Sudoku oder die einsamen Zahlen

Eine neue Krankheit befällt die Gehirne denkender Menschen und hat ein hohes Suchtpotenzial. Zu Risiken und Nebenwirkungen lesen Sie den folgenden Artikel und fragen Sie Ihren Arzt oder Lebenspartner.

Von Jean-Paul Delahaye

Ein reines Logikspiel für eine einzige Person erobert binnen weniger Monate ganze Kontinente: Das war der unglaubliche Siegeszug des Rubik-Würfels, für den sich Anfang der 1980er Jahre Hunderte von Millionen von Menschen begeisterten. Es sieht ganz so aus, als würde sich diese Geschichte mit einem noch weniger materiellen, rein logischen Spiel wiederholen.

Angeblich ging damals in Konstruktionsbüros und Universitätsinstituten die Produktivität steil nach unten, weil die Leute ihre Finger nicht von den Rubik-Würfeln lassen konnten. Heute drohen Termine zu platzen und Beziehungen zu zerbrechen, weil die Leute unansprechbar über einem kleinen Quadrat mit ein paar Zahlen darin hängen. Es hat mich beträchtliche Überwindung gekostet, diesen Artikel zu schreiben. Hat mich mein Gewissen geplagt, weil ich dadurch der weiteren Verbreitung der Seuche Vorschub leiste? Mitnichten! Die Epidemie ist ohnehin nicht aufzuhalten. Das Problem war vielmehr, dass ich meine Sudokus ein Weilchen beiseite legen musste, um über Sudokus zu schreiben; und das war hart.

Die Regeln des Spiels sind geradezu aufreizend einfach. Ein quadratisches Schema aus $9 \cdot 9$ Feldern ist in neun Unterquadrate (»Kästchen«) zu je $3 \cdot 3$ Feldern unterteilt. In einige der 81 Felder sind zu Spielbeginn Zahlen zwischen 1 und 9 eingetragen. Nun gilt es, die leeren Felder, ebenfalls mit Zahlen von 1 bis 9, auszufüllen. Dabei darf keine Zahl zweimal in ein und derselben Zeile oder Spalte auftreten – und auch nicht zweimal in ein und demselben Kästchen. Die Anfangsbelegung der Felder sollte so sein, dass das Problem eine eindeutige Lösung hat. Im Bild unten sehen Sie vier Sudokus mit aufsteigender Schwierigkeit.

Einsame Zahlen

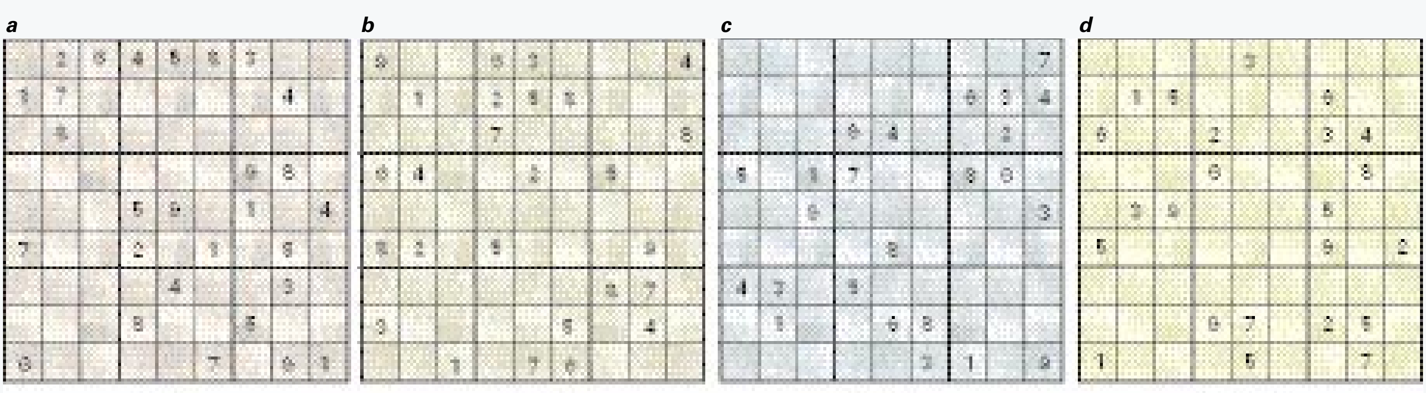
Die im Westen gebräuchliche Bezeichnung Sudoku leitet sich ab von japanisch *su* »Zahl« und *doku* »einzig«. Die Japaner selbst haben allerdings dem Spiel einen Namen gegeben, der für ihre Ohren exotisch klingt: »Number Place« (»Zahlenstelle«). Auch wenn ein Sudoku üblicherweise mit Zahlen geschrieben wird: Es gibt bei seiner Lösung nichts zu rechnen! Statt mit Zahlen könnte man die Felder des Sudoku auch mit neun anderen Symbolen ausfüllen: Buchstaben, Farben, kleinen Bildchen oder sonstigen Zeichen. Es handelt sich also um ein Kombinationsspiel; zu seiner Lösung braucht man nur strenges logisches Denken – und Geduld. Einige Lösungstechniken werden im Kasten auf S. 102/103 erläutert.

Die ersten Sudokus wurden im Mai 1979 auf S. 6 von Heft 16 der amerikanischen Zeitschrift »Dell Pencil Puzzles and Word Games« veröffentlicht. Ihr Autor Howard Garns, ein pensionierter Architekt, starb 1989 (oder 1981, die Quellen sind sich da nicht einig) in Indianapolis, ohne den weltweiten Erfolg seines Spiels erlebt zu haben. Garns wie auch die anderen Autoren der ersten Sudokus erzeugten ihre Aufgaben von Hand.

