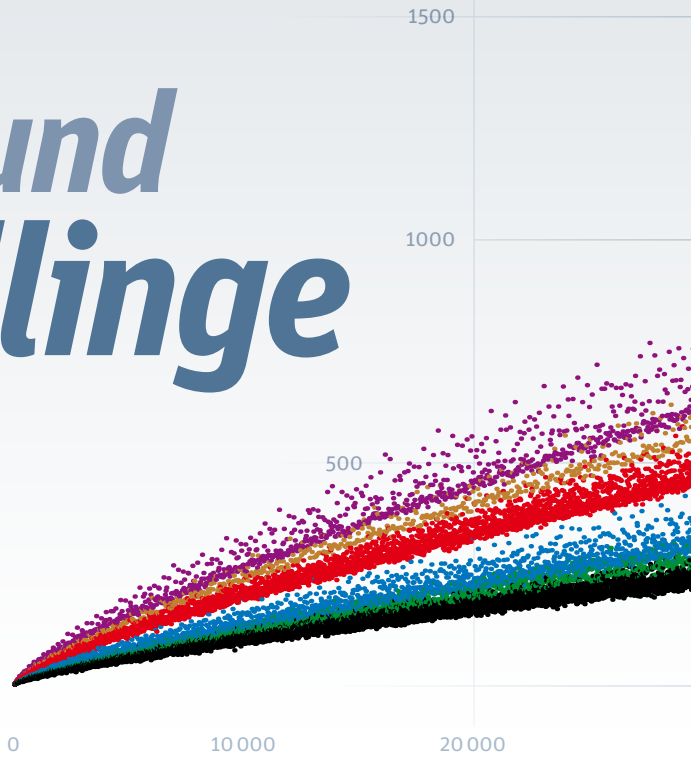
Goldbach und die Zwillinge



Primzahlen sind die geheimnisvollen Grundbausteine der Mathematik. So weiß bis heute niemand, ob sich jede ganze Zahl als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt und wie viele Zwillinge unter ihnen zu finden sind.

Von Wolfgang Blum

Einfach klingende Fragen können sich in der Mathematik als äußerst vertrackt herausstellen. Die besten Beispiele stammen aus der Forschung über Primzahlen, jene natürlichen Zahlen, die sich nur durch 1 und sich selbst ohne Rest teilen lassen: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 … Für Don Zagier vom Max-Planck-Institut für Mathematik in Bonn »gehören sie trotz ihrer einfachen Definition zu den willkürlichsten, widerspenstigsten Objekten, die der Mathematiker studiert. Sie wachsen wie Unkraut unter den natürlichen Zahlen, scheinen keinem anderen Gesetz als dem Zufall unterworfen«. Zugleich zeigten sie aber »die ungeheuerlichste Regelmäßigkeit auf und sind durchaus Gesetzen unterworfen, denen sie mit fast peinlicher Genauigkeit gehorchen«.

