Brettspiel: Diskretisierung lässt sich auch auf zwei Raumdimensionen anwenden, zum Beispiel auf das elementarste Problem des Straßenverkehrs: Wie mache ich es, dass der Krümmungsradius meiner Fahrt nicht größer ist als derjenige der Straße? Oder in üblicher irreführender Formulierung: Wie vermeide ich es, dass ich – von wem eigentlich? – aus der Kurve getragen werde? Die Antwort ist bekanntlich: hinreichend langsam fahren, vor allem, wenn die Kurve eng und/oder die Straße glatt ist.

Für die diskrete Version brauchen wir nur kariertes Papier und einen Bleistift. Zuerst wird die Bahn begrenzt, indem Ketten von Kästchen als Hecken und damit für die Autos verboten markiert werden. Übrig bleibt ein Labyrinth von Straßen, die mehrere Kästchen breit sind und einige Kurven haben. Start

(-Kästchen) und Ziel(-Linie) werden besonders markiert (Bild rechts unten).

Die wesentliche Spielregel ist nun: Das »Auto« fährt in einem Spielzug m Schritte nach Osten und n nach Norden. m und n sind dabei ganze Zahlen, die positiv oder (für west- und südwärts gerichtete Bewegungen) negativ sein dürfen; sie können von einem Spielzug zum nächsten um höchstens 1 zu- oder abnehmen oder auch gleich bleiben, und zwar m und n unabhängig voneinander. Beim Start sind beide 0, das Ziel darf ohne vorherige Bremsung durchlaufen werden. Die Hecken dürfen nicht befahren und auch nicht übersprungen werden. Wer ein verbotenes Kästchen trifft, muss an den Start zurück und mit $m = n = 0$ neu anfangen (ganz ohne Krankenhausaufenthalt dazwischen; eine Begegnung mit der Hecke geht also ziemlich glimpflich ab).

Ziel des Spiels ist es, mit möglichst wenig Zügen das Ziel zu überqueren. Dazu können die Spieler ihre Autos auf einem gemeinsamen Blatt laufen lassen oder auf einzelnen Kopien derselben Rennbahn. Auf einem Kästchen dürfen mehrere Autos zugleich stehen (sie sind sozusagen punktförmig und klein im Vergleich zum Kästchen). Andere Regeln würden das Spiel zu sehr in eine Variante von »Mensch ärgere dich nicht« ausarten lassen und von der simulierten Kinematik ablenken.

Man merkt sehr bald, dass man durch enge Kurven mit hinreichend kurzen Zügen laufen muss. Ganz vorsichtige Menschen bleiben sogar in jeder Kurve stehen. Man kann aber auch lernen, in zwei Dimensionen fast getrennt zu planen.

Die physikalische Interpretation der Spielregeln ist nahe liegend: Die Schrittzahlen m und n sind die beiden Komponenten des Geschwindigkeitsvektors. Dass man sie in jedem Zeitschritt nur um eine Einheit ändern kann, entspricht den begrenzten Beschleunigungs- und Bremsmöglichkeiten. Im Gegensatz zu einem echten Auto, dessen Fahrverhalten von

Ein gelungener Lauf durch die diskretisierte Autorennbahn. Die zu den neun Beschleunigungsmöglichkeiten gehörenden Tasten des Ziffernblocks sind in rot bei jeder Position des Autos eingetragen; sie und die Farben der Kreise zeigen die Beschleunigungsrichtungen an.

den Himmelsrichtungen unabhängig ist, hat allerdings das simulierte Auto in den diagonalen Richtungen etwas größere Freiheiten.

Für den diskretisierten Autofahrer empfiehlt es sich ebenso wie für den echten, in einer Kurve zur Innenseite dieser Kurve hin zu beschleunigen, ohne unbedingt zum Stillstand zu kommen. Zugfolgen mit konstanter Beschleunigung sehen wie Parabeln aus; eine extrem schmale Parabel kann zu einem – hin und zurück durchlaufenen – geraden Strich entarten.