Von den Vereinigten Staaten wanderte das Spiel zunächst nach Japan, wo es seinen heute – im Westen – gebräuchlichen Namen erhielt. Den aktuellen Publikumserfolg verdankt es Wayne Gould, einem neuseeländischen Richter im Ruhestand, der in Hongkong lebt. Er schrieb ein Programm, das Anfangsspielsituationen automatisch erzeugt. Ende 2004 begann die »Times« seine Sudoku-Probleme regelmäßig zu veröffentlichen; im Januar 2005 zog der »Daily Telegraph« nach. Seither sind Dutzende von Zeitungen in aller Welt dazu übergegangen, Sudoku-Aufgaben abzudrucken. Manche bringen sie sogar auf der Titelseite und nutzen sie als Verkaufsargument. Zeitschriften und Bücher, die sich speziell dem Spiel widmen, folgten.

Alle, die sich an diesem Spiel versuchen, finden schnell Gefallen an ihm; gelegentlich werden sie so besessen davon,

Vier Sudokus unterschiedlicher Schwierigkeit zum Angewöhnen. Lösungen auf S. 106



Dieses Sudoku mit nur 17 Vorgaben gibt ausreichend Anlass zum Grübeln. Es ist eindeutig lösbar! Lösung auf S. 106

Aus urheberrechtlichen Gründen können wir Ihnen die Bilder leider nicht online zeigen.

dass sie nicht mehr aufhören können. Seien Sie vorsichtig mit Ihrer Zeitplanung: Im Internet finden Sie mehr Aufgaben, als Sie jemals lösen können! Über die üblichen Stadien Gewöhnung und Abhängigkeit entwickelt sich die Sudokumanie zu einer veritablen Sucht – der auch ich vorübergehend erlegen bin.

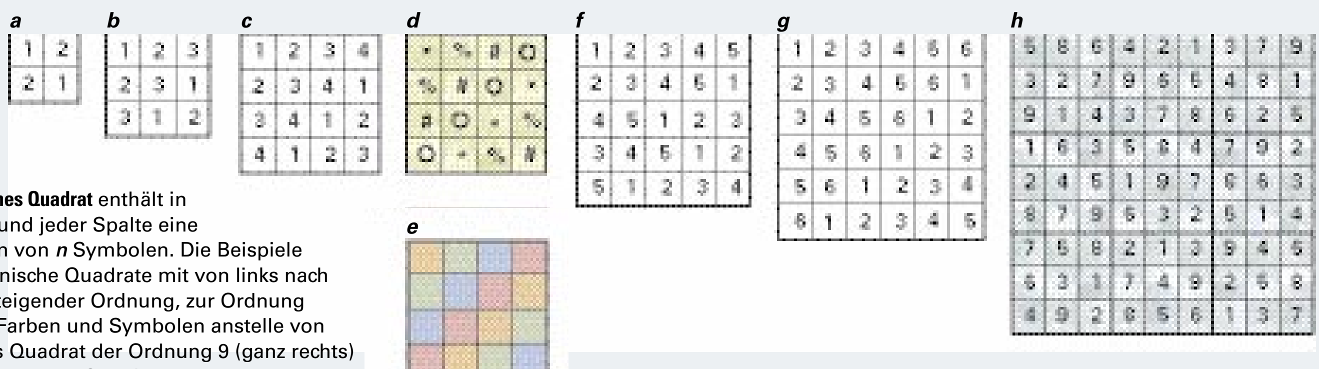
Das süße Gift des Teilerfolgs

Ein wesentlicher Suchtfaktor ist zweifellos die Art und Weise, wie sich die Partien entwickeln. Am schwierigsten ist es, die ersten Zahlen zu setzen. Mit jedem ausgefüllten Feld kommt man der Lösung näher, und im weiteren Verlauf legt das Spiel auch an Tempo zu. Gelegentlich aber bleibt man stecken, obwohl nur noch wenige Felder frei sind. So kurz vor dem Ziel zu scheitern – diese Frustration tut man sich nicht an! Vielmehr verdoppelt man seine Mühen: »Wer ist stärker? Ich oder dieses lumpige Zahlenquadrat?« In diesem Stadium ist von jeder Störung des Spielers dringend abzuraten. Gelingt es ihm schließlich, das Spielfeld vollständig auszufüllen, so überströmt ihn ein solches Glücksgefühl, dass er sich alsbald an das nächste Sudoku macht. Der Übungsgewinn verstärkt das Erfolgserlebnis und die Abhängigkeit, bis der Süchtige nachts von den Zahlen in den kleinen Feldern träumt.

Sudoku bietet ein gutes Training im abstrakten Denken. Im Mathematikunterricht kann es der reinen Logik Attraktivität verleihen. Und wenn eine ganze Klasse sudokusüchtig wird – den Lehrer wird es freuen, denn die Schüler sind so ruhig wie nie.

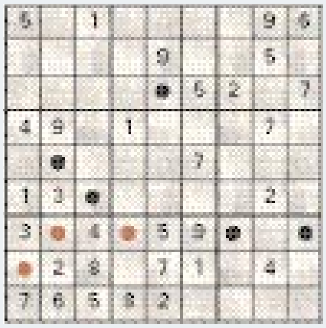
Manche Leute behaupten, Sudokuspielen halte das Fortschreiten der Alzheimer-Krankheit auf. Ich bin nicht sicher, ob das ernst zu nehmen ist; aber zweifellos beschäftigt die kombinatorische Denkarbeit eine große Anzahl an Neuronen und hält das Gehirn durch intensives Training frisch und munter.

Der nächste Verwandte des Sudoku ist nicht, wie manchmal behauptet wird, das magische Quadrat. Da sind zwar auch Zahlen nach gewissen Regeln in die Felder eines quadratischen Schemas zu schreiben; aber ansonsten haben die beiden nicht viel miteinander gemein. Viel- ▷



Ein lateinisches Quadrat enthält in jeder Zeile und jeder Spalte eine Permutation von *n* Symbolen. Die Beispiele zeigen lateinische Quadrate mit von links nach rechts aufsteigender Ordnung, zur Ordnung 4 auch mit Farben und Symbolen anstelle von Zahlen. Das Quadrat der Ordnung 9 (ganz rechts) erfüllt zusätzlich die Sudoku-Bedingung: Jedes 3·3-Kästchen enthält die Zahlen von 1 bis 9.