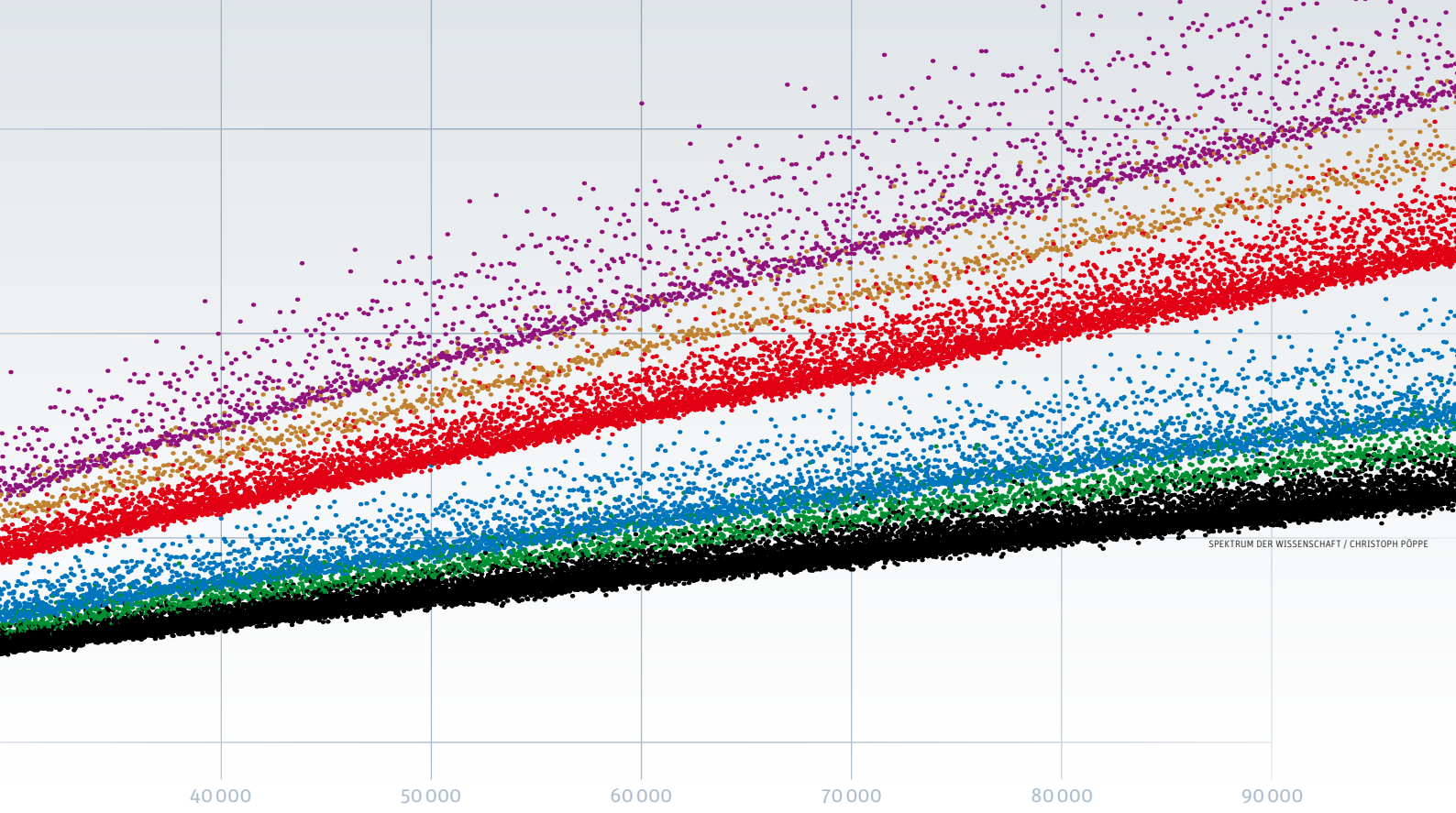
Im Jahr 1742 schrieb der deutsche Gelehrte Christian Goldbach (1690–1746) an seinen Freund, den berühmten Mathematiker Leonhard Euler (1707–1783), er vermute, jede ganze Zahl größer als 5 lasse sich als Summe von drei Primzahlen schreiben. Euler formulierte in seiner Antwort an Goldbach dessen Aussage in eine gleichwertige Behauptung um: »Jede gerade Zahl ≥ 4 ist die Summe zweier Primzahlen.« Beispiele: $8 = 5 + 3$, $22 = 11 + 11$ und $100 = 53 + 47$. An einem Beweis scheiterte Euler genauso wie alle seine Nachfolger in den nächsten 266 Jahren. Bis heute haben sich die Mathematiker zwar an die Vermutung herangepirscht, an einem vollständigen Beweis bissen sich indes auch die größten Meister die Zähne aus.

Dabei hätte dem Bezwinger der Vermutung nicht nur der Ruhm und die Anerkennung der Fachwelt gewunken, sondern zeitweise sogar eine Million Dollar. Diesen Preis lobten im Jahr 2001 zwei Verlage aus. Die Unternehmen wollten damit freilich weniger den Fortschritt der Mathematik fördern als Werbung treiben für den bei ihnen erschienenen Roman »Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung« von Apostolos Doxiadis, in dem die Hauptperson mit dem Beweis ringt (Spektrum der Wissenschaft 4/2001, S. 108). Da binnen eines Jahres niemand die Vermutung knackte, zogen die Verlage ihren Preis zurück.

Goldbachs Vermutung ist eng verknüpft mit einem anderen Primzahlenproblem, das ebenfalls so manchen Wissenschaftler ergrauen ließ: »Gibt es unendlich viele Primzahl-

SERIE: DIE GRÖSSTEN RÄTSEL DER MATHEMATIK

Teil I:	Interview mit Gerd Faltings Die riemannsche Vermutung	SdW 09/2008
Teil II:	Das Komplexitätsproblem P = NP	SdW 10/2008
Teil III:	Goldbachsche Vermutung und Primzahlzwillingsvermutung	SdW 12/2008
Teil IV:	Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer	SdW 01/2009
Teil V:	Das abc-Problem	SdW 02/2009
Teil VI:	Das Yang-Mills-Problem	SdW 03/2009
Teil VII:	Das Navier-Stokes-Problem	SdW 04/2009



Über jeder geraden Zahl *n* zwischen 4 und 100 000 ist hier die Anzahl *G*(*n*) der Möglichkeiten aufgetragen, *n* als Summe zweier Primzahlen auszudrücken. Ein Datenpunkt ist rot gefärbt, wenn *n* durch 3 teilbar ist; Vielfache von 5 sind blau und Vielfache von 7 grün dargestellt. Mischfarben kennzeichnen die Zahlen, die durch mehrere dieser kleinen Primzahlen teilbar sind: violett für Vielfache von $3 \cdot 5 = 15$, goldbraun für solche von $3 \cdot 7 = 21$. Bei aller scheinbar zufälligen Streuung der Datenpunkte sind doch Trends erkennbar: Eine gerade Zahl hat umso mehr Zerlegungen, je mehr kleine Teiler sie hat.

zwillinge?« Schon Euklid bewies vor über 2000 Jahren, dass die Folge der Primzahlen niemals endet, es also unendlich viele davon gibt. Wie ist es aber mit Primzahlpaaren mit dem Abstand 2? Die ersten solchen Zwillinge sind: 3 und 5, 5 und 7, 11 und 13, 17 und 19, 41 und 43, 71 und 73. Lassen sich auch da unendlich viele finden?