Nahe verwandt mit unserem Papier-spiel hinsichtlich der Koordinaten-Aufspaltung ist ein als Geduldsspielzeug erhältliches Holzlabyrinth, bei dem man eine Kugel an vielen Löchern vorbei in ein Ziel bugsieren soll, indem man die Ebene, auf der sie rollt, durch zwei getrennte Stellrädchen – in der Luxusversion sogar mit Untersetzungen – um zwei zueinander rechtwinklige horizontale Achsen kippt. Profaner, aber für die Vorführung im großen Hörsaal geeigneter ist eine Glasplatte mit Schaumstoffpolstern

auf der Unterseite, die auf dem Overheadprojektor liegt: Durch Drücken auf eine der vier Seiten setzt sich die Kugel auf der Platte in Bewegung, und es kommt darauf an, sie nicht gegen eine der auf die Platte geklebten »Hecken« prallen zu lassen. In beiden Fällen bleibt allerdings die Zeit »analog«, das heißt ohne erzwungenen Takt.

Spielprotokolle und Datenreduktion:

In unserem Papier-und-Bleistift-Spiel kann jedes Augenblicksbild durch ein Koordinatenpaar (x, y) beschrieben werden. Die x und die y bilden stückweise, nämlich jeweils so lange, wie die Beschleunigung konstant bleibt, arithmetische Folgen zweiter Ordnung. Durch die entsprechenden Punkte kann man Parabeln – oder im Entartungsfall gerade Striche – legen.

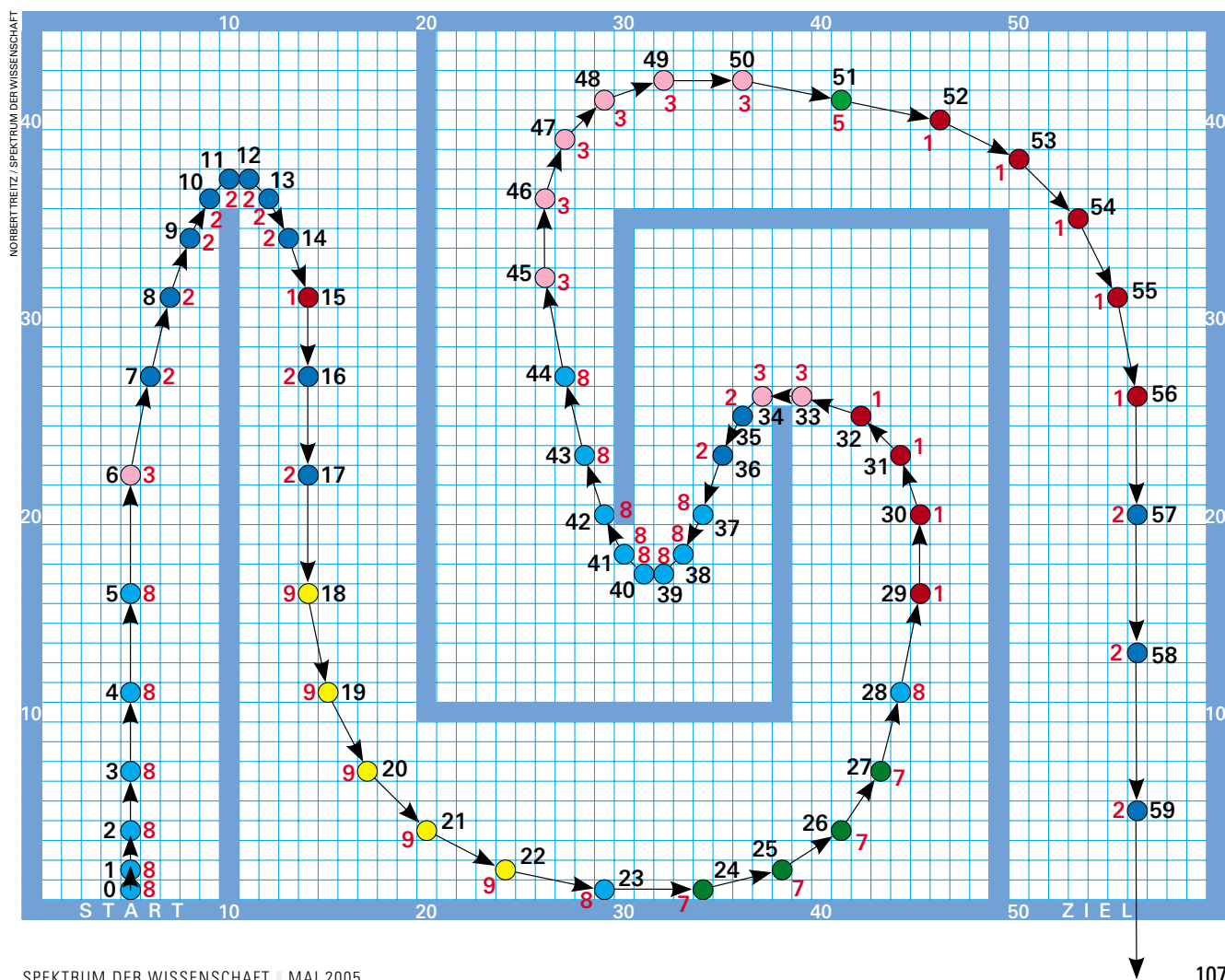
Wenn das Spielfeld a Spalten und b Zeilen von Kästchen hat, so ist der Dateninhalt (der »Informationsgehalt«) eines solchen Bildes gleich $\log(a) + \log(b)$. Die Basis der verwendeten Logarithmen

