Turbulenzen um die FLUIDMECHANIK

Unter den gegenwärtig schwersten Problemen der Mathematik ist auch eines, das seine Brisanz aus der Natur der Flüssigkeiten und Gase bezieht. Gesucht ist eine Lösungstheorie für die Navier-Stokes-Gleichungen.

Von Thomas Sonar

Unter den »Millennium«-Problemen, auf deren Lösung das Clay Mathematics Institute im Jahr 2000 jeweils eine Million Dollar ausgesetzt hat, bewegen sich die meisten in großer Abstraktionshöhe, fern von jeder physikalischen Realität (siehe die bisherigen Folgen dieser Serie). Dagegen wirkt das – ebenfalls auf der Millenniumsliste zu findende – Problem der Navier-Stokes-Gleichungen in seiner Realitätsnähe geradezu ordinär. Diese Gleichungen beschreiben die Bewegung ganz gewöhnlicher Fluide; unter diesem Oberbegriff pflegt man Flüssigkeiten und Gase zusammenzufassen.

Wer wissen will, wie sich ein Fluid unter gewissen Bedingungen verhält, kann das im Prinzip durch ein physikalisches Experiment ausfindig machen. Und wo das unpraktikabel ist, helfen heute zahlreiche Computerprogramme. Bauingenieure berechnen mit ihnen die dynamischen Windlasten, die auf hohen Gebäuden liegen, und man kann die Strömungsverhältnisse um ein schnelles Auto (Bild S. 86), einen ICE oder ein Flugzeug bestimmen, ohne diese Geräte auch nur im Modell bauen zu müssen. Jedes Computerprogramm für CFD (*Computational Fluid Dynamics*, numerische Strömungsmechanik) muss Lösungsstrategien für die Navier-Stokes-Gleichungen anbieten, sonst wäre mit Autobauern und Ingenieurbüros kein Geschäft zu machen. Selbst Hollywood hat diese Gleichungen entdeckt, etwa wenn es um eine realistische Wasserströmung um den Bug der »Titanic« geht.

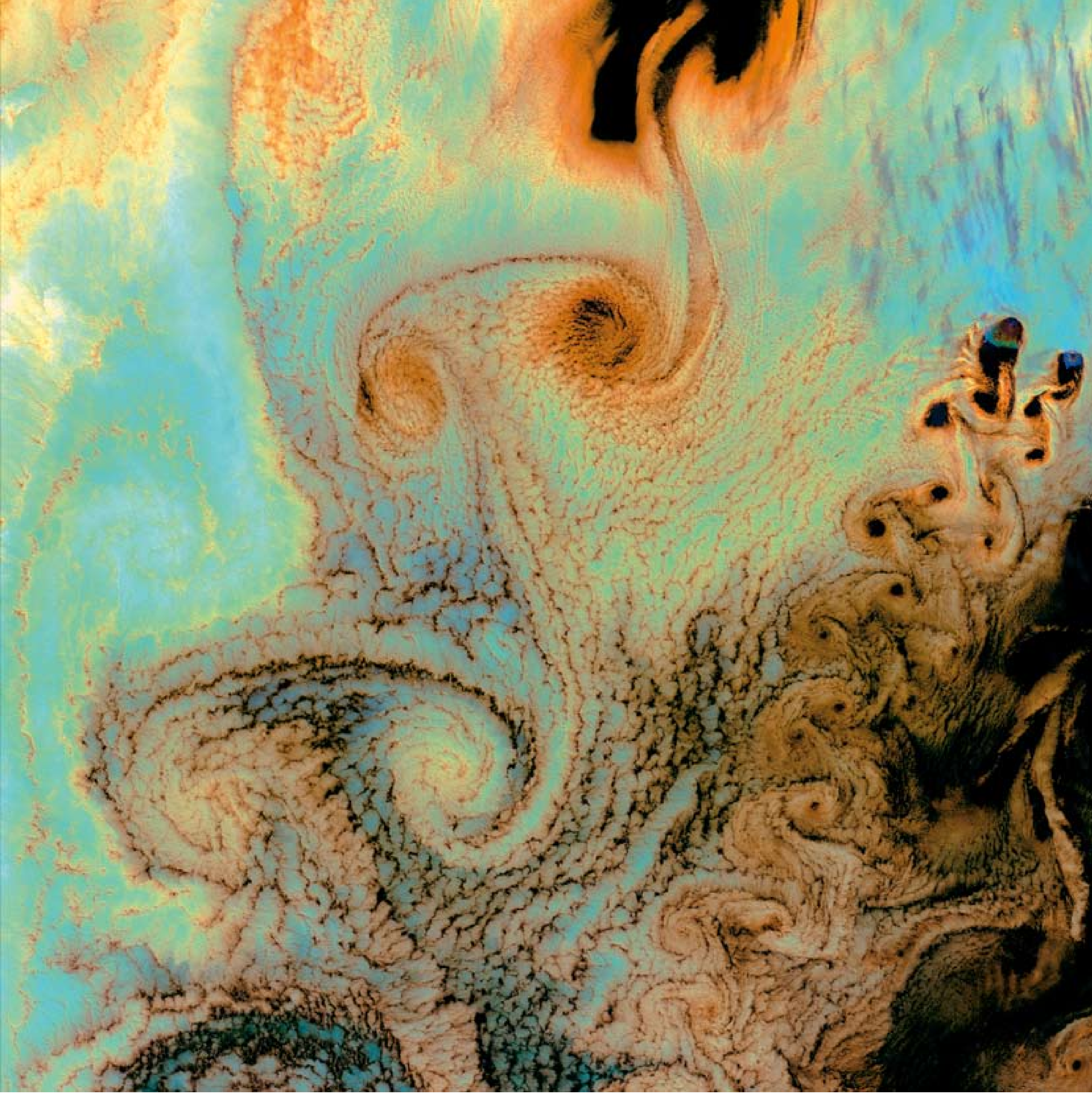
Die Lösungen dieser Gleichungen scheinen also höchstens noch Alltagswert zu haben. Warum finden sie sich dann auf der Liste der berühmten Clay-Probleme wieder? An Gleichungen, die mit jedem besseren Computerprogramm lösbar sind, würde doch sicher kaum ein gesteigertes Interesse bestehen?