Obwohl die Frage naheliegt, wissen wir nicht, ob sich die Griechen der Antike bereits den Kopf darüber zerbrachen. Erstmals schriftlich formuliert hat sie Alphonse de Polignac (1817–1890) im Jahr 1849. Der Franzose vermutete allgemeiner, dass es für jeden geraden Abstand unendlich viele Primzahlenpaare gebe.

Mathematik zur Entspannung

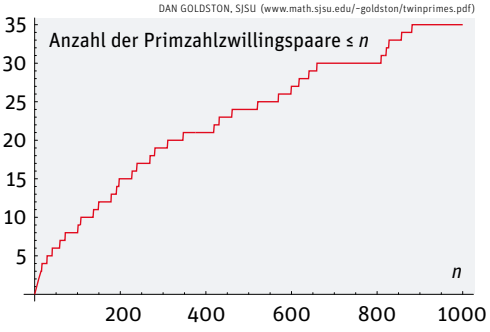
Doch die Primzahlen, die scheinbar willkürlich mal nahe beieinander, dann wieder mit großen Lücken in den natürlichen Zahlen verstreut sind, schlugen den Forschern immer wieder ein Schnippchen. Trotz Fortschritten knabbert die Zunft bis heute vergebens an einem Beweis für Polignacs Vermutung.

Zurück zu Goldbach: Der Deutsche aus Königsberg hatte hauptsächlich Jura und Medizin studiert, mit Mathematik beschäftigte er sich nur zur Entspannung. Dabei liebte er es, mathematische Vermutungen aufzustellen, eine Leidenschaft, die er mit Euler teilte. Nicht immer lagen die Freunde dabei richtig. So behauptete Goldbach in einem späteren Brief an Euler, jede ungerade Zahl lasse sich als die Summe aus einer Primzahl und dem Doppelten einer Quadratzahl schreiben. So ist etwa $11 = 3 + 2 \cdot 2^2$ oder $23 = 5 + 2 \cdot 3^2$. Euler antwortete ihm, er habe die Behauptung für alle Zahlen bis 1000 geprüft. Später bestätigte er sie sogar bis 2500. Dennoch ist sie falsch, wie der Göttinger Mathematiker Moritz Stern (1807–1894) ein Jahrhundert später herausfand. Die Zahlen 5777 und 5993 lassen sich nicht als eine derartige Summe schreiben. Bis heute sind jedoch keine weiteren Gegenbeispiele bekannt.

Seine berühmteste Vermutung stellt indes niemand in Frage. Bis zum Ende des 19. Jahrhundert hatten fleißige Rechner sie für alle Zahlen bis 10 000 geprüft. In den vergangenen Jahrzehnten verifizierten sie Wissenschaftler mit Computerhilfe für mehr als die erste Trillion Zahlen, genauer für alle Zahlen unter $1{,}2 \cdot 10^{18}$.

Ordnen wir jeder natürlichen Zahl n die Anzahl der Möglichkeiten zu, sie als Summe zweier Primzahlen zu schreiben, ist damit die Goldbach-Funktion $G(n)$ definiert. Für kleine

DAN GOLDSTON, SJSU (www.math.sjsu.edu/~goldston/twinprimes.pdf)



Wie die Primzahlen selbst sind Primzahlzwillinge relativ häufig unter den kleinen Zahlen und werden allmählich seltener. Schon früh, etwa zwischen 670 und 800, gibt es weite Bereiche ohne ein einziges Zwillingspaar.

Chen Jing Run (1933 – 1996), auf dieser chinesischen Briefmarke abgebildet mit einer der Schätzformeln für die Anzahl der Primzahlzwillinge, konnte eine gemilderte Form der goldbachschen Vermutung beweisen.

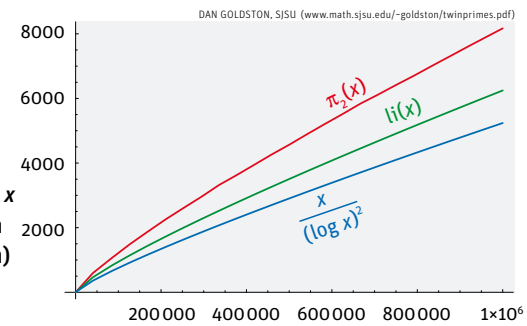
Zahlen lässt sich der Wert von G mühelos bestimmen. So ist etwa $G(4) = 1$, denn außer $4 = 2 + 2$ gibt es keine weitere Möglichkeit, die 4 als Summe zweier Primzahlen zu schreiben. $G(6)$ und $G(8)$ sind ebenfalls gleich 1 ($6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$). $G(10)$ hingegen ist 2, denn $10 = 3 + 7 = 5 + 5$. Die goldbachsche Vermutung lautet nun: $G(n) > 0$ für alle geraden Zahlen n, die größer als 2 sind.