ist beliebig, bestimmt aber die Maßeinheit, in der die Datenmenge anzugeben ist. Bei Zehnerlogarithmen ist es »Anzahl der Dezimalziffern«: Auf einem Spielfeld der Breite 1000 und der Höhe 1000 braucht man $\log_{10}(1000) = 3$ Dezimalziffern, um jede Koordinate darzustellen, insgesamt also sechs Ziffern für die gegenwärtige Position des Autos. Um ein Spiel mit 100 Zügen vollständig wiederzugeben, braucht man insgesamt 600 Dezimalziffern.

Computerfachleute rechnen lieber mit der Basis 2 statt 10. Die zugehörige Maßeinheit für die Datenmenge ist das Bit (*binary digit* oder auch Binärziffer).

Bei dieser Berechnung haben wir noch nicht berücksichtigt, dass unser Auto so beschleunigungsarm fährt, wie es die Spielregeln vorschreiben. Die Datenmenge wäre bei einem kreuz und quer über das Feld springenden Auto die gleiche. Kann man das Spielprotokoll vereinfachen?

Die Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Positionen ist die (als Vek- ▷



t	x	v_x	a_x	y	v_y	a_y	Taste
0	5	0	0	1	1	1	8
1	5	0	0	2	2	1	8
2	5	0	0	4	3	1	8
3	5	0	0	7	4	1	8
4	5	0	0	11	5	1	8
5	5	0	0	16	6	1	8
6	5	1	1	22	5	-1	3
7	6	1	0	27	4	-1	2
8	7	1	0	31	3	-1	2
9	8	1	0	34	2	-1	2
10	9	1	0	36	1	-1	2
11	10	1	0	37	0	-1	2
12	11	1	0	37	-1	-1	2
13	12	1	0	36	-2	-1	2
14	13	1	0	34	-3	-1	2
15	14	0	-1	31	-4	-1	1
16	14	0	0	27	-5	-1	2
17	14	0	0	22	-6	-1	2
18	14	1	1	16	-5	1	9
19	15	2	1	11	-4	1	9
20	17	3	1	7	-3	1	9
21	20	4	1	4	-2	1	9
22	24	5	1	2	-1	1	9
23	29	5	0	1	0	1	8
24	34	4	-1	1	1	1	7
25	38	3	-1	2	2	1	7
26	41	2	-1	4	3	1	7
27	43	1	-1	7	4	1	7
28	44	1	0	11	5	1	8
29	45	0	-1	16	4	-1	1
30	45	-1	-1	20	3	-1	1
31	44	-2	-1	23	2	-1	1
32	42	-3	-1	25	1	-1	1
33	39	-2	1	26	0	-1	3
34	37	-1	1	26	-1	-1	3
35	36	-1	0	25	-2	-1	2
36	35	-1	0	23	-3	-1	2
37	34	-1	0	20	-2	1	8
38	33	-1	0	18	-1	1	8
39	32	-1	0	17	0	1	8
40	31	-1	0	17	1	1	8
41	30	-1	0	18	2	1	8
42	29	-1	0	20	3	1	8
43	28	-1	0	23	4	1	8
44	27	-1	0	27	5	1	8
45	26	0	1	32	4	-1	3
46	26	1	1	36	3	-1	3
47	27	2	1	39	2	-1	3
48	29	3	1	41	1	-1	3
49	32	4	1	42	0	-1	3
50	36	5	1	42	-1	-1	3