Wie löst man ein Sudoku?



Die besten Lösungsverfahren sind diejenigen, die man durch beständiges Üben selbst entwickelt. Sudoku bietet Raum für die Entfaltung eines persönlichen Geschmacks: Im Allgemeinen gibt es in jedem Stadium des Lösungsprozesses mehrere Möglichkeiten, ein weiteres Feld mit der richtigen Zahl zu füllen. Wir beschreiben hier vier häufig verwendete Methoden.

1) Das erzwungene Feld: Zu einem fest gewählten Feld betrachten wir die anderen Felder in derselben Zeile, derselben Spalte und im selben Kästchen. Wenn an diesen Stellen bereits acht verschiedene Zahlen vorkommen, muss zwangsläufig im ausgewählten Feld die neunte stehen.

Das gilt zum Beispiel für die Felder mit den roten Punkten in dem oben stehenden Bild. Mit dieser Methode lassen sich in bereits gut gefüllten Sudokus rasch die letzten Felder besetzen. Ein einfacher Spezialfall liegt vor, wenn in einer Klasse noch genau ein Feld frei ist (»Klasse« sei der Oberbegriff für Zeile, Spalte und Kästchen). Dagegen ist mit der Methode in einem noch dünn besetzten Gitter kaum etwas auszurichten.

2) Die erzwungene Zahl: Wir betrachten eine bestimmte Zahl, beispielsweise die Fünf. Im abgebildeten Beispiel kommt sie sowohl in der ersten als auch in der dritten Spalte schon vor, nicht aber in der zweiten. Wo in dieser Spalte könnte die Fünf stehen?

Nicht in den ersten drei Feldern dieser Spalte, denn das Kästchen links oben enthält bereits eine Fünf. Mit derselben Begründung schließt das Kästchen links unten die letzten drei Felder der zweiten Spalte aus. Also muss die Fünf der zweiten Spalte in einem der Felder 4, 5 oder 6 stehen. Davon ist nur eines noch frei: Folglich steht eine Fünf im fünften Feld. Mit Überlegungen dieser Art lassen sich die mit schwarzen Punkten markierten Felder in der Abbildung füllen.

Die Methoden 1 und 2 ergänzen sich: Jedes gefüllte Feld engt die Auswahl weiter ein und schafft damit neue Anwendungsmöglichkeiten. Bei einfachen und mittelschweren Sudokus kommt man auf diese Weise ziemlich rasch voran oder sogar zum Ziel.

3) Aufzählen und Ausdünnen: Diese Methode ist außerordentlich effizient, erfordert allerdings Bleistift und Radiergummi (oder äquivalente Mittel auf dem Computer). In jedes Feld trägt man in kleiner Schrift diejenigen Zahlen ein, die überhaupt noch möglich sind, das heißt nicht schon in derselben Zeile, derselben Spalte oder demselben Kästchen vorkommen (Bild rechts). Einige Spieler stellen die Zahlen lieber durch kleine Punkte in den Feldern dar, entsprechend der Anordnung in einer Telefontastatur: Ein Punkt links oben bedeutet eine Eins, einer in der Mitte oben eine Zwei und so weiter.

Aus dem so gewonnenen Gesamtbild kann man eine Fülle von Schlüssen ziehen, zum Beispiel folgende (Bild rechts): In der dritten Spalte sind für die Felder 2 bis 6 der Reihe nach noch folgende Zahlen möglich: {2, 3, 6, 7}, {3, 6, 9}, {2, 6}, {2, 6} und {6, 7}. Die Spalte muss eine Zwei und eine Sechs enthalten; diese stehen folglich zwangsläufig in den beiden Feldern 4 und 5, denn diese Felder könnten sonst nicht mehr korrekt gefüllt werden. Wir wissen zwar noch nicht, auf welchem der beiden Felder die Zwei und auf welchem die Sechs steht, aber beide stehen mit Sicherheit auf keinem anderen Feld dieser Spalte und können damit bei den anderen Möglichkeiten gestrichen werden. Damit vereinfachen sich die Belegungsmöglichkeiten folgendermaßen: {3, 7}, {3, 9}, {2, 6}, {2, 6}, {7}. Das ist aber noch nicht alles: Die Neun hat nur einen möglichen

▷ mehr stammt das Sudoku von einem so genannten lateinischen Quadrat ab. Das ist ein Quadrat mit n^2 Feldern, die mit n Symbolen auszufüllen sind derart, dass kein Symbol zweimal in einer Zeile oder Spalte auftritt; folglich wird jedes der n Symbole genau n-mal verwendet. Ihr Ursprung liegt im Mittelalter. Leonhard Euler (1707–1783) studierte sie intensiv und gab ihnen ihren heutigen Namen. Es gibt nur 3 lateinische Quadrate der Seitenlänge 3, aber schon 576 der Seitenlänge 4 und 5 524 751 496 156 892 842 531 225 600 der Seitenlänge 9. Wenn man lateinische Quadrate, die durch einfache Operationen wie die Vertauschung zweier Zeilen oder zweier Spalten auseinander hervorgehen, als gleich ansieht, beträgt die Anzahl der lateinischen Quadrate mit Seitenlänge 9 nur noch 377 597 570 964 258 816, wie Stanley E. Bammel und Jerome Rothstein 1975 bewiesen haben.

Im Jahr 1979 hat J. R. Nechvatal eine allgemeine und ziemlich komplizierte Formel für die Anzahl $L(n)$ der n-seitigen lateinischen Quadrate gefunden. Aber weder aus dieser Formel noch aus anderen, die man kennt, geht hervor, wie stark $L(n)$ mit wachsendem n ansteigt.

Wie viele Lösungen gibt es?