Ein Vergleich mit einem sehr klassischen Gebiet möge zur Klarheit beitragen. Für die

SERIE: DIE GRÖSSTEN RÄTSEL DER MATHEMATIK

Teil I:	Interview mit Gerd Faltings Die riemannsche Vermutung	SdW 09/2008
Teil II:	Das Komplexitätsproblem P = NP	SdW 10/2008
Teil III:	Goldbachsche Vermutung und Primzahlzwillingsvermutung	SdW 12/2008
Teil IV:	Die Vermutung von Birch und Swinnerton-Dyer	SdW 01/2009
Teil V:	Die ABC-Vermutung	SdW 02/2009
Teil VI:	Hierarchien des Unendlichen	SdW 03/2009
Teil VII:	Das Navier-Stokes-Problem	SdW 04/2009
Teil VIII:	Das Yang-Mills-Problem	SdW 05/2009
Teil IX:	Was ist Mathematik?	SdW 06/2009

Von einem Hindernis, das einer gleichmäßigen Strömung im Weg steht, lösen sich abwechselnd rechts- und linksdrehende Wirbel ab und werden von der Strömung mitgenommen: eine so genannte Kármán-Wirbelstraße. In der Falschfarben-Satellitenaufnahme oben sind es Inseln der Aleuten-Kette vor Alaska, welche die gleichmäßigen Ostwinde über dem Nordpazifik stören. Unten eine numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen: Fluid trifft von links auf ein kreisförmiges Hindernis. Dargestellt sind einzelne Partikel, die man sich in das Fluid gestreut vorstellen kann.



OBEN: NASA / USGS EROS DATA CENTER, LANDSAT 7;
UNTEN: ARBEITSGRUPPE STEFAN TUREK, TU DORTMUND

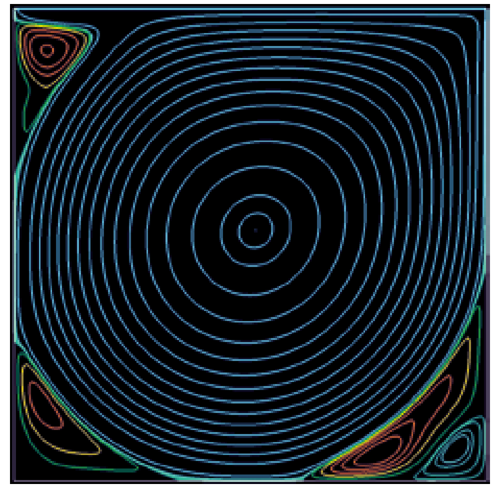
In Kürze

- Die **Navier-Stokes-Differenzialgleichungen** beschreiben die Strömungen von Fluiden (Flüssigkeiten und Gasen).
- Sie modellieren ein Fluid als ein **Kontinuum**, das heißt eine physikalische Größe, die in jedem Punkt in Raum und Zeit einen definierten Wert hat.
- Bis heute ist es nicht gelungen, die **Existenz und Eindeutigkeit** für Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen zu beweisen.
- Ein wesentliches Hindernis auf dem Weg zu diesem Beweis ist das Phänomen der **Turbulenz**.

Beschreibung von Naturvorgängen durch mathematische Gleichungen hat Isaac Newtons Punktmechanik die Maßstäbe gesetzt. Es seien endlich viele Massenpunkte, zum Beispiel die Himmelskörper unseres Sonnensystems, gegeben, dazu deren Orte und Geschwindigkeiten zu einem bestimmten Zeitpunkt. Außerdem sei das Naturgesetz, das ihre Bewegung beschreibt, in unserem Beispiel das Gravitationsgesetz, stetig, das heißt, es gibt keine plötzlichen Änderungen der Kräfte unter einer sehr geringen Änderung des Systemzustands. Unter diesen Voraussetzungen ist jeder folgende Systemzustand eindeutig bestimmt. Die Mathematik ist in dieser Hinsicht ein getreues Abbild der (deterministischen) Natur: Gleiche Anfangsbedingungen ergeben stets gleiches Verhalten.

Genau diese wünschenswerte Eigenschaft ist für die Navier-Stokes-Gleichungen verletzt. Es ist bis heute nicht gelungen zu beweisen, dass eine Lösung dieser Gleichungen zu einer gegebenen Anfangsbedingung unter allen Umständen existiert und eindeutig bestimmt ist. Die Situation ist so unübersichtlich, dass das Clay Institute nicht etwa die Aufgabe gestellt hat, einen Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die Navier-Stokes-Gleichungen zu beweisen. Vielmehr gibt es den Millionenpreis bereits für »wesentliche Fortschritte« auf diesem vertrackten Gebiet.

Was macht diese Allerweltsgleichungen so überaus schwer? Eine schnelle, vorläufige Antwort lautet: Es handelt sich um partielle Differenzialgleichungen, im Gegensatz zu den gewöhnlichen Differenzialgleichungen der Punktmechanik. Bei letzteren sind endlich viele Funktionen der Zeit gesucht, die ihrerseits den Ort und die Geschwindigkeit jedes Beteiligten in Abhängigkeit von der Zeit beschreiben. Neben den unbekannten Funktionen selbst geht auch deren zeitliche Änderungsrate, die Ableitung nach der Zeit, in die



ARBEITSGRUPPE STEFAN TUREK, TU DORTMUND

Wasser, das in einer Ausbuchtung unterhalb eines Kanals steht, wird durch das im Kanal von links nach rechts strömende Wasser mitgerissen. Die entstehende Wasserwalze setzt in den Ecken kleine, gegenläufige Walzen in Bewegung, die wiederum noch kleinere, und so weiter. Stromlinien im Uhrzeigersinn sind durch blaue, solche im Gegenuhrzeigersinn durch rote Farbtöne gekennzeichnet. Der *driven cavity flow* ist ein beliebter Prüfstein für Algorithmen der Strömungsmechanik. Dieses Bild haben Sven Buijssen, Jens Acker und Abderrahim Ouazzi vom Institut für Angewandte Mathematik der Technischen Universität Dortmund berechnet.

Die Euler-Gleichungen

Bei der Herleitung der Gleichungen der Fluidmechanik, insbesondere der Euler- und der Navier-Stokes-Gleichungen, pflegen die Physiker sich ein sehr kleines »Testvolumen« vorzustellen, sozusagen einen Käfig, der ortsfest in das strömende Fluid gehängt wird, ohne dessen Bewegung auch nur im mindesten zu beeinträchtigen. Dann denken sie darüber nach, welche Effekte den Zustand des Fluids im Käfig beeinflussen können.

▶ Erstens wirkt im Allgemeinen eine äußere Kraft, typischerweise die Schwerkraft.

▶ Zweitens folgt die Bewegung des Fluids dem Druck, der im Fluid selbst herrscht, genauer gesagt, den Druckunterschieden. Flüssigkeiten und Gase neigen dazu, dorthin zu strömen, wo der Druck geringer ist.

▶ Drittens wird der Inhalt des Käfigs selbst permanent ausgetauscht. Zum Beispiel wird bei entsprechend gerichteter Strömung Fluid nach rechts aus dem Käfig hinaustransportiert, und von links strömt neues nach und bringt seine – möglicherweise andere – Geschwindigkeit mit.