$G(n)$ ist außer für ganz kleine n meist angenehm groß. $G(1000)$ etwa ist bereits 28, $G(10\,000)$ gar 127. Dass es da ausgerechnet eine Zahl geben soll, für die G null wird, ist kaum denkbar. Den Computerrechnungen zufolge müsste sie größer als eine Trillion sein. Und unter den berechneten Zahlen gibt es keine einzige, für die $G(n)$ der Null auch nur nahekäme, im Gegenteil (Bild S. 94/95 oben).

Ein stochastisches Argument spricht ebenfalls für Goldbach. Man tut dabei so, als seien die Primzahlen zufällig verteilt. Das stimmt zwar nicht; aber die Primzahlen erscheinen so regellos auf der Zahlengeraden verstreut, dass ihre Anordnung von einer zufälligen praktisch nicht zu unterscheiden ist. Mit der Fiktion einer Zufallsverteilung kann man zwar nichts beweisen, aber erstaunlich gute Schätzungen gewinnen.

Nach dem Primzahlsatz von Carl Friedrich Gauß (1777 – 1855) gilt, dass die Anzahl der Primzahlen, die kleiner sind als eine Zahl n, ungefähr gleich n geteilt durch den Logarithmus von n ist (Spektrum der Wissenschaft 9/2008, S. 86). In Formeln: $\pi(n) \approx n / \log n$. Dabei bezeichnet $\log n$ den natürlichen Logarithmus, das heißt den Logarithmus zur Basis e. Zum Beispiel beträgt der Schätzwert für die Anzahl der Primzahlen unter einer Million $1\,000\,000 / \log 1\,000\,000 \approx 72\,382$; der korrekte Wert ist 78 498.

$G(2\,000\,000)$ ist nur dann null, wenn für jede dieser über 70 000 Primzahlen p die Zahl $2\,000\,000 - p$ nicht prim ist. Da p als Primzahl auf alle Fälle ungerade ist, muss auch $2\,000\,000 - p$ ungerade sein. Aus dem gaußschen Primzahlsatz lässt sich folgern, dass die Wahrscheinlichkeit für eine große ungerade Zahl n, Primzahl zu sein, ungefähr $2 / \log n$ beträgt. Zum Beispiel liegt die Wahrscheinlichkeit, dass $1\,000\,001$ eine Primzahl ist, bei rund $2 / \log 1\,000\,001 = 0{,}1447\ldots$



Die Anzahl der Primzahlzwillinge $\pi_2(x)$ (hier bis zu einer Million; rot) übertrifft für jedes x die Werte der Schätzfunktionen $\mathrm{li}(x)$ (Integrallogarithmus; grün) und $x/(\log x)^2$ (blau).

Nun können wir die Wahrscheinlichkeit dafür kalkulieren, dass die Goldbach-Funktion bei 2 000 000 gleich null ist. Zu jeder der reichlich 78 000 Primzahlen p unterhalb einer Million untersuchen wir, ob $2\,000\,000 - p$ prim ist. Gilt dies für eine der Zahlen, so haben wir ein Goldbach-Paar gefunden, und $G(2\,000\,000)$ kann nicht mehr null sein. Die potenziellen Partner unserer gut 78 000 Primzahlen sind alle ungerade und liegen zwischen 1 000 000 und 2 000 000. Für jede von ihnen bewegt sich die Wahrscheinlichkeit, eine Primzahl zu sein, zwischen $2 / \log 1\,000\,000 = 0{,}1447\ldots$ und $2 / \log 2\,000\,000 = 0{,}1378$. Die erwartete Anzahl von Primzahlen beträgt somit mindestens $78498 \cdot 0{,}1378 = 10\,817$. $G(2\,000\,000)$ sollte daher vier- oder sogar fünfstellig sein und keineswegs null.

Primzahlen als Zufallstreffer

Aus der Annahme von der zufälligen Verteilung der Primzahlen folgt auch eine stochastische Unabhängigkeit: Ob eine Zahl eine Primzahl ist und eine andere auch, sind sozusagen zwei voneinander unabhängige Ereignisse. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beide zusammen auftreten, ist dann gleich dem Produkt der Einzelwahrscheinlichkeiten.

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine ungerade Zahl zwischen einer und zwei Millionen keine Primzahl ist, beträgt, wie oben berechnet, höchstens $1 - 0{,}1378\ldots$ Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass für die Zahl 2 000 000 keiner der potenziellen Goldbach-Partner der 78 498 Primzahlen unter einer Million prim ist, gleich $(1 - 0{,}1378)^{78\,498} \approx 2 \cdot 10^{-5055}$. Das Risiko, dass G für die Zahl 2 000 000 tatsächlich auf null sinkt, ist demnach mit 1 zu $0{,}5 \cdot 10^{5055}$ unvorstellbar gering.