Ein vollständig ausgefülltes Sudoku ist per definitionem ein lateinisches Quadrat der Seitenlänge 9 mit der zusätzlichen Eigenschaft, dass jedes der 3·3-Kästchen die Zahlen von 1 bis 9 genau einmal enthält; also gibt es weniger Sudoku-Lösungen als lateinische Quadrate der Seiten-

▶ Ein Sudoku kann bis auf 4 Plätze gefüllt sein (links) und immer noch zwei verschiedene Lösungen zulassen (rechts). Allgemein gilt: Wenn die Ecken eines Rechtecks, von dem eine Seite gänzlich in einem Kästchen liegt, nach dem Muster $\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}$ mit Zahlen belegt sind, darf man diese Belegung durch $\begin{smallmatrix} b & a \\ a & b \end{smallmatrix}$ ersetzen, ohne eine Sudoku-Regel zu verletzen.

Platz (was man auch mit Methode 2 hätte finden können, was aber so systematischer gelingt); nachdem sie ihn einnimmt, bleibt für die Drei nur noch einer übrig, und dadurch ist auch die Position der Sieben erzwungen. Letztlich engen sich die Möglichkeiten ein auf {3}, {9}, {2, 6}, {2, 6}, {7}. Nur die Positionen der Zwei und der Sechs bleiben unbestimmt.

Die Überlegungen, die wir hier für Spalte 3 durchgeführt haben, kann man für jede Zeile, jede Spalte und jedes Kästchen anstellen. Das macht insgesamt 27 Gelegenheiten zum Ausdünnen. Da jedes Feld zu drei Klassen gehört, wirkt sich jede Ausdünnung seiner Möglichkeitsmenge auch hilfreich in den jeweils anderen Klassen aus.

Allgemein formuliert lautet die Ausdünnungsregel: Findet man unter den möglichen Belegungen einer Klasse *m* Mengen, die ausschließlich *m* Zahlen enthalten und keine anderen, so kann man diese *m* Zahlen bei den Möglichkeiten für die restlichen Felder dieser Klasse streichen. Nicht alle *m* Zahlen müssen in allen *m* Mengen enthalten sein: Die Möglichkeitsmengen {3, 5}, {3, 8} und {5, 8} schließen die Möglichkeiten 3, 5 und 8 für jedes andere Feld der Klasse aus.

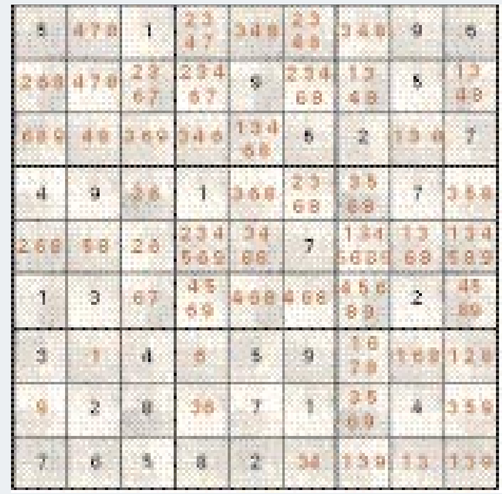
Übungsbeispiele gefällig? Vereinfachen Sie so weit wie möglich die folgenden Möglichkeitsserien:
a) {1}, {1, 2}, {2, 3, 4}, {1, 2, 3, 4, 5}, {1, 2, 4}
b) {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {2, 3, 5, 7, 8, 9}, {7, 9}, {2, 5, 7}.
Mit Hilfe dieser drei Methoden lassen sich recht viele Sudoku-Gitter lösen, darunter auch einige, die als schwer oder höllisch eingestuft werden.

4) Versuch und Irrtum: Manchmal hilft nichts als Probieren. Diese Methode ist recht mühsam und erfordert wahlweise
• sehr hohe Konzentration,
• Buntstifte,
• einen reichlichen Vorrat an kariertem Papier oder
• ein Lösungsprogramm für Sudokus, bei dem man gewisse Einträge in die Felder und sämtliche Folgeeinträge wieder gezielt löschen kann. Bei höllischen Sudokus kommt man häufig um diese harte Methode nicht herum.

Nehmen wir an, die Ungewissheit über die Belegung von Feld 4 und 5 der Spalte 3 – muss es nun 2, 6 oder 6, 2 heißen? – sei nicht aufzulösen. Dann trägt man versuchsweise die Sechs in das erste Feld ein und leitet daraus alle möglichen Folgerungen ab. Stößt man hierbei auf einen Widerspruch, so folgt, dass die Sechs nicht dort stehen kann, wo man sie vermutet hat. Also gehört dorthin die einzige Alternative, nämlich die Zwei. Ergibt sich kein Widerspruch, so ist die Lösung gefunden (diese ist nämlich eindeutig). Die Methode von Versuch und Irrtum beruht somit auf einem Widerspruchsbeweis.

Häufig landet man jedoch weder bei einem Widerspruch noch bei einer Lösung, sondern bei einer weiteren unauflöslichen Ungewissheit. Dann muss man eine weitere Vermutung anstellen; wenn sich diese als falsch erweist, muss man genau bis zu dem Punkt der letzten Vermutung zurückgehen und die alternative Vermutung verfolgen. Dieses »backtracking« ist relativ einfach zu programmieren; es mit Bleistift und Papier zu praktizieren, fällt unserem beschränkten Gedächtnis sehr schwer.

Weitere Techniken finden sich im Internet.



Lösung: a) {1}, {2}, {3}, {5}, {4}
b) {2, 3}, {2, 5}, {3, 5}, {8}, {9}, {7}

länge 9. Ihre genaue Anzahl anzugeben ist schwierig. Bertram Felgenhauer von der Technischen Universität Dresden und Frazer Jarvis von der Universität Sheffield sind mit einer Kombination aus Nachdenken – um das Problem zu vereinfachen – und erschöpfender Suche mit Hilfe des Computers auf die Zahl 6 670 903 752 021 072 936 960 gekommen. Dabei werden Lösungen, die durch einfache Operationen wie Drehungen, Spiegelungen oder kästchentreue Permutationen der Zeilen und Spalten auseinander hervorgehen, als verschieden gezählt. (Eine Permutation heißt »kästchentreu«, wenn sie Kästchen als ganze intakt lässt, auch wenn sie deren Inhalt möglicherweise umsortiert. Zum Beispiel darf eine kästchentreue Spaltenpermutation die erste Spalte nur in die zweite oder dritte, nicht aber in eine andere Spalte bewegen, weil sonst die linken Kästchen zerrissen würden.) Ed Russell kam unabhängig zum selben Ergebnis, was für eine so komplizierte Beweisführung eine willkommene Bestätigung liefert.