Diese – und weitere – Effekte kann man mathematisch ausdrücken. Über das ganze Käfigvolumen genommen, sind diese Formeln sehr kompliziert und unhandlich. An dieser Stelle kommt das machtvolle Standardhilfsmittel der Infinitesimalrechnung (»Analysis«) zur Anwendung: Man lässt den Käfig bis auf einen Punkt zusammenschrumpfen. Was zuvor eine Differenz zwischen dem Zustand des Fluids an der rechten und der linken Käfigwand war, wird zu einer räumlichen Ableitung. Damit erhält man Differenzialgleichungen, das heißt, Gleichungen, die Werte und Ableitungen von unbekannten Funktionen miteinander verknüpfen. Dabei beziehen sich alle diese Werte und Ableitungen stets auf denselben Punkt im Raum und denselben Zeitpunkt.

Bezeichnen wir mit *u, v, w* die Geschwindigkeitskomponenten der Strömung in x-, y- und z-Richtung und mit f, g, h die Komponenten einer äußeren, gegebenen Kraft. Das Zeichen $\partial u/\partial t$ steht für die Änderung der Geschwindigkeitskomponente u mit der Zeit t (das ist die x-Komponente der Beschleunigung), entsprechend

Gleichungen ein, denn nach Newtons zweitem Gesetz der Mechanik ist Kraft gleich Masse mal Beschleunigung, und Beschleunigung ist die zeitliche Ableitung der Geschwindigkeit.

Dagegen besteht die Beschreibung eines Fluids aus einer Funktion des Orts und der Zeit. So bezeichnet eine Unbekannte wie $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$ die Geschwindigkeit des Fluids am Ort $\boldsymbol{r}$ zur Zeit t. Neben den zeitlichen Ableitungen, die wieder aus Newtons zweitem Gesetz herrühren, gehen jetzt auch noch Ableitungen nach dem Ort in die Gleichungen ein, weil der Zustand eines Fluids an einem Punkt die Zustände in der unmittelbaren Nachbarschaft dieses Punkts beeinflusst. An die Stelle der endlich vielen unbekannten Positionen in der Punktmechanik treten gewissermaßen die unendlich vielen Werte der Funktion $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}, t)$, die es zu einem Zeitpunkt t zu bestimmen gilt.

Partielle Differenzialgleichungen sind also sozusagen »um den Faktor unendlich« schwerer als gewöhnliche. Aber das ist nur ein kleiner Teil der Erklärung. Im Folgenden will ich Ihnen die Navier-Stokes-Gleichungen etwas genauer vorstellen und die ihnen eigenen Schwierigkeiten herausarbeiten.

Dass ein und dieselbe Gleichung das Verhalten von Flüssigkeiten und Gasen beschreiben soll, ist zunächst gewöhnungsbedürftig. In unserer Alltagserfahrung scheinen sich Wasser und Luft völlig verschieden zu verhalten. Aber das ist weit gehend darauf zurückzuführen, dass das eine Medium pro Volumeneinheit ungefähr tausendmal so viel Masse aufbringt wie das andere (also die tausendfache Dichte hat). Das wiederum geht in die Gleichungen nur mit einem konstanten Faktor ein, der an dem Verhalten der Lösungen nichts Grundsätzliches ändert.

Ein weiterer Unterschied besteht in der Kompressibilität. Luft lässt sich in der Fahrradpumpe ohne Weiteres mit Muskelkraft auf ein kleineres Volumen zusammendrücken, während Wasser inkompressibel ist, was man bei einem fehlgeschlagenen Sprung vom Fünfmeterbrett eindrucksvoll zu spüren bekommt. Merkwürdigerweise ist die Erfahrung mit der Fahrradpumpe durchaus untypisch. Bei der Umströmung von Gebäuden, Fahr- und Flugzeugen verhält sich Luft bis etwa zu Geschwindigkeiten von 300 Kilometern pro Stunde tatsächlich inkompressibel.

Es macht die Navier-Stokes-Gleichungen nicht prinzipiell schwieriger, sondern nur unübersichtlicher, wenn neben der Geschwindigkeit auch die Dichte des Fluids eine von Ort und Zeit abhängige Unbekannte ist. Deswegen wollen wir uns im Folgenden auf den inkompressiblen Fall beschränken.

Eine kurze Geschichte der Navier-Stokes-Gleichungen

Bereits im Jahr 1755 vollendet Leonhard Euler in seiner Arbeit »Principes généraux du mouvement des fluides« die klassische Hydromechanik, genauer, die Mechanik der reibungsfreien Fluide. In dieser Arbeit leitet er aus fundamentalen Prinzipien der Mechanik, die er selbst einige Jahre zuvor postuliert hat, ein System von Gleichungen her, die heute allgemein »Euler-Gleichungen« genannt werden (Kasten unten). Ihm gelingt es auch als Erstem, eine saubere Definition für den Druck p in einem Fluid zu geben.

GEMÄLDE VON EMANUEL LANDMANN, 1753

Schuf die Grundlagen der klassischen Hydromechanik: Leonhard Euler (1707 – 1783)

bezeichnet $\partial p/\partial z$ die Änderung des Drucks in z-Richtung und so weiter. Mit diesen Bezeichnungen lauten die eulerschen Differenzialgleichungen

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial x} &= f\\
\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial y} &= g\\
\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial z} &= h
\end{aligned}$$

In dem gesamten Gleichungssystem erkennt man das newtonsche Gesetz »Kraft ist Masse mal Beschleunigung« wieder: Beschleunigung (der jeweils erste Term, zum Beispiel $\partial u/\partial t$) plus Effekt der Fluidbewegung (die nächsten drei Terme) plus Kraft durch Druck (zum Beispiel $\partial p/\partial x$) gleich äußere Kraft. Dass die äußere Kraft und nur sie auf der rechten Seite der Gleichung steht, ist Konvention.

Nur die Masse ist in den Gleichungen nicht wiederzufinden. In einem Fluid ist Masse gleich Dichte mal (Käfig-)Volumen. Das Volumen hat man beim Herleiten der Gleichung herausdividiert (und die Definition der äußeren Kraft entsprechend angepasst), bevor man den Käfig zusammenschrumpfen ließ. Die Dichte dagegen ist nur deswegen nicht in der Gleichung enthalten, weil man sie als konstant voraussetzt. In der hier wiedergegebenen Form gelten die eulerschen Gleichungen für eine inkompressible Strömung, kurz (und sprachlich schief) als »inkompressible Euler-Gleichungen« bezeichnet.

Mit dem Formalismus der Vektoranalysis lassen sich diese drei Gleichungen sehr elegant zu einer einzigen zusammenfassen. Man führt den Geschwindigkeitsvektor $\boldsymbol{v} = (u, v, w)$ und den Kraftvektor $\boldsymbol{f} = (f, g, h)$ ein. Mit dem Operator $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)$ schreiben sich die Euler-Gleichungen

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + (\boldsymbol{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{v} + \nabla p = \boldsymbol{f}\,.$$

PUBLIC DOMAIN

Entwickelte die allgemeinen Methoden der Kontinuumsmechanik: Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

Bei den eulerschen Gleichungen handelt es sich um ein System von drei Gleichungen für die vier gesuchten Größen u, v, w und p; das ist also eine zu wenig. Diese fehlende Gleichung liefert der Satz von der Erhaltung der Masse, der für inkompressible Strömungen die Form

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

oder, in Vektorschreibweise,

$$\operatorname{div}\boldsymbol{v}=\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0$$

annimmt. Diese spezielle Summe aus den räumlichen Änderungen der Geschwindigkeitskomponenten heißt die »Divergenz« der Geschwindigkeit. Inkompressible Strömungen in unserem Sinne sind damit solche, in denen das Geschwindigkeitsfeld divergenzfrei ist.