Der Engländer Neil Sheldon hat mit dieser Methode im Jahr 2003 die Wahrscheinlichkeit überschlagen, dass die goldbachsche Vermutung für Zahlen größer als $4 \cdot 10^{14}$ scheitert. Für kleinere Zahlen war sie damals bereits durch Computerberechnungen belegt. Sein Ergebnis: 1 zu $10^{150\,000\,000\,000}$. »Diese Wahrscheinlichkeit ist 1 zu einer Million Millionen Millionen …, wobei man 25 Milliarden mal Million zu sagen hat«, resumiert er. Hätte Goldbach 1742 angefangen, die Zahl auszusprechen und zweimal pro Sekunde das Wort »Million« über die Lippen gebracht, wäre er heute noch lange nicht fertig.

So überzeugend die Überlegung klingt, sie ist ebenso wenig wie die Computerjagd ein Beweis. Dem Ziel, einen solchen zu finden, kamen die Mathematiker in den ersten 150 Jahren nach Goldbachs berühmtem Brief

kaum näher. Erst im 20. Jahrhundert gelangen die ersten Fortschritte. So bewiesen Godfrey Hardy (1877–1947) und John Littlewood (1885–1977), dass jede genügend große ungerade Zahl die Summe dreier Primzahlen ist. Dabei mussten die beiden englischen Zahlentheoretiker allerdings voraussetzen, dass die bis heute unbewiesene riemannsche Vermutung richtig ist (Spektrum der Wissenschaft 9/2008, S. 86). Iwan Winogradow (1891–1983) erreichte 14 Jahre später das gleiche Ziel, ohne die Gültigkeit der riemannschen Vermutung vorauszusetzen. Was genügend groß heißt, haben Wissenschaftler anschließend näher untersucht und Schranken dafür angegeben. Die niedrigste ist aber mit ihren mehr als 7000 Stellen immer noch riesig. 1997 schließlich bewiesen vier Mathematiker die so genannte schwache goldbachsche Vermutung – jede ungerade Zahl größer 5 ist Summe dreier Primzahlen – auch ohne untere Schranke. Allerdings mussten sie eine Vermutung voraussetzen, die der von Riemann ähnlich ist.

Einen anderen Ansatz verfolgte der Russe Lew Schnirelman (1905–1938). Er bewies in den 1930er Jahren, dass jede genügend große Zahl Summe von höchstens 300 000 Primzahlen ist. Seitdem versuchen die Mathematiker, Schnirelmans Grenze von 300 000 auf einen handlicheren Wert zu drücken. Seit gut zehn Jahren ist bekannt, dass sechs Primzahlen auf alle Fälle ausreichen.

Der Norweger Viggo Brun (1882–1978) überlegte sich hingegen, die Voraussetzung »Primzahl« aufzuweichen. Eine Primzahl besteht nur aus einem einzigen Faktor; dann ist doch irgendwie eine Zahl, die aus nur zwei Faktoren besteht, »fast eine Primzahl«. Brun bezeichnete eine Zahl als k-Fastprimzahl, wenn sie das Produkt von genau k Primzahlen ist. So ist 12 eine 3-Fastprimzahl, denn $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$, und 420 eine 5-Fastprimzahl, da $420 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Brun bewies 1919, dass sich jede genügend große gerade Zahl als Summe zweier 9-Fastprimzahlen schreiben lässt. Er entwickelte dabei eine Vorlage aus der Antike weiter: Das Sieb des Eratosthenes filtert die Primzahlen aus den natürlichen Zahlen heraus, in dem aus letzteren zuerst alle Vielfachen von 2, dann alle Vielfachen von 3, von 5, von 7 und so weiter gestrichen werden. Die Zahlen, die nach dem Aussieben übrig bleiben, sind die Primzahlen.

Knapp 60 Jahre später verbesserte Chen Jing Run (1933–1996) das Ergebnis von Brun. Statt zweier 9-Fastprimzahlen genügten dem Chinesen eine Primzahl und eine 2-Fastprimzahl. »Das war ein spektakulärer Durchbruch«, erinnert sich Pieter Moree vom Bonner Max-Planck-Institut für Mathematik. Bis heute sei es leider der letzte gewesen.

Chen bewies überdies, dass es unendlich viele Primzahlen p gibt, für die $p+2$ eine 2-Fastprimzahl ist. Damit kam er einem Beweis, dass es unendlich viele Primzahlzwillinge gibt, bereits sehr nahe.

Niemand zweifelt ernsthaft an der Gültigkeit der goldbachschen Vermutung. Aber bewiesen ist sie immer noch nicht

Beim Problem der Primzahlzwillinge geht es den Mathematikern ähnlich wie bei Goldbachs Vermutung. Sie sind sich eigentlich über das Ergebnis sicher, allein es fehlt der Beweis. Bis heute haben sie auf rund 100 mehr oder weniger verschiedene Arten bewiesen, dass es unendlich viele Primzahlen gibt. Doch keine einzige der Arbeiten ließ sich auf die Zwillinge ummünzen.

Zahlenjagd im Internet

Als Kandidaten für Primzahlzwillinge kommen nur Zahlen der Form $6n-1$ und $6n+1$ in Frage. Denn teilt man eine Primzahl durch 6, muss der Rest 1 oder 5 ergeben. Beim Rest 0 könnte man die Zahl nämlich durch 6 teilen, bei den Resten 2 und 4 durch 2 und beim Rest 3 durch 3. Zwischen den Partnern eines Zwillingspaars muss also ein Vielfaches von 6 liegen. Also lässt sich der größere als $6n+1$ schreiben und der kleinere als $6n-1$.