Zählt man dagegen alle Lösungen, die sich nur durch die genannten elementaren Operationen unterscheiden, als eine, so bleiben nur 5 472 730 538 wesentlich verschiedene Anordnungen übrig: etwas weniger, als es Menschen auf der Erde gibt. Das scheint verglichen mit den riesigen Zahlen zuvor relativ wenig zu sein; aber ein Mangel an Problemen ist nicht zu befürchten. Selbst wer pro Minute ein Sudoku lösen würde, könnte in einem hundertjährigen Leben nur knapp ein Prozent aller denkbaren Anordnungen abarbeiten.

Und wie viele Aufgaben?

Und das sind nur die vollständig ausgefüllten Sudokus! Aus einer solchen »Lösung« entsteht eine »Aufgabe«, indem man gewisse Felder ausradiert, bis nur noch ungefähr ein Drittel übrig bleibt. Dabei muss der Aufgabensteller darauf achten, dass die Lösung aus der Aufgabe eindeutig rekonstruierbar bleibt: Lässt er zu viele Felder weg, gibt es mehrere Lösungen zur selben Aufgabe. Lässt er zu wenige weg, macht er die Aufgabe einfacher und vielleicht auch langweiliger.

Bisher ist es niemandem gelungen, die Anzahl der denkbaren Aufgaben (Anfangsbelegungen) zu einer Lösung zu bestimmen. Es gibt einfach zu viele Möglichkeiten, Felder auszuradieren – und vielleicht ist die Bestimmung ihrer Anzahl auch der Mühe nicht wert. Interessanter ist die Frage, wie viele minimale Anfangsbelegungen es gibt, das heißt solche, aus denen man keine Zahl mehr löschen kann, ohne die eindeutige Lösbarkeit zu verlieren. Auch diese Zahl ist bislang unbekannt; aber sie wird es wohl nicht mehr lange bleiben.

Ein weiteres Problem ist bis heute ungelöst: Welches ist die kleinste Anzahl von Zahlen, die man in ein Sudoku-Quadrat setzen muss, damit die Lösung eindeutig wird? Man kennt zahlreiche Belegungen mit 17 Zahlen, die eine eindeutige Lösung erzwingen (Bild S. 101), und keine einzige mit dieser Eigenschaft und nur 16 Einträgen. Dass andererseits 16 Zahlen niemals für die Eindeutigkeit ausreichen, hat auch noch niemand beweisen können.

Dagegen kennen wir die Lösung des folgenden Problems: »Wie viele Zahlen kann man maximal vorgeben, ohne dass die Lösung eindeutig ist?« Es ist nämlich ▷

PREISRÄTSEL

Ein höllisches Sudoku

von Web Sudoku Services
(www.websudoku.com)

Füllen Sie in dem nebenstehenden Schema die leeren Felder so mit den Zahlen 1 bis 9, dass in jeder Zeile, jeder Spalte und jedem 3·3-Teilkästchen jede Zahl genau einmal vorkommt.

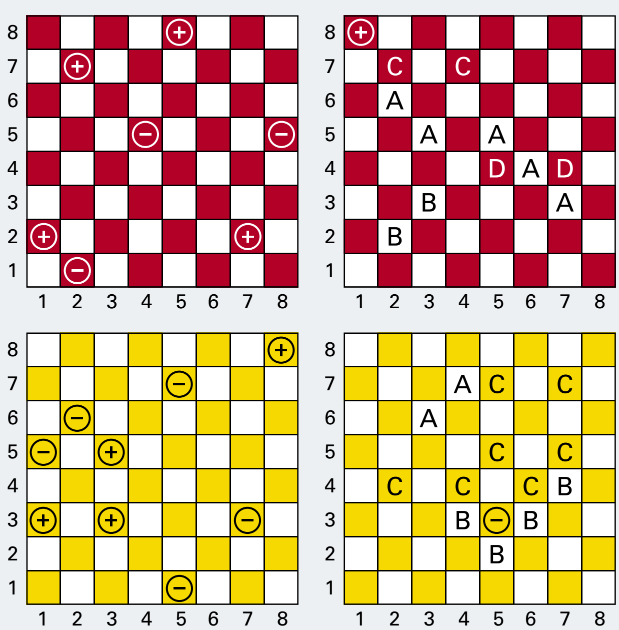
	1			6	5	4		
				8	4	1		
4							7	
	5		1	9				
		3				7		
				3	7		5	
	8							3
		2	6	5				
		9	8	1			2	

Schicken Sie Ihre Lösung in einem frankierten Brief oder auf einer Postkarte an Spektrum der Wissenschaft, Leserservice, Postfach 10 48 40, D-69038 Heidelberg, oder reichen Sie Ihre Lösung online unter www.spektrum.de/sudoku ein.

Unter den Einsendern der richtigen Lösung verlosen wir drei Computerspiele »Sudoku« mit LCD-Display (siehe Abbildung rechts). Der Rechtsweg ist ausgeschlossen. Es werden alle Lösungen berücksichtigt, die bis Dienstag, 14. März 2006, eingehen.

Das Computerspiel (inklusive Batterien und deutscher Gebrauchsanleitung) ist auch im Shop von Lutz Friebel unter http://gymnastikball.yatego.de oder per E-Mail an sudoku-pc-spiel@t-online.de zum Sonderpreis von 19,90 € (plus 5,10 € Porto für ein versichertes Paket) erhältlich.

Lösung zu »Quarkon und Antiquarkon« (Januar 2005)



Professor Heisinger fixierte das Quarkon auf der Gitterposition (1/8) und das Antiquarkon auf (5/3).

