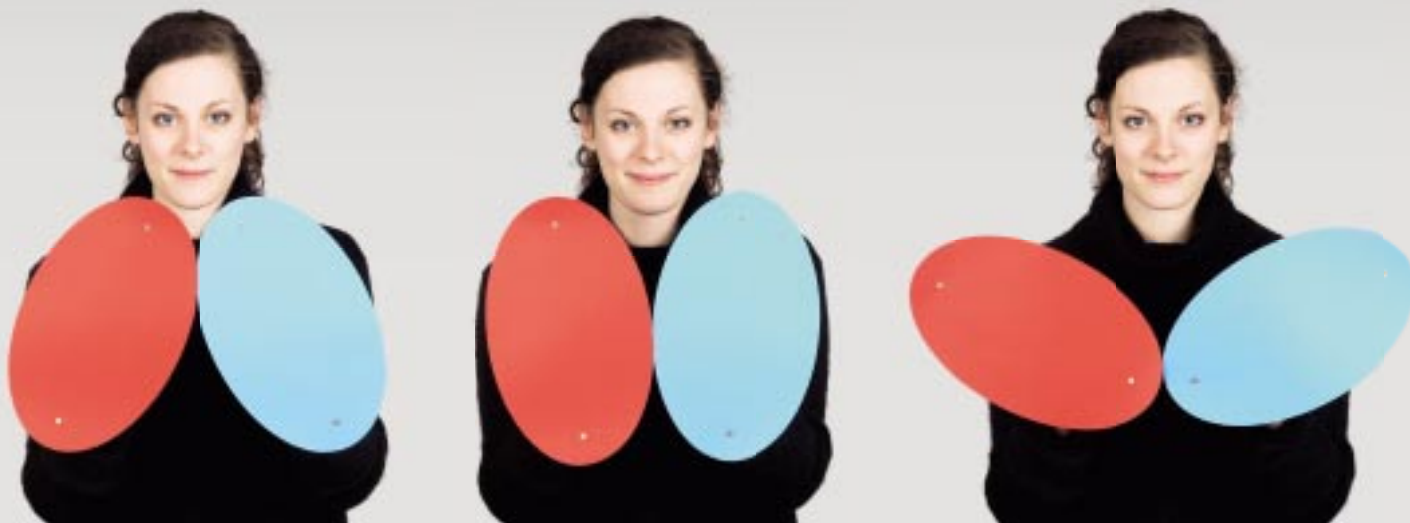




Das Antiparallelogramm (I)

Was haben ellipsenförmige Zahnräder, die exakte optische Fokussierung, die Lemniskate und Watts Dampfmaschine miteinander gemeinsam? Ein ziemlich einfaches Viereck, das aber in der Schule kaum vorkommt

Von Norbert Treitz

Was ist ein ebenes Viereck $ABCD$, bei dem zwei Paare nicht benachbarter Seiten gleich sind, also $\overline{AB} = \overline{CD}$ und $\overline{BC} = \overline{DA}$? Ein Parallelogramm? Richtig, aber das ist nicht die einzige Antwort. Wenn sich die Seiten überkreuzen, dann ist es ein so genanntes Antiparallelogramm, und seine Seiten sind im Allgemeinen nicht mehr parallel. Immerhin sind seine langen Seiten, sagen wir BC und DA , die Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes und die kurzen Seiten AB und CD dessen Schenkel; parallel sind die Verbindungslinien AC und BD , die nicht Seiten des Vierecks sind.

Stellen wir uns jetzt das Antiparallelogramm als ebenes Gelenkviereck vor, das heißt mit festen Seitenlängen, aber variablen Winkeln. Das ist mit vier Lochstäben, vier Schrauben und acht Muttern (zum Kontern) aus einem Metallbaukasten zu realisieren (Bild rechts); mit Unterlegscheiben an geeigneten Stellen kann man einer Ecke den Weg über eine Stange hinweg erleichtern. Rabiante Menschen biegen die Lochstäbe zu diesem Zweck leicht in die dritte Dimension.

Wir betrachten nun nur solche Bewegungen, bei denen unser Viereck

nicht zum Parallelogramm wird. Es hat dann in jeder Position Klappsymmetrie wie ein Schmetterling, wobei die Symmetrieachse durch den Schnittpunkt der beiden längeren Seiten BC und DA geht.