Die Jagd nach sehr großen Primzahlzwillingen läuft heute über das Internet. Jeder Interessierte kann sich das Programm herunterladen und seinen Computer nach Zwillingen forschen lassen, wenn er gerade Rechenkapazität frei hat. Derzeit liegt der Rekord bei $2\,003\,663\,613 \cdot 2^{195\,000} \pm 1$, das sind zwei Zahlen mit immerhin fast 59 000 Dezimalstellen.

GEMÄLDE VON EMANUEL HANDMANN, 1753

Falscher Verdacht

Leonhard Euler (1707 – 1783) gilt als der produktivste Mathematiker aller Zeiten. Seine gesammelten Werke umfassen mehr als 70 Bände. Fast die Hälfte davon entstand, als er bereits über 60 Jahre alt und erblindet war. Sein Gebrechen nahm er übrigens mit einem ganz eigenen Humor. Als er die Sehkraft auf dem rechten Auge infolge eines Fiebers verlor, kommentierte er trocken: »Nun werde ich weniger abgelenkt sein.«

Zuweilen langen aber auch Meister daneben. So behauptete Euler, es gebe keine ganzen Zahlen x, y, z und w, die folgende Gleichung erfüllten: $x^4 + y^4 + z^4 = w^4$. Mehr als 200 Jahre lang blieb die Vermutung offen. Erst im Jahr 1988 fand Noam Elkies von der Harvard University ein Gegenbeispiel: $2\,682\,440^4 + 15\,365\,639^4 + 18\,796\,760^4 = 20\,615\,673^4$. Für Mathematiker ist eine Behauptung eben noch lange nicht richtig, bloß weil sie für die ersten paar Millionen Zahlen gilt.

Sie beide aufzuschreiben würde fünfmal so viel Platz benötigen wie dieser Artikel.

Primzahlzwillinge gibt es deutlich seltener als Primzahlen. Unter den ersten hundert Zahlen sind nur acht Pärchen gegenüber 25 Primzahlen. Unterhalb einer Milliarde gibt es mehr als 50 Millionen Primzahlen, aber nur knapp dreieinhalb Millionen Zwillingspaare (Bilder S. 95 unten und S. 96 unten). Addiert man die Kehrwerte der Primzahlen, wächst die Summe über alle Grenzen:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+\ldots=\infty\ ,$$

wie Euler 1737 bewies. Als dagegen Viggo Brun 1919 die Kehrwerte der Primzahlzwillinge summierte, stellte er fest, dass der sich ergebende Wert beschränkt bleibt:

$$\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{11}+\frac{1}{13}\right)$$
$$+\left(\frac{1}{17}+\frac{1}{19}\right)+\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{43}\right)+\ldots=B$$

Heute ist dieser Wert B als brunsche Konstante bekannt und bis auf viele Nachkommastellen berechnet: $B=1{,}90216\ldots$ Und das, obwohl nach wie vor nicht sicher ist, ob es unendlich viele Zwillinge gibt, ob also unendlich viele Summanden zu addieren sind. Denn in der Mathematik sind viele unendliche Summen bekannt, die einen endlichen Wert ergeben. So addiert sich etwa die Summe der Kehrwerte von Zweierpotenzen zu 2:

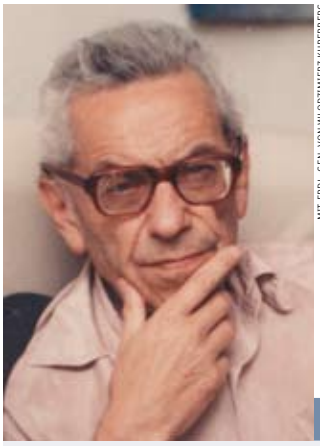
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\ldots=2$$

Die Fachwelt spricht vom brunschen Witz und vergleicht die Situation mit jemandem, der zwar keine Ahnung hat, wie viel Geld er im Portmonee hat, aber trotzdem weiß, wie viel er sich davon kaufen kann.

Die brunsche Konstante wurde 1994 sogar relevant für die Praxis. In jenem Jahr wollte Thomas Nicely sie genau ausrechnen und verwendete dazu sicherheitshalber zwei verschiedene Computer. Als der Mathematikprofessor aus Virginia die Kehrwerte von 824 633 702 441 und 824 633 702 443 berechnete, lieferten seine Rechner in beiden Fällen unterschiedliche Ergebnisse. Der Grund dafür war ein Fehler in der Hardware des Pentium-Prozessors von Intel. Der Firma brachte der »Pentium-Bug« nicht nur Verluste in Millionenhöhe ein, sondern auch weltweiten Spott. »Intel inside – can't divide« (kann nicht dividieren) war noch einer der harmloseren Sprüche, die damals kursierten.