Bernd Rümmler aus Göttingen färbte die Felder des Gitters wie ein Schachbrett abwechselnd rot und gelb. Setzt sich auf das so gefärbte Gitter ein beliebiges Neutronium-Molekül ab, so kommen dessen Quarkonen und Antiquarkonen entweder nur auf rote oder nur auf gelbe Felder zu liegen. Da ein Molekül niemals gleichzeitig die Verhältnisse für rote wie gelbe Felder verändert, kann der ganze Vorgang jeweils für die Felder einer Farbe allein betrachtet werden.

Die beiden linken Abbildungen oben zeigen die morgendliche Situation getrennt nach der Farbe. Wir berechnen nun für jedes Teilgitter eine Zustandsgröße: Der »Urort« eines Teilgitters ist gleich der (Vektor-)Summe der Positionen der Quarkonen minus der Summe der Positionen der Antiquarkonen. Für das rote Gitter ergibt sich der Urort (1/8) und für das gelbe Gitter der negative Urort –(5/3). Also muss das Quarkon auf (1/8) gesessen haben und das Antiquarkon auf (5/3).

Warum? – Der Urort ist eine wichtige Erhaltungsgröße der Quarkonenphysik. Setzt sich nämlich ein beliebiges Neutronium-Molekül auf einem Gitter ab, so bleibt dessen Urort unverändert. Das gilt auch dann, wenn das Neutronium mit bereits vorhandenen Quarkonen und Antiquarkonen reagiert. Beides ist leicht nachzurechnen. Andererseits: Wenn man genau ein Quarkon oder Antiquarkon auf einem Teilgitter fixiert, ist der Urort des Gitters gleich der Position dieses Teilchens – mit negativem Vorzeichen für das Antiquarkon.

Bleibt noch zu zeigen, dass es wirklich eine Abfolge von Reaktionen mit Neutronium gibt, welche die abendliche Anordnung in die morgendliche überführt. Eine von vielen Möglichkeiten ist für beide Farben getrennt im rechten Teilbild aufgezeichnet. Die Buchstaben bezeichnen dabei das Zentrum des jeweiligen Neutroniums. Dabei spielt die Reihenfolge des Absetzvorgangs keine Rolle.

Die Gewinnerin des Gutscheins »BestChoice« ist Birgit Brüdigam, Uetersen.

Lust auf noch mehr Rätsel? Unser Wissenschaftsportal wissenschaft-online (www.wissenschaft-online.de) bietet Ihnen unter dem Fachgebiet »Mathematik« jeden Monat eine neue mathematische Knobelei.

offensichtlich, dass im Fall von 78, 79 oder 80 Zahlen die Lösung eindeutig ist, falls sie existiert. Andererseits erzwingen 77 Zahlen nicht in jedem Fall die Eindeutigkeit (Bild S. 102 unten).

Die Seitenlänge 9 ergibt zwar Aufgaben mit dem richtigen Schwierigkeitsgrad – nicht zu langweilig und nicht zu schwer –, ist aber ansonsten keineswegs zwingend. Man könnte Sudoku auch auf einem $4 \cdot 4$-Quadrat mit vier Kästchen der Größe $2 \cdot 2$ spielen oder auf einem Quadrat der Seitenlänge 16, 25, … Allgemein wird ein Quadrat mit der Seitenlänge n^2 in n^2 gleich große Kästchen der Größe $n \cdot n$ unterteilt. Man gibt sich n^2 verschiedene Symbole vor und verlangt, dass in keiner Zeile, keiner Spalte und in keinem Kästchen dasselbe Symbol mehr als einmal auftritt.

Vor Kurzem haben Takayuki Yato und Takahiro Seta bewiesen, dass das so definierte $n^2 \cdot n^2$-Sudoku ein NP-vollständiges Problem ist. Das heißt: Einerlei wie geschickt man ein Programm zur Lösung des verallgemeinerten Sudoku schreibt, seine Rechenzeit steigt mit wachsendem n so rasch an, dass bereits für mäßige n die schnellsten Computer der Welt überfordert wären. Dieses Resultat war nicht unbedingt das, was man erwartet hatte – und es mag denjenigen, die an dem »harmlosen« Fall $n = 3$ zu verzweifeln drohen, ein schwacher Trost sein.

Geordneter Rückzug

Es ist relativ einfach, ein Computerprogramm zu schreiben, das jedes beliebige Standard-($9 \cdot 9$)-Sudoku löst oder seine Unlösbarkeit nachweist. Auf solchen Programmen beruhen, wie wir später sehen werden, die Programme zur automatischen Erzeugung von Sudoku-Aufgaben.

Mehrere Methoden sind denkbar; die gängigste ist als erschöpfende Suche mit geordnetem Rückzug *(backtracking)* zu beschreiben. Die Idee ist folgende: Das Programm setzt in das erste leere Feld die Zahl 1. Ist diese Entscheidung mit den Regeln verträglich, setzt es in das zweite leere Feld eine Eins, dann in das dritte, und so weiter. Bemerkt das Programm eine Regelverletzung (was sehr schnell vorkommt), so erhöht es die zuletzt gesetzte Zahl um 1 und beginnt von Neuem. Entdeckt es bei dem Versuch, die zuletzt platzierte Zahl um 1 zu erhöhen, dass diese eine 9 ist (die man ja nicht durch eine 10 ersetzen kann!), so geht es weiter zurück, erhöht die als vorletzte gesetzte Zahl um eine Einheit und macht von da aus weiter. Es ist wie beim Kilometerzähler: Wenn ein Rädchen über die Neun hinaus zählen soll, setzt es sich selbst auf Null und bewegt das linke Nachbarrädchen eins weiter. Gelegentlich, etwa beim Übergang von …999 auf …000, geht das Programm mehrere Schritte auf einmal zurück.