Euler hat seine Gleichungen übrigens für den Fall kompressibler Strömungen hergeleitet; die inkompressible Variante folgt dann aus der Annahme, dass die Dichte des Fluids zeitlich und räumlich konstant ist.

Aus heutiger Sicht erscheinen die Euler-Gleichungen als eine unvollständige Version der Navier-Stokes-Gleichungen; aber alles, was diese so schwierig macht, ist in den Euler-Gleichungen bereits enthalten – und noch mehr. Eine entscheidende Schwierigkeit ist die Nichtlinearität: Die Summe zweier Lösungen ist im Allgemeinen keine Lösung.

Das steht in auffälligem Gegensatz zu den üblichen Gleichungen, die Wellenphänomene beschreiben. Diese sind linear, das heißt, ihre Lösungen, darunter auch Wasserwellen, pflegen sich störungsfrei zu überlagern. Daraus folgt auch, dass die Lösungen linearer Differenzialgleichungen nicht wesentlich komplizierter werden können als die Rand- und Anfangsbedingungen. Das sind die äußeren Umstände, etwa die Form des Gefäßes, in dem die Strömung stattfindet, oder der Anfangszustand, in den man das Fluid versetzt, bevor man es sich selbst überlässt. Dagegen kann im nichtlinearen Fall schon eine sehr einfache Geometrie ein Fluid zu einem sehr komplizierten Verhalten zwingen (Bilder S. 79, 81 und 84).

Schlimmer noch: Bei den Euler-Gleichungen können zwei ursprünglich getrennte Strömungen mit verschiedenen Geschwindigkeiten aufeinandertreffen und dabei die merkwürdigsten Phänomene auslösen. Im Treffpunkt der beiden Ströme »weiß die Geschwindigkeit nicht«, welchen der beiden Werte sie annehmen soll, mit dem Effekt, dass an dieser Stelle die Funktion keinen eindeutigen Wert oder zumindest keine Ableitung nach dem Ort mehr hat.

Retter der Differenzierbarkeit: die Viskosität

In beiden Fällen kann von einer Lösung der Gleichung nicht mehr die Rede sein, weil gewisse Terme in der Gleichung nicht definiert sind. Daran scheitert ein allgemeiner Existenz- und Eindeutigkeitssatz für die eulerschen Gleichungen.

Da aber Fluiden in der Natur derartige Identitätsprobleme fremd sind, muss den Euler-Gleichungen noch eine entscheidende Zutat fehlen. Der bekannte Strömungsmechaniker Gregori Tokaty beschrieb Euler als einen genialen Schneider, der mit seinen Gleichungen eine schöne Hose angefertigt hat, die aber leider keine Knöpfe aufweist.

Was die Hose am Rutschen und die Strömungen am Zusammenbrechen hindert, ist die allgegenwärtige Reibung, die man innerhalb von Fluiden als Viskosität bezeichnet. Bei Flüssigkeiten wie Honig oder Schmieröl ist einem das Phänomen geläufig; dass aber auch bei der Luft die Zähigkeit eine entscheidende Rolle spielt, ist abermals gewöhnungsbedürftig. Die Wissenschaft benötigte denn auch geraume Zeit, um eine Theorie viskoser Fluide zu finden.

Zwar hat bereits Isaac Newton im zweiten Buch seiner »Philosophiae naturalis principia mathematica« aus dem Jahr 1678 die Hy-

Die Navier-Stokes-Gleichungen

Für eine räumlich dreidimensionale, inkompressible Strömung lauten die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial x}+\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=f$$
$$\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial y}+\nu\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right)=g$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\partial p}{\partial z}+\nu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right)=h$$

Zu den Euler-Gleichungen ist ein Viskositätsterm hinzugekommen; er besteht aus dem Viskositätskoeffizienten ν mal einer speziellen Summe zweiter Ableitungen, die man als den Laplace-Operator bezeichnet und den man mit dem großen griechischen Delta abkürzt:

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

In Vektorschreibweise lauten die Navier-Stokes-Gleichungen

$$\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}+\nabla p+\nu\Delta\boldsymbol{v}=\boldsymbol{f}\,.$$

Der Satz von der Erhaltung der Masse, hier in der Form der Divergenzfreiheit, bleibt natürlich auch für die Navier-Stokes-Gleichungen bestehen.

pothese formuliert, dass in viskosen Fluiden in den Berührungsflächen der Fluidteilchen Scherkräfte auftreten, die der Relativgeschwindigkeit proportional sind. Erst 150 Jahre später jedoch gelingt dem französischen Ingenieur Claude Louis Marie Henri Navier der Durchbruch. Am 18. März 1822 wird seine Arbeit »Mémoire sur les lois du mouvement des fluides« der Académie française in Paris vorgelegt.

Navier ist kein Ingenieur in unserem heutigen Sinn, sondern ein Produkt der damals neuen Polytechnischen Hochschulen. Als Absolvent der »École Polytechnique« verfügt er über eine gediegene theoretische Ausbildung, die weit in die Mathematik und die Mechanik hineinreicht. Später besucht er noch die »École des Ponts et Chaussées«, eine »École d'application«, und lernt dort die Anwendungen kennen. Durch die Verbindung außerordentlich profunder theoretischer Kenntnisse mit dem Wissen um die Probleme der Anwendung gehört Navier zur wissenschaftlichen Elite seines Landes.

Vom Atomismus des Pierre-Simon de Laplace (1749–1827) angezogen, wendet sich Navier der Molekulartheorie zu, die damals geradezu in Mode ist. Das Modell für die Wechselwirkungen zwischen den Atomen liefert Newtons Physik des Sonnensystems; Atome sollen sich also in etwa so bewegen wie die Planeten auf ihren Bahnen, die durch die Gravitationskraft gebunden sind. Navier, der sich zu Anfang des 19. Jahrhunderts einen Namen durch den Entwurf dreier neuer Brücken über die Seine gemacht hat, wendet die Molekulartheorie in der Elastizitätstheorie an und kombiniert sie schließlich mit den kontinuumsmechanischen Methoden seiner Vorgänger, vor allem des Mathematikers Augustin Louis Cauchy (Bild links), der bereits 1821 erstmals den allgemeinen Spannungszustand in einem kontinuierlichen Material erfassen konnte. Auf dieser Theorie kann Navier nun aufbauen und sich den zähen Fluiden zuwenden.