In den letzten Jahren glaubten Mathematiker mehrfach, das Problem mit der Unendlichkeit der Primzahlzwillinge endlich geknackt zu haben. So veröffentlichte Richard Arenstorf, emeritierter Professor der Vanderbilt University in Nashville (Tennessee), vor vier Jahren einen Beweis, der sich auf die riemannsche Zeta-Funktion stützt (Spektrum der Wissenschaft 9/2008, S. 86). Doch steckte ein Fehler in der Beweisführung, den er bis heute nicht ausbügeln konnte. Nicht besser erging es dem Kalifornier Daniel Goldston und dem Türken Cem Yıldırım.

Umsonst waren die Mühen indes nicht. Denn die Wissenschaftler haben Theorien entwickelt, mit denen sich andere mathematische Sätze und vielleicht sogar eines Tages die Unendlichkeit der Primzahlzwillinge verifizieren lassen. So halfen die Methoden von Goldston und Yıldırım zu beweisen, dass es in den Primzahlen beliebig lange arithmetische Folgen gibt, also Folgen von Zahlen mit gleichem Abstand (Spektrum der Wissen-



MIT FRDL. GEN. VON WLODZIMIERZ KUPERBERG

Das Buch der Beweise

Paul Erdös (1913–1996) war ein bemerkenswerter Zeitgenosse. Fast 60 Jahre seines Lebens reiste der ungarische Mathematiker durch die Welt, besuchte Kollegen und stellte mit ihnen neue Theoreme auf, viele davon über Primzahlen. Einen festen Wohnsitz hatte er nicht.

Sein größtes Ziel dabei war, einen Blick in das BUCH zu werfen, in dem Gott die elegantesten Beweise aufbewahre. Von Gott, an den er gar nicht glaubte, sprach er nur als dem SF, dem *»supreme fascist«* (obersten Faschisten). Eine von dessen Grausamkeiten sei es, der Menschheit das BUCH vorzuenthalten. Nur mit viel Intelligenz und Fleiß gelinge es Mathematikern, ab und zu einen Blick hinein zu erhaschen.

Nach Erdös' Tod 1996 brachten Kollegen von ihm eine irdische Fassung des BUCHs heraus (Bild rechts). Sie beginnt mit dem euklidischen Beweis für die Unendlichkeit der Primzahlen, der für den kleinen Paul ein Schlüsselerlebnis darstellte. »Als ich zehn war, erzählte mir mein Vater vom euklidischen Beweis, und ich hatte angebissen«, erinnerte sich Erdös einmal. Auf den Beweis des Griechen folgen fünf weitere Nachweise dafür, dass die Reihe der Primzahlen endlos ist. Keine dieser schönen Argumentationen konnten die Mathematiker aber bis heute auf die Primzahlzwillinge umstricken.

schaft 4/2005, S. 114). 199, 409, 619, 829, 1039, 1249, 1459, 1669, 1879, 2089 ist zum Beispiel eine solche Primzahlfolge der Länge 10. Der Abstand zwischen zwei benachbarten Zahlen beträgt bei ihr stets 210.

Goldston und Yıldırım verwenden wie ihre Kollegen bei der Goldbach-Vermutung wahrscheinlichkeitstheoretische Methoden, insbesondere den gaußschen Primzahlsatz. Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl n als auch $n+2$ Primzahlen sind, gleich $(1/\log n) \cdot (1/\log(n+2))$, was für große n praktisch gleich $(1/\log n)^2$ ist (der Unterschied zwischen $\log n$ und $\log (n+2)$ ist vernachlässigbar). Daraus ergibt sich eine Schätzung für die Anzahl der Primzahlzwillinge $\leq n$: $\pi_2(n) \approx n/(\log n)^2$.

Primzahlen mit geringem Abstand

Wie ein Vergleich der Zahlenwerte zeigt (Bild S. 96 unten), handelt es sich um eine deutliche Unterschätzung. Der Grund liegt darin, dass die Fiktion der Unabhängigkeit für so eng benachbarte Zahlen nicht aufrechtzuerhalten ist. Wenn wir schon wissen, dass n eine Primzahl ist, dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass $n+2$ durch 2 teilbar ist, nicht 1/2, wie das für eine beliebig herausgegriffene Zahl der Fall wäre, sondern 0. Wir wissen ja schon, dass $n+2$ ungerade sein muss. Andererseits beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass $n+2$ durch 3 teilbar ist, nicht 1/3, wie der Unabhängigkeitsannahme entspräche, sondern 1/2. Denn wenn n eine Primzahl ist, ergibt n geteilt durch 3 entweder den Rest 1 oder 2, und nur bei Rest 2 ist auch $n+2$ nicht durch 3 teilbar.

Daraus ergibt sich ein Korrekturfaktor, den Mathematiker als 1,32032… berechnet haben. Also wäre $\pi_2(n) \approx 1{,}32\ldots \cdot n/(\log n)^2$. Leider ist das aber nur eine der vielen unbewiesenen Vermutungen der Primzahlforschung. Bislang ist lediglich eine grobe Abschätzung verifiziert: $\pi_2(n) \leq 4 \cdot 1{,}32\ldots \cdot n/(\log n)^2$.