Halten wir eine kurze Seite (zum Beispiel AB) fest, so wandert C auf einem Kreis um B und D auf einem ebenso großen um A . Zugleich wandert der Schnittpunkt E der längeren Seiten auf einer gewissen Kurve um A und B herum. Aus der Schmetterlingssymmetrie folgt stets $\overline{AE} + \overline{BE} = \overline{AD}$: Unsere Kurve ist die Menge aller Punkte, für welche die Summe der Abstände von A und B gleich der Konstanten $\overline{AD}$ ist. Das ist eine Ellipse! Es gilt $\overline{AD} = 2a$, wobei a die große Halbachse ist, und $\overline{AB} = 2e$; dabei heißt e die lineare Exzentrizität der Ellipse. Schon den Griechen der Antike bekannt und als einer der Kegelschnitte intensiv studiert, gewann sie an Bedeutung in der Physik, seit Johannes Kepler die elliptische Bewegung der Planeten um die Sonne fand, und wurde später zur Lieblingskurve der barocken Baumeister.

Die Landschaftsgärtner jener Zeit haben ein bereits in der Antike bekanntes Konstruktionsverfahren für die Ellipse wiederentdeckt: Man schlage an den Punkten A und B (den »Brennpunkten«)

Pföcke in den Boden, werfe eine zum Ring geknotete Schnur geeigneter Länge über die Pföcke und einen Spaten und steche mit diesem bei gespannter Schnur den Umriss der Ellipse ab. Unsere Konstruktion über das Antiparallelogramm ist eine Version dieser Gärtnerkonstruktion. Die Länge $2a$ der großen Achse ist die lange Seite des Antiparallelogramms; die kurze ist gleich dem Abstand $2e$ der Brennpunkte.

Heften wir nun eine zweite, gleiche Ellipse mit den Brennpunkten an die Punkte C und D unseres Gelenkvierecks, so rollen beide Ellipsen aneinander ab. Man könnte ihre Ränder mit Zähnen versehen. Hält man eins der beiden elliptischen Zahnräder fest, so läuft jeder Brennpunkt des beweglichen Zahnrads auf einem Kreis um einen Brennpunkt des festen. Allerdings hat höchstens einer von beiden konstante Winkelgeschwindigkeit (außer wenn die Ellipsen Kreise sind), der andere geht fast so ungleichmäßig wie ein Malteserkreuz.

Anschmiegsame Ellipsen

Die Symmetrieachse der gesamten Anordnung ist in jeder Position die gemeinsame Tangente der Ellipsen im Berührungspunkt. Da diese Gerade stets eine Winkelhalbierende zwischen den langen Seiten bildet, tut die zu ihr rechtwinklige Gerade das ebenfalls, halbiert also die Winkel AEB und CED .

Wer in einem Saal mit annähernd elliptischem Grundriss in einem Brennpunkt der Ellipse flüstert, wird im anderen Brennpunkt hervorragend verstanden, weil die Schallwellen es auf jedem beliebigen Weg vom Flüsterer über die Reflexion an der Wand zum Hörer gleich

◀ Zwei Ellipsen rollen präzise aneinander ab, geführt durch ein Antiparallelogramm-Gestänge ...

weit haben und deswegen dort mit gleicher Phasenlage eintreffen; denn die Summe der Abstände von den Brennpunkten ist eine Konstante. Das gilt auch und vor allem dann, wenn man die Ellipse durch Rotation um ihre lange Achse zum (gestreckten) Rotationsellipsoid (»Flüstergewölbe«) ausbaut.

Was dem Schall recht ist, das ist dem Licht billig. Eine Kerzenflamme im einen Brennpunkt heizt den anderen gehörig auf: Die Brennpunkte tragen ihren Namen zu Recht. Wer es vorzieht, dem Weg des Lichts mit der Strahlenoptik zu folgen – geradlinige Ausbreitung im homogenen Medium, Reflexion symmetrisch zum Einfallslot und Ablenkung entsprechend dem Brechungsgesetz –, kommt zum selben Ergebnis, indem er die Symmetrie des Antiparallelogramms zur gemeinsamen Tangente der beiden Ellipsen ausnutzt. Ein Strahl von einem Brennpunkt läuft nach regulärer Reflexion durch den anderen (Bild S. 116).