Die Herleitung im »Mémoire« ist sehr kompliziert und für uns, die wir ganz im Rahmen der Kontinuumsmechanik zu denken gewohnt sind, nur schwer verständlich. Navier postuliert eine anziehende Kraft zwischen je zwei Molekülen, die mit deren Abstand rapide abfällt, und gelangt von dieser Voraussetzung in bewundernswerter Weise zu einer brauchbaren Gleichung. Er erkennt, dass ein zähes Fluid an den Wänden eines Rohres nicht reibungslos entlanggleiten kann, sondern dass an der Wand seine Geschwindigkeit gleich null sein muss. Das nennt man heute die »No-Slip-Randbedingung«.

COLLECTION ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES (ENPC)

Erarbeitete ein mathematisches Modell für die Bewegung zäher Fluide unter der Annahme molekularer Kräfte: Claude Louis Marie Henri Navier (1785–1836)

PUBLIC DOMAIN

Entwarf ein ebensolches mathematisches Modell ohne die Annahme molekularer Kräfte: Adhémar Barré de Saint-Venant (1797–1886)

PUBLIC DOMAIN

Die Gleichung trägt auch seinen Namen, obgleich sein Beitrag im Wesentlichen von Saint-Venant vorweggenommen wurde: George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

Ein Vergleich seiner Theorie mit (nicht ganz sauber durchgeführten) Experimenten liefert Abweichungen und macht ihn wieder unschlüssig. Auch aus diesem Grund ist wohl Naviers Nachfolgern die Art der Herleitung nicht ganz geheuer, zumal da noch die Rolle einiger Größen zu klären ist, die Navier aus Konsistenzgründen einführen musste. Aber die Gleichungen sind nun da und tun gute Dienste. Den nachfolgenden Wissenschaftlern bleibt die Aufgabe, sichere Fundamente für sie nachzutragen.

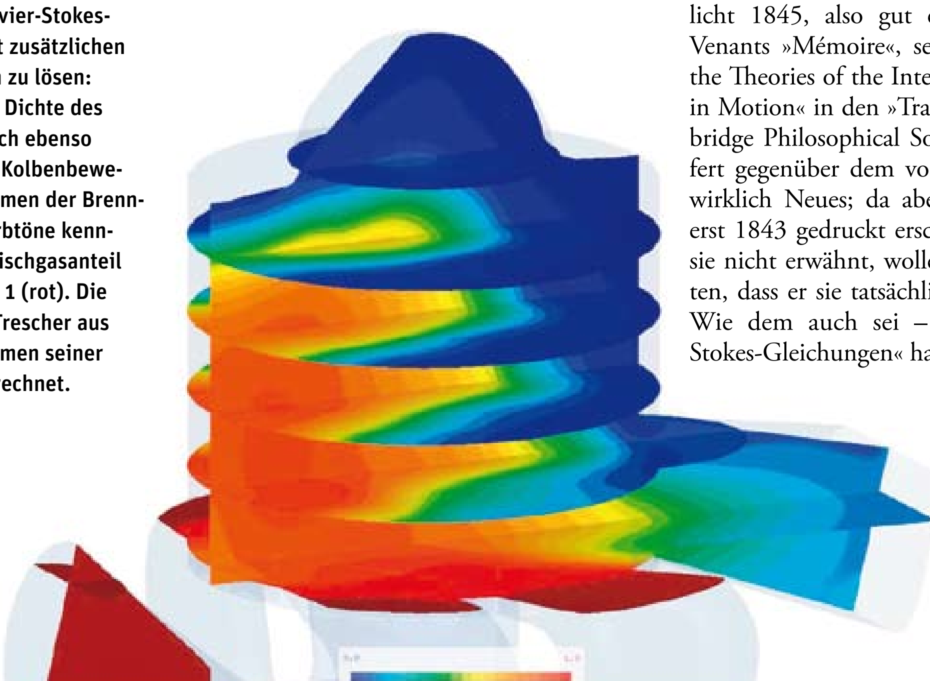
Während 1831 der berühmte Siméon-Denis Poisson (1781–1840) sich noch einmal mit molekulartheoretischen Methoden den zähen Fluiden zuwendet, dabei Naviers Ergebnisse deutlich klarer formuliert, aber nicht über sie hinauskommt, erzielt sein Landsmann Adhémar Barré de Saint-Venant (Bild S. 83 unten) einen echten Fortschritt in der Theorie viskoser Strömungen, und zwar ohne Annahmen über molekulare Kräfte zu Hilfe zu nehmen.

In seiner Arbeit »Mémoire sur la dynamique des fluides«, die am 14. April 1834, also ziemlich genau 12 Jahre nach Naviers Werk, vor der Académie française gelesen wird, legt Saint-Venant den Schwerpunkt seiner Modellbildung auf die Relativgeschwindigkeiten der Flüssigkeitsteilchen, wobei »Teilchen« im Sinn der Kontinuumsmechanik als »ein kleines Teil von Fluid« zu verstehen ist. Bewegen sich zwei benachbarte Fluidteilchen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, so entsteht durch die innere Reibung im Fluid eine Schubspannung. Diese physikalische Größe hat wie der Druck die Dimension Kraft durch Fläche, steht aber anders als die durch den hydrostatischen Druck p hervorgerufenen Normalspannungen nicht senkrecht auf der Grenzfläche der beiden Fluidteilchen, sondern ist tangential zu ihr gerichtet. Saint-Venant muss als einzige Hypothese die Annahme aufstellen, dass die Schubspannungen in Richtung der Gleitung – der Relativbewegung der beiden Fluidteilchen – auftreten und zu deren Geschwindigkeit proportional sind. Diese Hypothese ist die im Rahmen der Kontinuumsmechanik einzig mögliche. Sie verallgemeinert nichts anderes als die bereits von Newton postulierte Hypothese über die Schubspannungen in Fluiden.

Die so modellierte Viskosität wirkt ausgleichend: Aus einem abrupten Geschwindigkeitsunterschied zwischen benachbarten Fluidteilchen macht sie alsbald einen allmählichen, »glatten« Übergang. Dieser Effekt ist der Wirkung der Diffusion oder der Wärmeleitung vergleichbar und wird auch so modelliert, nämlich durch die Summe der zweiten räumlichen Ableitungen der Geschwindigkeitskomponenten mal einem Proportionalitätsfaktor, dem Viskositätskoeffizienten ν (kleines griechisches ny; siehe Kasten S. 82).

Es ist dieser Ausgleichseffekt, der die Entstehung der oben beschriebenen Singularitäten der Euler-Gleichungen im Keim erstickt. Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sind also »gutartiger« als solche der Euler-Gleichungen, allerdings leider nicht gutartig genug.