So wie ein Kilometerzähler sämtliche Kombinationen von Ziffern ohne Ausnahme durchläuft, so untersucht auch diese Methode erschöpfend alle Möglichkeiten und findet folglich sämtliche Lösungen. Wenn allerdings das Zählwerk in den ersten Ziffern unserer gedachten Kilometerzahl einen Widerspruch findet, probiert es die letzten Ziffern gar nicht erst durch. Das macht die Laufzeiten der Programme erträglich.

In einer auf Logik spezialisierten Programmiersprache wie Prolog, die in den 1970er Jahren in Frankreich von Alain Colmerauer und Philippe Roussel entwickelt wurde, ist die Lösung eines Sudoku mit Backtracking relativ kurz (wenige hundert Zeilen), elegant und effizient zu formulieren.

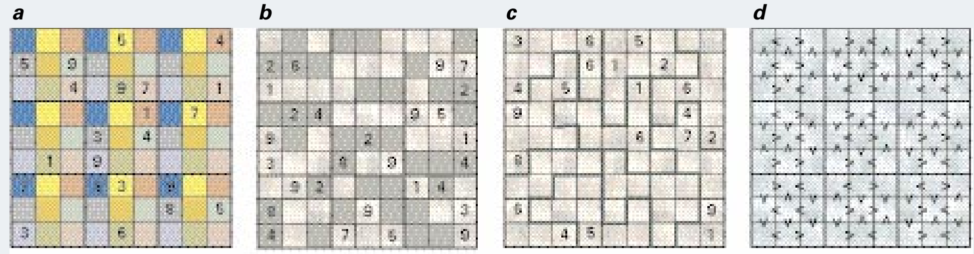
Dieses noch relativ primitive Programm lässt sich verbessern, insbesondere durch eine Technik namens *constraint propagation* (etwa: Verbreitung von Nachrichten über Beschränkungen). Das Programm führt für jedes Feld Buch darüber, welche Werte bei der aktuellen Belegung noch zulässig sind, und aktualisiert dieses Verzeichnis mit jeder neuen Setzung einer Zahl (entsprechend der Methode 3 im Kasten S. 102/103). Beim Backtracking muss es natürlich auch diese Tabelle auf den alten Stand zurücksetzen. Auf noch nicht besetzten Feldern probiert es nur noch die Zahlen durch, die nach der Tabelle zulässig sind.

Scharfsinn statt Backtracking

Dem menschlichen Denken laufen Backtracking-Techniken allerdings zuwider: Sie erfordern eine unglaubliche Geduld und Konzentration. Menschliche Spieler ziehen es vor, eine Vielfalt raffinierter Regeln anzuwenden, und greifen auf *trial and error* (Methode 4) samt Backtracking nur im Notfall zurück.

Es wurden auch Programme geschrieben, die der menschlichen Vorgehensweise genauer nachempfunden sind. Sie sind im Programmtext länger als die anderen, aber ebenfalls effizient. Der Aufwand, den sie zur Lösung eines Sudoku-Problems betreiben, dient den Verfassern der Aufgabe dazu, ihren Schwie-

Sudoku-Varianten

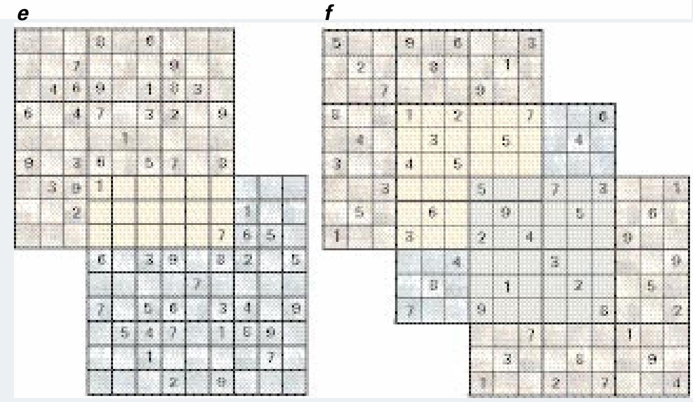


Regeln. Zusätzlich dürfen Felder gleicher Farbe nicht dieselbe Zahl enthalten.

(**b**) **Die dunkel** unterlegten Felder dürfen nur gerade Zahlen enthalten, die anderen nur ungerade.

(**c**) **Unregelmäßig** begrenzte Gebiete übernehmen die Rolle der neun Kästchen.

(**d**) **Hier werden** keine Zahlen vorgegeben. Stattdessen geben die Zeichen < und > zwischen den Feldern an, wo die größere Zahl stehen soll. Dem Autor ist keine Lösung für dieses Rätsel bekannt, das 1999 in der Zeitschrift »Puzzler« erschienen ist.



(**e und f**) **Das Gesamtspielfeld** besteht aus zwei oder drei überlappenden Quadraten. Für jedes dieser Quadrate gelten die üblichen Regeln.

Lösungen

Sudokus von S. **100/101**

Sudoku im Dürerbild

7	9	8	6	2	4	3	1	5
3	1	5	8	7	9	2	4	6
2	6	4	3	1	5	9	7	8
1	2	9	5	8	7	4	6	3
6	8	3	2	4	1	7	5	9
4	5	7	9	3	6	1	8	2
9	4	2	1	5	8	6	3	7
5	3	1	7	6	2	8	9	4
8	7	6	4	9	3	5	2	1

a

9	2	6	4	5	8	3	1	7
1	7	3	9	6	2	8	4	5
4	8	5	1	7	3	2	6	9
5	6	1	7	3	4	9	8	2
8	3	2	5	9	6	1	7	4
7	9	4	2	8	1	6	5	3
2	1	9	6	4	5	7	3	8
3	4	7	8	1	9	5	2	6
6	5	8	3	2	7	4	9	1

b

9	5	8	6	3	1	7	2	4
7	1	4	2	5	8	9	6	3
2	3	6	7	9	4	1	5	8
6	4	3	8	2	9	5	1	7
1	9	5	4	6	7	3	8	2
8	2	7	5	1	3	4	9	6
5	6	9	3	4	2	8	7	1
3	7	2	1	8	5	6	4	9
4	8	1	9	7	6	2	3	5

c

8	2	4	3	5	6	9	1	7
7	9	5	8	1	2	6	3	4
1	6	3	9	4	7	5	2	8
5	4	1	7	3	9	8	6	2
6	8	9	1	2	4	7	5	3
3	7	2	6	8	5	4	9	1
4	3	8	5	9	1	2	7	6
9	1	7	2	6	8	3	4	5
2	5	6	4	7	3	1	8	9

d

2	7	4	5	3	6	1	9	8
3	1	5	4	8	9	6	2	7
6	9	8	2	1	7	3	4	5
4	2	1	6	9	5	7	8	3
7	3	9	1	2	8	5	6	4
5	8	6	7	4	3	9	1	2
9	5	7	8	6	2	4	3	1
8	4	3	9	7	1	2	5	6
1	6	2	3	5	4	8	7	9