Goldston und Yıldırım gingen das Problem von einer anderen, immer noch wahrscheinlichkeitstheoretischen Seite an. Unter den ersten 1 000 000 natürlichen Zahlen ist nach dem gaußschen Primzahlsatz ungefähr jede vierzehnte eine Primzahl, denn $\log(1\,000\,000) = 13{,}81\ldots$ Diese Zahl ist also der Durchschnittsabstand zweier benachbarter Primzahlen innerhalb der ersten Million. Bis zur ersten Billion steigt er auf das Doppelte an $(\log (10^{12}) = 27{,}63\ldots)$.

Die Frage ist nun, ob es auch große Primzahlen gibt, die deutlich näher beieinanderliegen als der Durchschnitt. Goldston und Yıldırım führten dazu eine Normierung durch. Statt direkt den Abstand benachbarter Primzahlen – nennen wir sie p_k und p_{k+1} – zu betrachten, teilten sie diesen durch den erwarteten Abstand $\log p_k$. Sie studierten damit die Zahlenfolge $(p_{k+1} - p_k)/\log p_k$.

Sollte es unendlich viele Primzahlzwillinge geben, müsste diese Folge unendlich oft beliebig nahe an die Null kommen. (Für Fachleute: Ihr Limes inferior sollte null sein.) Das und noch etwas mehr hätten sie bewiesen, kündigten die beiden Zahlentheoretiker auf einer Konferenz 2003 in Oberwolfach im Schwarzwald an. Als Andrew Granville von der Université de Montréal (Kanada) die Arbeit prüfte, bemerkte er eine Folgerung, die den Autoren entgangen war. Sollte ihre Argumentation korrekt sein, würde das bedeuten, dass der Abstand zwischen benachbarten Primzahlen unendlich oft kleiner oder gleich 12 wäre. Da nicht mit einer so weit reichenden Aussage zu rechnen war, habe er sich das Paper der beiden umso genauer vorgenommen, erzählt Granville.

Gemeinsam mit einem Kollegen aus den USA entdeckte er tatsächlich einen Fehler, der nicht ohne Weiteres auszubügeln war. Zwei Jahre nach der ersten Ankündigung und mit Hilfe des Ungarn Janos Pintz konnten Goldston und Yıldırım schließlich die Lücke stopfen und endgültig beweisen, dass die genannte Zahlenfolge der Null unendlich oft beliebig nahekommt.

Die Fachwelt zeigte sich hocherfreut über den Fortschritt. »Es war ein wunderbares neues Jahrtausend für unser Verständnis der Verteilung von Primzahlen«, urteilt Granville. Ob das bereits der Durchbruch bei den Primzahlzwillingen war, lasse sich aber nicht absehen, dämpft Pieter Moree die Erwartungen. Daniel Goldston äußert sich ebenfalls vorsichtig: »Eine reizvolle Seite der Zahlentheorie ist, dass es schwierig ist vorherzusagen, welche Probleme mit unserem gegenwärtigen Kenntnisstand gelöst werden können und welche derzeit noch jenseits jeder Hoffnung auf eine Lösung sind.« Goldbach und die Zwillinge bleiben weiter spannend. ◁

Primzahlmehrlinge

Bei Drillingen ist die Sache zunächst einfach. Sie tauchen nur ein einziges Mal in der unendlichen Reihe der Primzahlen auf, und das ganz am Anfang: 3, 5 und 7. Denn von den drei Zahlen n, $n+2$ und $n+4$ muss immer eine durch 3 teilbar sein. Weil das zu simpel wäre, haben Mathematiker die Definition abgeändert. Sie sprechen bei drei Primzahlen der Form n, $n+2$, $n+6$ oder n, $n+4$, $n+6$ von Drillingen. Beispiele sind 5, 7, 11 oder 13, 17, 19.

Vierlinge sind Primzahlen n, $n+2$, $n+6$, $n+8$, also zwei Zwillingspaare im Abstand 4. Beispiele sind 5, 7, 11, 13 oder 101, 103, 107, 109. Auch bei den Drillingen und Vierlingen ist unbekannt, ob es unendlich viele gibt.

Wolfgang Blum ist promovierter Mathematiker, Wissenschaftsjournalist und Gymnasiallehrer für Mathematik und Physik in Nürnberg. Aus seiner Feder stammen neben zahlreichen Artikeln in namhaften Zeitungen und Zeitschriften das Was-ist-was-Buch über Mathematik und der vergangenes Jahr bei DuMont erschienene »Schnellkurs Mathematik«.

Cipra, B., Mackenzie, D.: What's Happening in the Mathematical Sciences. Bd. 6. American Mathematical Society, Providence (RI) 2007.

Doxiadis, A.: Onkel Petros und die Goldbachsche Vermutung. Lübbe, Bergisch Gladbach 2001.

Granville, A.: A Good New Millenium for the Primes. In: The Madrid Intelligencer (Sonderausgabe von »The Mathematical Intelligencer«), S. 32 – 36, 2006.

Ribenboim, P.: Die Welt der Primzahlen. Springer, Heidelberg 2006.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/972374.