Ein Hohlspiegel in Form eines Ellipsoids realisiert also eine exakte Abbildung von einem Objektpunkt zu einem reellen Bildpunkt und hat damit seinem viel »regelmäßigeren« Gegenstück, der Kugel, etwas voraus; denn ein Hohlspiegel in Form einer Kugelschale kann exakt nur den Kugelmittelpunkt in sich selbst abbilden. Dass er auf halbem Weg zwischen seinem Scheitel und dem Mit-

telpunkt einen Brennpunkt habe, ist mehr Wunsch als Wirklichkeit: Für schmale Parallelbündel aus dem Unendlichen wird der Brennfleck hinreichend klein, und für wechselnde Einfallrichtungen gibt es eine ganze (Halb-)Kugel- fläche solcher Fast-Brennpunkte.

Für exakte Abbildungen aus dem Unendlichen muss man zum anderen Grenzfall der Ellipse übergehen. Nicht der Kreis, sondern die Parabel liefert – zur Rotationsfläche erweitert – das Gewünschte. Das Rotationsparaboloid ist der Grenzfall eines Ellipsoids mit unendlichen a und e , aber endlichem $a - e$. Es bildet daher einen unendlich fernen Punkt auf der Innenseite seiner Symmetrieachse so exakt in seinen Brennpunkt ab, wie es die Wellenlänge gestattet. (Astronomische Objekte kann man in sehr guter Näherung als unendlich fern ansehen.) Alle anderen Tätigkeiten des Paraboloids sind nur näherungsweise exakt.

Beim Übergang vom Ellipsoid zum Paraboloid wandert ein Brennpunkt ins Unendliche aus – und kommt »von minus unendlich« wieder, wenn man über das Paraboloid hinaus zum zweischaligen Rotationshyperboloid übergeht. Allerdings ist das Bild unter der nach wie vor exakten Abbildung von Brennpunkt zu Brennpunkt jetzt ein virtuelles. Das hat 1672 der französische Priester Laurent Cassegrain (um 1629–1693) zur Konstruktion eines Zwei-Spiegel-Teleskops benutzt: Der Hauptspiegel ist ein Paraboloid, in dessen Brennpunkt der Brennpunkt einer auf ihrer konvexen Seite spiegelnden und zum Paraboloid coaxialen Hyperboloidschale sitzt. Deren ▷

... das unsichtbar bleibt, weil der Kreuzungspunkt stets mit dem Berührungspunkt der Ellipsen zusammenfällt.

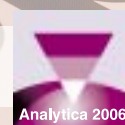


FOTOS DIESER DOPPELSEITE: KIRSTEN WAGENBRENNER / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT

Sind Sie auf folgenden Messen?



Messe Hannover **24.–28.04.06**
Halle 02, A51



Neue Messe München **25.–28.04.06**
Halle A1, 507



22. ATT Astronomie-
börse Essen, 13.05.06

Dann schauen Sie doch einfach einmal beim Spektrum-Stand vorbei. Wie immer halten wir für unsere Abonnenten eine kleine Überraschung bereit.

MATHEON-MEDIENPREIS 2006

für Nachwuchsjournalistinnen und Nachwuchsjournalisten

Der MATHEON-MEDIENPREIS 2006 würdigt herausragende journalistische Arbeiten für Printmedien zum Thema Mathematik in technologischen Anwendungen.

Die eingereichten Beiträge sollen in verständlicher Form für eine breite Öffentlichkeit geschrieben sein. Arbeiten, die fachübergreifende Aspekte hervorheben, werden bevorzugt.

Prämiert werden drei Beiträge.

Der erste Preis ist mit 1500 € dotiert, der zweite Preis mit 1000 € und der dritte mit 500 €. Es ist geplant, prämierte Arbeiten in der Zeitschrift Spektrum der Wissenschaft zu veröffentlichen, vorbehaltlich der Zustimmung der Redaktion.