Der Beitrag von Navier zu der Gleichung mit dem Doppelnamen ist unstrittig. Wer aber ist der zweite Namensgeber? Der Brite George Gabriel Stokes (Bild links) veröffentlicht 1845, also gut elf Jahre nach Saint-Venants »Mémoire«, seine Abhandlung »On the Theories of the Internal Friction of Fluids in Motion« in den »Transactions of the Cambridge Philosophical Society«. Sein Werk liefert gegenüber dem von Saint-Venant nichts wirklich Neues; da aber dessen Arbeit auch erst 1843 gedruckt erschienen ist und Stokes sie nicht erwähnt, wollen wir ihm zugutehalten, dass er sie tatsächlich nicht gekannt hat. Wie dem auch sei – der Name »Navier-Stokes-Gleichungen« hat sich durchgesetzt.



DIRK TRESCHER

Strömungsmechanik »innen«: Bei einem Zweitaktmotor ist der Zylinder so zu konstruieren, dass das (nach rechts) ausströmende Abgas und das im selben Arbeitstakt (von links) einströmende Frischgas sich möglichst wenig vermischen. Zur Simulation sind die Navier-Stokes-Gleichungen mit zusätzlichen Schwierigkeiten zu lösen: Temperatur und Dichte des Gases ändern sich ebenso wie – durch die Kolbenbewegung – das Volumen der Brennkammer. Die Farbtöne kennzeichnen den Frischgasanteil von 0 (blau) bis 1 (rot). Die Grafik hat Dirk Trescher aus Freiburg im Rahmen seiner Dissertation berechnet.

MIT FRDL. GEN. VON THOMAS SONAR

Schon Leonardo da Vinci studierte intensiv das Phänomen der Turbulenz.

Einige der Schwierigkeiten mit diesen Gleichungen haben sogar ihr Abbild in der Natur. Lässt man Wasser langsam durch ein horizontales Glasrohr strömen und gibt einen Farbtropfen hinzu, dann kann man ein faszinierendes Phänomen beobachten, das Physiker und Mathematiker seit vielen Jahrzehnten bewegt, dessen eigentlicher Erklärung man allerdings noch nicht nähergekommen ist: Der Farbtropfen entwickelt sich zu einem Faden, der nach einer gewissen Lauflänge zu verwirbeln beginnt und sich dann in einer chaotischen Weise mit dem Wasser vermischt. Die Strömung ist turbulent geworden!

Ein inhärentes Problem: Turbulenz

Das Phänomen wird heute im großen Maßstab technisch genutzt. So weiß man, dass turbulente Strömungen weniger Widerstand erzeugen als laminare, also nicht turbulente, Strömungen. Moderne Motorradhelme sehen häufig aus wie Golfbälle: Die Vertiefungen machen die Strömung turbulent und verringern dadurch den Luftwiderstand.

Bis heute ist man einem echten Verständnis des Phänomens nicht wesentlich näher gekommen. In den Verfahren der numerischen Strömungsmechanik behilft man sich mit so genannten Turbulenzmodellen, von denen es ganze Familien gibt, die je nach Anwendungsbereich zu mehr oder weniger brauchbaren Ergebnissen führen. Es ist schmerzlich und für die mathematische Behandlung der Navier-Stokes-Gleichungen außerordentlich hinderlich, dass wir trotz größter Anstrengungen in diesem Punkt nur sehr wenig wissen.

Kommen wir auf unsere Eingangsfrage zurück. Die numerische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen gehört heute zum Standard der Ingenieurskunst. Viele bunte Bilder von Strömungen beweisen das. Wozu sucht man dann noch nach einem Existenzsatz? Gerade aus Kreisen der Ingenieure schlägt den Mathematikern hier oft Unverständnis entgegen.

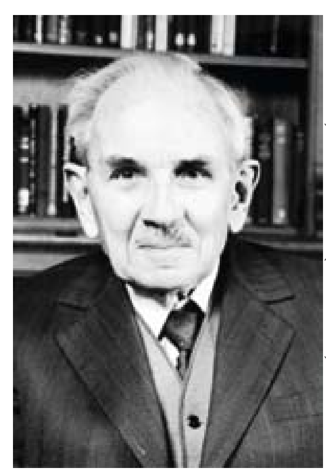
Hier gilt es, auf zweierlei hinzuweisen: Die numerischen Algorithmen lösen keineswegs die Navier-Stokes-Gleichungen, sondern Näherungen derselben. So werden zum Beispiel Ableitungen (»Differenzialquotienten«) durch Differenzenquotienten ersetzt, oder man sucht nicht direkt nach der richtigen Lösung, sondern nach demjenigen Exemplar aus einem eingeschränkten Sortiment von Funktionen, das der richtigen Lösung am nächsten kommt. Man ersetzt gewissermaßen die Frage durch eine leichtere Frage, die der ursprünglichen möglichst nahekommt, und hofft, dass die Antwort auf die leichte Frage derjenigen auf die echte Frage ebenfalls nahekommt. Das ist aber keineswegs automatisch der Fall, sondern will im Einzelfall bewiesen werden. Wie aber soll man beweisen, dass zwei Antworten nahe beieinander liegen, wenn man noch nicht einmal weiß, ob es die »echte« Antwort überhaupt gibt?

Der in der Ingenieurpraxis weit verbreitete Glaube, der Vergleich einer numerischen Lösung mit experimentellen Daten sei Verifikation genug, ist ein Irrglaube. Man kann zwar ein Turbulenzmodell so lange feinjustieren, bis die numerische Lösung die experimentellen Daten mit großer Genauigkeit reproduziert. Damit hat man jedoch noch kein belastbares Wissen über die Natur der Turbulenz erworben. Möglicherweise muss man schon beim nächsten Problem, das in einem anderen Geschwindigkeitsbereich liegt, das Turbulenzmodell durch ein anderes ersetzen.

Darüber hinaus wird ein verborgener liegendes Problem gern übersehen: Die Navier-Stokes-Gleichungen sind lediglich ein mathematisches Modell für die Strömung eines viskosen Fluids! Der Glaube, dass reale Strömungen sich tatsächlich nach den Navier-Stokes-Gleichungen verhalten, ist durchaus verständlich und ehrenhaft – wer möchte schon an den Grundlagen der Kontinuumsmechanik zweifeln? –, aber eben nur ein Glaube.

Modell und Realität

Im Gegensatz zu Navier, Saint-Venant und Stokes können wir heute sogar sicher sein, dass diese Gleichungen das Verhalten eines Fluids nur angenähert wiedergeben. Bereits dadurch, dass wir mit unserer Funktion $\boldsymbol{v}$ arbeiten, nehmen wir stillschweigend an, dass es da ein einheitliches Medium gebe, das zu jedem Orts- und Zeitpunkt eine wohldefinierte Geschwindigkeit besitze, und dass nicht etwa, wie es der Realität entspricht, ungeheuer viele Moleküle sehr chaotisch umherfliegen und miteinander Impuls und Energie austauschen.