51	41	5	0	41	-1	0	5
52	46	4	-1	40	-2	-1	1
53	50	3	-1	38	-3	-1	1
54	53	2	-1	35	-4	-1	1
55	55	1	-1	31	-5	-1	1
56	56	0	-1	26	-6	-1	1
57	56	0	0	20	-7	-1	2
58	56	0	0	13	-8	-1	2
59	56			5			

▷ tor zu verstehende) Geschwindigkeit unseres diskretisierten Autos im entsprechenden Zeitintervall, und die Differenzen dieser Differenzen (die »Differenzenfolge zweiter Ordnung«) entsprechen den Beschleunigungen. Die aber können nach der Spielregel in jeder Komponente nur -1, 0 oder +1 sein und damit pro Spielzug nur einen von neun verschiedenen Werten annehmen. Wir können das ganze Spiel also durch den Anfangsort, die Anfangsgeschwindigkeit und die Beschleunigungsvektoren aller folgenden Züge (diese jeweils durch eine von 9 Ziffern) eindeutig protokollieren, im genannten Zahlenbeispiel also mit 100 Dezimalziffern (eigentlich sogar etwas weniger).

Aus diesem Protokoll kann man den ganzen Spielablauf rekonstruieren. Es sind also keine Daten verloren gegangen; aber die Möglichkeit dieser Datenreduktion funktioniert so wirkungsvoll nur wegen der engen Begrenzung der Beschleunigung. In der Realität heißt das, dass ein Auto in den jeweils nächsten Sekunden nur eine begrenzte Auswahl von Aufenthaltsorten hat (das ist auch als »Trägheitsprinzip« bekannt).

Vom Papier zum Bildschirm: Als ich am Karnevalswochenende 1980 meinen ersten Bildschirm-Computer (mit 8 Kibyte Arbeitsspeicher) kaufte, schrieb ich wenige Tage später ein Autorennspiel, bei dem die im quadratischen Block stehenden neun Zifferntasten den neun Kombinationen aus den diskreten Komponenten -1, 0 und +1 zugeordnet waren. Es ist eins von den Programmen, die auch heute nicht schneller laufen als damals. Statt der Tastatur kann man die Maus oder einen Joystick als Beschleunigungsgeber nutzen und das Simulationsspiel mit den inzwischen erweiterten Rechenmöglichkeiten realistischer gestalten. Dann ist man bald bei den kommerziellen Rennspielen, die einem die Bahn stets aus der Perspektive des Autofahrers zeigen.