▷ rigkeitsgrad – üblicherweise in den Kategorien »leicht«, »mittel«, »schwer« oder »höllisch« – korrekt einzustufen.

Während in der Frühzeit die Aufgaben von Hand erzeugt wurden, werden heute fast alle von Programmen entworfen, die gemäß der folgenden Idee funktionieren: Man setzt zufällig eine gewisse Anzahl von Zahlen in das Schema und wendet darauf einen Lösungsalgorithmus an. Hat die Aufgabe eine eindeutige Lösung, ist man fertig. Lässt die zufällig erzeugte Verteilung keine Lösung zu, entfernt man eine Zahl und fängt von vorne an. Gibt es mehrere Lösungen, so wählt man eine aus und fügt der Anfangsverteilung mit Hilfe des Algorithmus neue Zahlen hinzu, bis die Lösung eindeutig wird.

Echte und elektronische Radiergummis

Die Lösung eines Sudoku-Gitters ist äquivalent zu einem Graphenfärbungsproblem. Die Knoten des Graphen sind die 81 Felder des Quadrats; zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die zugehörigen Felder zur selben Zeile, zur selben Spalte oder zum selben Kästchen gehören. Das macht pro Knoten $8+8+4=20$ Kanten: acht für die Zeile, acht für die Spalte und vier für die Felder des Kästchens, die nicht schon in derselben Zeile oder Spalte liegen. Insgesamt hat der Graph $81 \cdot 20/2 = 810$ Kanten. Es stehen neun Farben zur Auswahl, entsprechend den neun möglichen Belegungen für jedes Feld. Manche Knoten des Graphen sind bei Spielbeginn bereits gefärbt, und es gilt, die verbleibenden Knoten so zu färben, dass nirgends zwei durch eine Kante verbundene Knoten dieselbe Farbe tragen.

Kommen wir nun zu der Kunst, Sudokus von Hand zu lösen – eine Kunst, der sich Millionen begeisterter Spieler mit großer Hingabe widmen. Meine Empfehlung: Sammeln Sie zunächst eigene Erfahrungen und lesen Sie erst dann Lösungsrezepte – wenn überhaupt. Es hat seinen eigenen Reiz, zum Lösen von Sudokus nur selbst entwickelte Methoden zu verwenden.

Für diejenigen Leser, die nicht wissen, wie sie anfangen sollen, hier zwei Grundprinzipien. Erstens: Suchen Sie stets diejenigen Felder, die den stärksten Einschränkungen unterliegen, also solche, die in einer Zeile, einer Spalte oder einem Kästchen mit vielen bereits belegten Feldern liegen. Mit etwas Glück legen die verschiedenen Einschränkungen (»Das Feld kann keine Eins oder Drei oder Sieben enthalten, da diese Zahlen in der zugehörigen Spalte schon vorkommen«) die einzutragende Zahl bereits eindeutig fest (Methode 1 im Kasten S. 102/103).

Zweitens: Finden Sie in einer Zeile, einer Spalte oder einem Kästchen den hoffentlich einzigen Platz, auf den eine bestimmte Zahl passt (Methode 2).

Weitere Lösungsstrategien harren ihrer Entdeckung. Sie alle zugleich einzusetzen gibt dem Lösungsprozess Tempo und trägt zum Vergnügen bei.

Einige Websites erzeugen Aufgaben mit einem Schwierigkeitsgrad nach Wunsch und leisten Hilfestellung beim Lösen, ohne dem Benutzer die eigentliche Denkarbeit abzunehmen. So kann man an manchen Stellen Einträge in Felder vornehmen und wieder löschen, was einem Bleistift und Radiergummi erspart. Andere Programme zeigen sogar logische Verbindungen zwischen den Feldern auf. Puristen mögen solche Hilfsmittel verabscheuen; ich halte das für übertrieben. Immerhin ist dadurch der Kopf, von der niedrigen Tätigkeit des Radierens entlastet, frei für die kühnsten Gedankenflüge.

Wenn Sie der klassischen Aufgaben müde sind, können die unzähligen Variationen des Sudoku Sie vielleicht noch reizen. Einige bestehen aus mehreren überlappenden Quadraten, bei anderen treten merkwürdig geformte Bausteine an die Stelle der Kästchen, wieder andere verwenden Farben (Kasten S. 105). Diese Varianten sind interessant, weil sie einen dazu zwingen, immer neue Überlegungen anzustellen. Ein Spielbegeisterter, der für ein traditionelles Sudoku nur eine Viertelstunde benötigt, kann sich mit gigantischen Varianten mehrere Tage lang den Vergnügungen des Kombinierens hingeben. »Wer ist stärker? Ich oder dieses lumpige Zahlenquadrat?« ◁

AUTOR UND LITERATUR

Jean-Paul Delahaye ist Professor für Informatik an der Universität Lille.

Einsame Hunde. Die schönsten Sudokus aus Japan. Von Jean-Claude Lin (Hg.). Freies Geistesleben, Stuttgart 2005

Mehr einsame Hunde. Die schönsten Sudokus aus Japan. Von Jean-Claude Lin (Hg.). Freies Geistesleben, Stuttgart 2005

Weblinks zu diesem Thema finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.