AUS: JEAN LERAY, MATHÉMATICIEN DU XXE SIÈCLE, VON LAURENT GUILLOPÉ. UNIVERSITÉ PERMANENTE DE NANTES, 17.11.2006

Fand die bisher beste Annäherung an eine Lösungstheorie der Navier-Stokes-Gleichungen, nämlich einen Existenzsatz für schwache Lösungen: Jean Leray (1906 – 1998)

Die Variable $\boldsymbol{v}$ am Ort $\boldsymbol{r}$ ist streng genommen bereits ein Mittelwert über ein kleines Volumen in der Umgebung des Punkts $\boldsymbol{r}$.

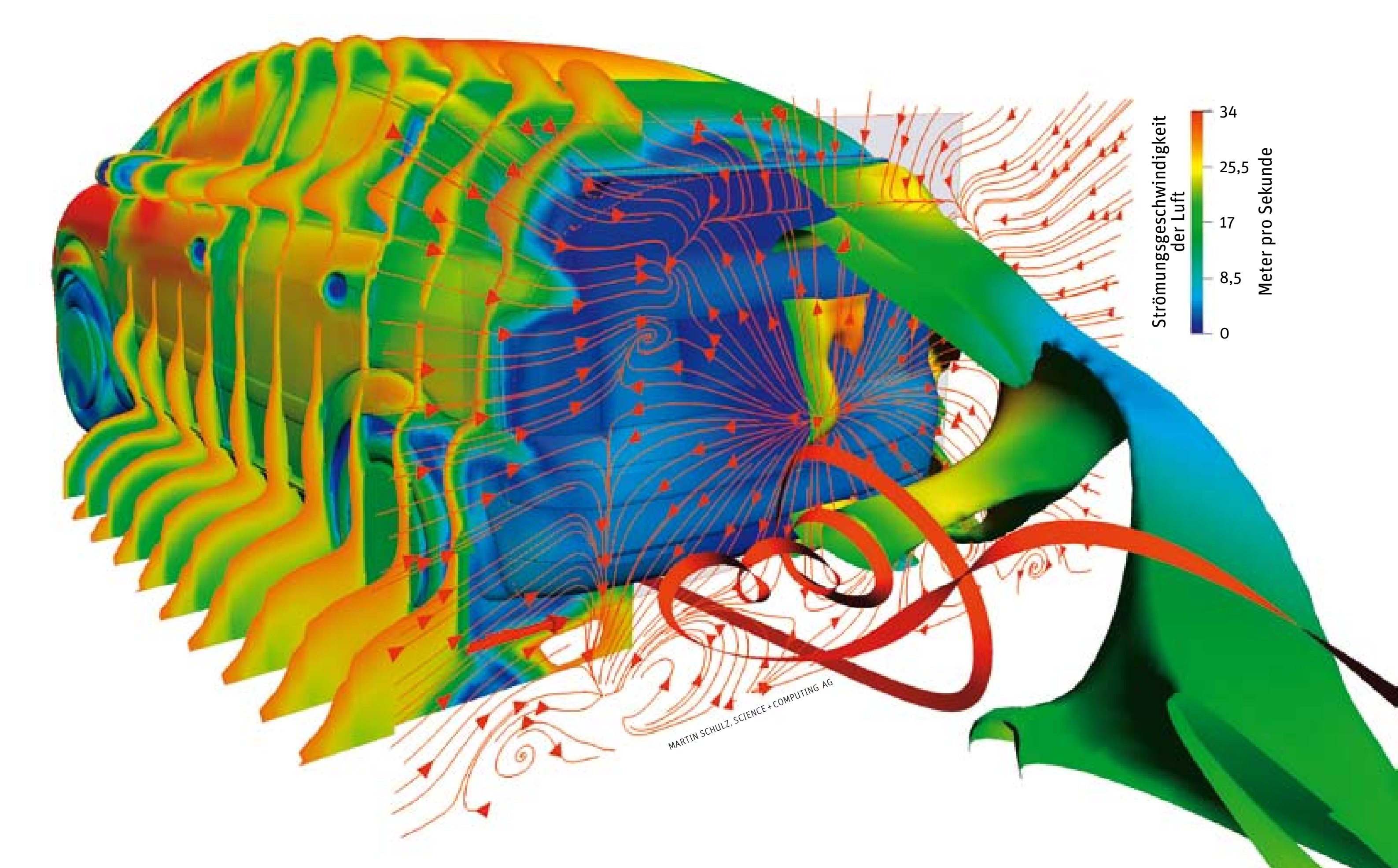
In der Tat kann man eine Strömung auch auf der Ebene der Moleküle modellieren. Die kinetische Gastheorie stellt dafür die theoretischen Grundlagen bereit, einschließlich eines Modells für die Interaktion der Moleküle. Das ergibt ein System von gewöhnlichen Differenzialgleichungen – für jedes Molekül sechs Stück (für die drei Komponenten von Ort und Geschwindigkeit). Da schon ein Gramm Luft ungefähr 10^{23} Moleküle enthält, ist eine rechnerische Lösung dieses Gleichungssystems jenseits alles Vorstellbaren. Aber man kann aus diesen so genannten Boltzmann-Gleichungen – benannt nach Ludwig Boltzmann (1844 – 1906), dem Schöpfer der kinetischen Gastheorie – die Navier-Stokes-Gleichungen herleiten, unter gewissen Zusatzannahmen, die den genannten Mittelungsprozess genauer beschreiben.

Vielleicht ist diese Mittelung ja ungeschickt oder fehlerhaft. Vielleicht ist die korrekte Beschreibung der Viskosität nicht die Summe der zweiten Ableitungen, sondern man muss noch vierte, sechste oder höhere Ableitungen mit einbeziehen. Die Idee ist keineswegs aus der Luft gegriffen. Höhere Ableitungen treten unvermeidlich auf, wenn man – durch die so genannte Taylor-Entwicklung – einen Funktionswert durch den Wert derselben Funktion an einem benachbarten Ort ausdrücken will. Allerdings fallen in den üblichen Herleitungen diese höheren Ableitungen wieder heraus, wenn man das kleine Testvolumen auf null schrumpfen lässt.

Vor einigen Jahren hat der tschechische Mathematiker Jindřich Nečas (1929 – 2002) mit einem solchen alternativen Modell für die Viskosität gearbeitet. Seine Hoffnung dabei war, für eine so modifizierte Gleichung einen Existenzsatz beweisen zu können. Hätte er Erfolg gehabt, so hätte man argumentieren können, dass eben nicht die Navier-Stokes-Gleichungen, sondern Gleichungen höherer Ordnung die korrekte Beschreibung für reale Fluide seien. Nečas hat dieses Ziel jedoch nicht erreicht, so dass die Navier-Stokes-Gleichungen nach wie vor das Beste sind, was wir haben.