Aber das ist nicht mehr das Entscheidende: Wenn Sie einen Computer haben

◀ Vier Formen des Protokolls: die Spielzüge aus dem vorigen Bild als Orte (x, y) des Autos zur jeweiligen Zeit t , als Geschwindigkeiten (v_x, v_y), als Beschleunigungen (a_x, a_y) oder deren Darstellung durch Zifferntasten von 1 bis 9.

und programmieren können, wie man einen Punkt auf eine vorher gewählte Stelle des Bildschirms malt, empfehle ich, zumindest das Papierspiel damit nachzubilden. Die wesentliche Existenzberechtigung der Computersimulation für den Unterricht besteht nicht in der bloßen Nachbildung der Realität (synthetisches Kino), sondern im Aufzeigen der Zusammenhänge mit theoretischen Aussagen (Formeln, Programmanweisungen) und von unsichtbaren Messgrößen, etwa durch mitlaufende Vektorpfeile oder variable Darstellungen von Energiebilanzen parallel zum sichtbaren Ablauf. Die Verwechslung mit der Realität kann nicht der Sinn didaktischer Simulationen sein.

Noch weniger Freiheit: Nun stellen wir uns einen ganz fantasielosen Autofahrer vor, der nach dem (fliegenden) Start nur noch mit konstanter Bosheit nach Süden beschleunigt. Das Protokoll ist nun noch einfacher: Außer den Startwerten enthält es nur die einmalige Angabe der konstanten Beschleunigung. Die Kurve ist dann eine Parabel mit der Öffnung nach Süden. Nennen wir diese Richtung »unten« statt »Süden«, so bekommen wir die Wurfparabel im homogenen Schwerfeld mit der Differenzialgleichung $d^2y/dt^2 = -g$.

Wir können auch kompliziertere Festlegungen treffen, solange diese während des Ablaufs keiner Willkür mehr unterliegen, also vorprogrammierte Bahnen beschreiben. So können wir die Beschleunigung von einer Ortskoordinate oder einem Radiusbetrag abhängig machen und damit eine schwingende Masse an der Schraubenfeder beziehungsweise die Bewegung eines Planeten um die Sonne modellieren. Oder wir machen die Beschleunigung vom Geschwindigkeitsvektor abhängig und beschreiben damit Reibungsphänomene. Damit sind im Prinzip schon die wichtigsten kinematischen Simulationen erfasst.

Zugleich bekommen wir nun einen Blick auf das Wesen der Physik: Wären die Ereignisse der Natur regellos und allesamt »rein zufällig«, so könnten wir zwar für die Nachwelt Protokolle des Geschehens anfertigen, wie es auch die Historiker tun. Dass gewisse Ereignisse sich wiederholen wie die Gezeiten, die Jahreszeiten oder die Zyklen der Sonnen- und Mondfinsternisse, erlaubt bereits eine gewaltige Reduktion der Daten: Alte Kalender lassen sich bezüglich ge-

wisser Merkmale weiterverwenden, und die Protokolle erlauben Vorhersagen, auch weit ab von irgendeinem kausalen Verständnis. Gezeiten-Rechenmaschinen mit Zahnrädern extrapolieren nur vorhandene Messungen und rechnen nicht die komplizierte Hydromechanik der Küstenprofile, und ähnlich mögen die Steine in Stonehenge für die Vorhersage von Finsternissen genutzt worden sein.

Datenreduktion: Findet man darüber hinaus Regeln – die in der Physik meistens als Differenzialgleichungen formuliert sind –, so ersetzen diese zusammen mit den Daten für die Anfangswerte lange Tabellen mit erfassten Daten.

Das hat große Ähnlichkeit mit der Kompression von Bilddateien. Wenn das Bild aus einem feinkörnigen Zufallsmuster besteht, muss es bitweise gespeichert werden. Wiederholungen oder stückweise gleiche Farben erlauben bereits beachtliche Reduktionen ohne Datenverlust. Wenn das Bild aber die japanische Flagge darstellt, so genügt die Angabe des Kreisdurchmessers und der beiden verwen-

ten Farben: Das »Malprogramm« für den Kreis ist wesentlich kürzer als das Protokoll der Millionen Pixel. Ein solches einfaches Malprogramm entspricht hinsichtlich der Datenreduktion einem Naturgesetz in der Physik. Es gehört zu den großartigsten Eigenschaften unseres Gehirns, dass es in gewaltigem Ausmaß Daten im visuellen Bereich und bei der natürlichen (nicht formalisierten) Sprache reduziert.