Einsendeschluss ist der 30.6.2006
(Poststempel oder E-Mail)

Weitere Informationen unter
www.matheon-medienpreis.de
kontakt@matheon-medienpreis.de



DFG-Forschungszentrum **MATHEON**
Mathematik für Schlüsseltechnologien

Spektrum
DER WISSENSCHAFT

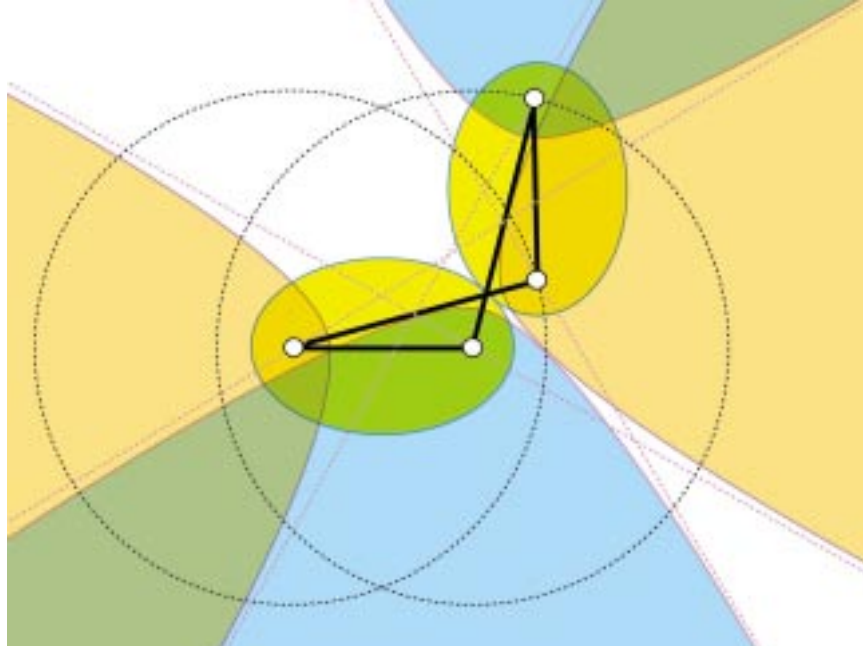
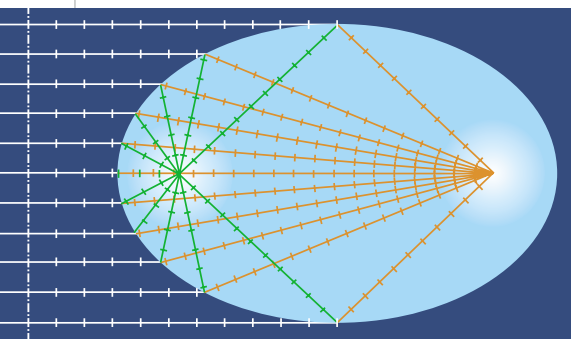
► Nicht nur zwei Ellipsen, auch zwei Hyperbeln rollen, durch das Antiparallelogramm geführt, aneinander ab.

▷ anderer Brennpunkt liegt auf der Achse, aber jenseits des Parabolspiegels, der aus diesem Grund in der Mitte eine Öffnung hat. Damit wird die effektive Brennweite des Fernrohrs erheblich vergrößert, analog zu der als Telekonverter benutzbaren Zerstreuungslinse, die man zwischen eine Kamera und ein Normal- oder zu schwaches Teleobjektiv setzen kann.

Mit den exakten Abbildungen durch Reflexionen ist es also nicht weit her. Es gibt sie nur zwischen den beiden Brennpunkten eines Kegelschnitts beziehungsweise der Fläche, die man durch Rotation des Kegelschnitts um seine durch die Brennpunkte gehende Achse erzeugen kann: Ellipsoid und Hyperboloid mit Paraboloid und Kugel als Grenzfällen.

Mit der Brechung sieht es nicht unbedingt besser aus: Sphärische, das heißt von Kugelschalen begrenzte Linsen haben überhaupt nur näherungsweise Brennpunkte, wofür ihnen Bezeichnungen wie »Linsenfehler« auch noch die Schuld in die Schuhe schieben. Kann

► Eine ellipsoidförmige Linse bildet einen unendlich fernen Punkt exakt in ihr Inneres ab. Die strichpunktierte Linie links bezeichnet die Leitebene. Von ihr aus bis zum Eintritt des Strahls in das Ellipsoid ist es n -mal so weit wie vom linken Brennpunkt zur Eintrittsstelle (n ist die Brechzahl). Das Licht vom unendlichen fernen Punkt schwingt also an jeder Stelle synchron mit einer gedachten Lichtwelle (grün), die im linken Brennpunkt ihren punktförmigen Ursprung hat, und wird wie diese exakt im rechten Brennpunkt fokussiert (orange).