Die Bezeichnung »Naturgesetz« ist eine Metapher, die auf gesetzestreue Bürger zurückgreift, denn die Natur kann ja nicht gegen ihre Gesetze verstoßen. Allenfalls können wir bei ihrem Auffinden Fehler oder Unvollständigkeiten begehen. Der Vergleich mit den Regeln des Spiels auf dem karierten Papier passt eigentlich besser: Die Natur verhält sich in gewissem Umfang »regelmäßig«, und wir versuchen diese Regeln zu ergründen, wie ein Alien die Regeln eines Fußballspiels (oder ein Europäer die des Baseballs) durch bloßes Zuschauen zu ergründen suchen könnte.

Dass es Physik überhaupt gibt, hat zwei Voraussetzungen: dass die Natur

sich zumindest teilweise regeltreu verhält, und dass unser Gehirn die Fähigkeit hat, zumindest einige solcher Regeln zu erkennen und damit die einlaufenden Daten zu bündeln (reduzieren) und für Vorhersagen zu nutzen. <



Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie anschauliche Erklärungen dazu nutzt er

nicht nur für die Ausbildung von Physiklehrern, sondern auch zur Förderung hoch begabter Jugendlicher.

Nüsse & Rosinen. Von Norbert Treitz. CD mit Buch. Harri Deutsch, Frankfurt (Main), in Vorbereitung

Brücke zur Physik. Von Norbert Treitz. 3. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 2003

Spiele mit Physik! Von Norbert Treitz. 4. Auflage, Harri Deutsch, Frankfurt (Main) 1996

In der Werkstatt der Hirnverwirrer. Von Otto Botsch. Aulis, Köln 1979

AUTOR UND LITERATURHINWEISE

PREISRÄTSEL

Alternatives Wohnen

Von Roland Mildner

Im Zahlenhaus mit seinen 3 · 3 Wohnungen dürfen nur natürliche Zahlen wohnen, die alle voneinander verschieden sind. Außerdem muss das Produkt der Zahlen jeder Zeile und jeder Spalte stets 2010 ergeben (Beispiel rechts). Wie viele verschiedene Möglichkeiten gibt es, das Haus zu beziehen?

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 10 48 40, D-69038 Heidelberg.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir zwei Kugelbahnen »VIA«. Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 17. Mai 2005, eingehen.

1	10	201
134	3	5
15	67	2

Lösung zu »Zahlen gesucht!« (März 2005)

1978 ist die einzige Zahl, welche die Bedingung erfüllt.

Eckart Lassnig aus Wien bezeichnete die vierstellige Zahl mit $abcd$, wobei a die Tausenderstelle ist. Die Angaben aus dem Text setzte er in folgende drei Gleichungen um:

$$(1) \quad b = a + d$$

$$(2) \quad c^2 = b + 5d$$

$$(3) \quad d = a + c$$

Addiert man (1) und (3), so ergibt sich

$$(4) \quad b = 2a + c$$

Setzt man die Gleichungen (4) und (3) in Gleichung (2) ein, so folgt

$$c^2 = 2a + c + 5(a + c)$$

oder zusammengefasst

$$c(c - 6) = 7a$$

Nun probiert man für c alle ganzen Zahlen von 0 bis 9 durch und erhält $a = 0$ für $c = 0$ und $c = 6$ sowie $a = 1$ für $c = 7$. Alle anderen Lösungen sind keine ganzen Zahlen. Damit bleibt nur $a = 1$ und $c = 7$ für eine wirklich vierstellige Zahl ohne Null am Anfang. Einsetzen ergibt die noch fehlenden Ziffern.

Der Gewinner des Experimentierkastens »Kachelmann Wetterstation« ist Hans J. Muschik, Germering.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal [wissenschaft-online \(www.wissenschaft-online.de\)](http://www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knochelei.