GRAPHIKEN DIESER SEITE: SIGANIM / SPEKTRUM DER WISSENSCHAFT, NACH NORBERT TREITZ

man denn mit Brechung wenigstens einen »unendlich fernen« Punkt exakt in einen Punkt abbilden? So genau, wie es die Wellenoptik zulässt und die Strahlenoptik im Fall der genannten Spiegel behauptet? Es geht, und wieder vollbringt das Ellipsoid das Wunder.

Eine Parabel besteht aus den Punkten, die von einer gegebenen (»Leit«-) Geraden den gleichen Abstand haben wie von einem festen (»Brenn«-) Punkt. Verlangt man nun statt des gleichen Abstands ein festes Verhältnis der Abstände, bekommt man statt der Parabel einen Ellipsen- oder Hyperbelbogen. Das vorgegebene Verhältnis findet sich dabei als das zwischen dem Abstand $2e$ beider Brennpunkte und dem Abstand $2a$ beider Hauptscheitel wieder. Und dieses feste Verhältnis muss gleich der so genannten Brechzahl sein, das heißt gleich dem Verhältnis der Lichtgeschwindigkeiten in Luft und Glas. Genau dann sind es nämlich von der Leitebene bis zum Eintrittspunkt in die »Linse« ebenso viele Wellenlängen wie vom näher gelegenen Brennpunkt des Ellipsoids bis zu diesem Eintrittspunkt. Der andere Brennpunkt ist daher der gesuchte Bildpunkt (Bild links). Obwohl das seit Descartes bekannt ist, findet man es in Physikbüchern eher selten (siehe Literaturhinweise: Langkau, Lindström und Scobel).

Bisher hatten wir die vier Ecken des Antiparallelogramms als Brennpunkte zweier Ellipsen benutzt, wobei die kurzen Seiten als Brennpunktsabstände und die langen als ihre großen Achsen, also Scheitelabstände, auftreten. Nun drehen wir den Spieß um und ernennen die Länge der langen Seite zum Brennpunktsabstand und die der kurzen zum Scheitelabstand. Die Kegelschnitte mit diesem In-

ventar sind Hyperbeln. Bei der Bewegung des Antiparallelogramms rollen auch sie aneinander ab, wobei sie allerdings mit den anderen beiden Beinen (Halbästen) übereinander streichen können. Zugleich rollen auch die Ellipsen aneinander ab (Bild oben). Zu dem Spezialfall der rechtwinkligen oder gleichseitigen Hyperbel (mit $e^2 = 2a^2$, also $a = b$ und der Asymptotensteigung $b/a = 1$) gehört nicht etwa der Kreis, sondern die spezielle Ellipse mit $\sqrt{2}$ als Achsenverhältnis, also mit $b = e$, bei der die Brennpunkte und die Nebenscheitel ein Quadrat bilden.

Damit sind die Fähigkeiten des Antiparallelogramms noch lange nicht erschöpft! Im nächsten Monat werden wir sehen, wie unser Gelenkviereck als Umwandler von geraden in kreisförmige Bewegungen, insbesondere für Dampfmaschinen und ähnliche Geräte, nützliche Dienste leistet. ◁



Norbert Treitz ist apl. Professor für Didaktik der Physik an der Universität Duisburg-Essen. Seine Vorliebe für erstaunliche und möglichst freihändige Versuche und Basteleien sowie für anschauliche Erklärungen dazu nutzt er nicht

nur für die Ausbildung von Physiklehrkräften, sondern auch zur Förderung hoch begabter Kinder und Jugendlicher.

Physik kompakt: Elektromagnetische Wellen. Von Rudolf Langkau, Gunnar Lindström und Wolfgang Scobel. Vieweg, Braunschweig 1996; S. 221

Refraction properties of conics. Von David Mountford in: Mathematical Gazette, Bd. 68, S. 134, 1984

Weblinks zu diesem Thema sowie bewegte Bilder zu den abrollenden Ellipsen finden Sie bei www.spektrum.de unter »Inhaltsverzeichnis«.