Das Clay-Problem

Nachdem ein Existenz- und Eindeutigkeitssatz zurzeit in weiter Ferne zu liegen scheint, konzentriert man sich auf Zwischenziele. Auch das Clay Institute hat solch ein Zwischenziel gesetzt: Gibt es eine offensichtlich unphysikalische Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen? Wenn ja, dann wäre klar, dass die Gleichungen eine unzureichende Beschreibung der Realität sind. Gelingt es jedoch auszuschließen, dass



Strömungsmechanik »außen«: Die Umströmung eines fahrenden Autos (hier ein Audi A2) ist für Luftwiderstand und Fahrverhalten von entscheidender Bedeutung. Vor allem hinter dem Heck ist das Strömungsmuster sehr kompliziert. Just für derartige Anwendungen erweist sich ein Verfahren, das von den Boltzmann-Gleichungen hergeleitet ist *(lattice Boltzmann method)*, als geeigneter als eine schlichte Diskretisierung der Navier-Stokes-Gleichungen. Dieses Strömungsfeld wurde für die Audi AG mit dem System PowerFLOW berechnet. Die Visualisierung stammt von Martin Schulz von der Firma science + computing ag in Tübingen.

gewisse unphysikalische Lösungen auftreten, so kommt man dem eigentlich gesuchten Beweis zumindest ein Stück näher.

Unphysikalisch wäre zum Beispiel eine Lösung, bei der die gesamte kinetische und potenzielle Energie des Systems zunimmt; denn da die Reibung Bewegungsenergie in Wärme umwandelt, kann die restliche Energie höchstens abnehmen. Diesen Fehler macht eine Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen sicher nicht, wie relativ einfach zu beweisen ist. Es wäre aber auch schon unphysikalisch, wenn die – insgesamt endliche – Energie des Systems sich in der Umgebung eines einzigen Punktes konzentrieren und dort gegen unendlich streben würde. Dieses Phänomen nennen die Fachleute einen *blow-up*.

Machen wir folgendes Gedankenexperiment: In einem Eimer befindet sich Wasser, das wir mit einem großen Löffel in eine Drehbewegung versetzen. Nachdem die Drehung gut in Gang gekommen ist, definieren wir die rotierende Strömung zu einem bestimmten Zeitpunkt als Anfangswert für die Navier-Stokes-Gleichungen. Kann im Mittelpunkt des Eimers die Geschwindigkeit immer weiter anwachsen und damit die Energie der Strömung an diesem Punkt gegen unendlich gehen? Da lacht der Ingenieur, denn so ein Verhalten ist in einem Wassereimer noch nie beobachtet worden. Aber gibt es einen Mechanismus, der bei der Lösung der Gleichungen einen solchen *blow-up* verhindern würde? Wir kennen andere nichtlineare Differenzialgleichungen, bei denen es *blow-up*-Phänomene durchaus gibt!

Auf der Suche nach Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen geht man heute bevorzugt einen indirekten Weg. Man betrachtet eine komplette Funktion, zum Beispiel eine Lösung der Gleichungen, als einen einzelnen Punkt in einem – unendlichdimensionalen – abstrakten Raum. Bewegt man sich ein kleines Stück in diesem Funktionenraum, so geht man von einer Funktion allmählich zu einer ähnlichen Funktion über. Man kann eine Folge solcher Funktionen betrachten und es so einzurichten versuchen, dass diese Folge gegen einen Grenzwert strebt.

Nur müssen die Funktionen in diesem Raum hinreichend oft differenzierbar (»glatt«) sein, damit man überhaupt nachsehen kann, ob sie die Gleichungen erfüllen oder wie groß die Abweichung ist, wenn sie das nicht tun. Funktionen mit Knicken oder Sprüngen sind also nicht zugelassen. Es stellt sich heraus, dass Räume differenzierbarer Funktionen in einem gewissen Sinn sehr »unwegsam« sind. Nur allzu leicht gerät man beim Wandern auf verbotenes Terrain, sprich an eine nicht glatte Funktion.

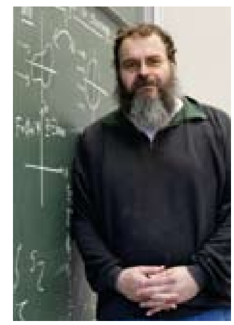
Man begibt sich daher in einen größeren Funktionenraum, in dem es auch Funktionen mit Knicken und Sprüngen gibt. Durch einen Kunstgriff (»Multiplikation mit Testfunktionen« und »partielle Integration«) gelingt es auch für diese eigentlich unzulässigen Funktionen zu bestimmen, wie weit sie von einer Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen abweichen. In diesen größeren Räumen ist es einfacher, Funktionenfolgen zu finden, bei denen diese Abweichung immer geringer wird. Im Grenzwert einer solchen Folge – wenn er denn existiert – ist die Abweichung null, wie bei einer richtigen Lösung. Eine solche Funktion nennt man eine »schwache Lösung« der Navier-Stokes-Gleichungen, weil sie eine Lösung unter abgeschwächten Bedingungen ist.

In mehreren Arbeiten aus den 1930er Jahren gelang es Jean Leray (Bild S. 85 unten), Existenzaussagen für solche schwachen Lösungen zu gewinnen. Nun ist das mathematische Vorgehen vorgezeichnet: Mit den schwachen Lösungen in der Hand muss man zeigen, dass einige von ihnen in der Tat glatte Lösungen sind. Erst diese Regularitätsaussage liefert die Existenz (und hoffentlich auch die Eindeutigkeit) von glatten Lösungen, von denen wir hoffen dürfen, dass sie die realen Strömungen beschreiben. Da aber sperren sich die Navier-Stokes-Gleichungen!

Leray konnte die Existenz glatter Lösungen nur bis zu einer endlichen Zeit beweisen, also nicht für alle Zeiten. Im Fall einer dreidimensionalen Strömung, die den gesamten Raum ausfüllt (es treten also keine diffizilen Untersuchungen von Randbedingungen auf), gibt es so einen Existenzsatz nicht! Alle Versuche sind bisher gescheitert, denn je regulärer die schwachen Lösungen werden, desto mehr neigen sie dazu, so genannte Singularitäten wie die in der Mitte des Wassereimers zu entwickeln.

Untersuchungen der letzten Jahre haben sich daher darauf konzentriert, die Menge der Punkte (ihr »Hausdorff-Maß«) abzuschätzen, in denen Singularitäten auftreten können. Viele Mathematiker ersten Ranges haben sich an den Forschungen bis heute beteiligt. Nach wie vor ist die zurzeit beste Abschätzung in einer 1982 veröffentlichten Arbeit von Caffarelli, Kohn und Nirenberg zu finden.

Es gibt also zwei denkbare Lösungen des Clay-Problems. Man zeigt entweder, dass unter realistischen Annahmen eine für alle Zeiten glatte Lösung der Navier-Stokes-Gleichungen existiert, oder, dass im Allgemeinen ein *blow-up* auftritt. In jedem Fall wäre das Ergebnis ein ungeheurer Fortschritt in der Theorie der Navier-Stokes-Gleichungen und der partiellen Differenzialgleichungen überhaupt. ◁



Thomas Sonar hat in Hannover studiert und in Stuttgart promoviert. Nach Stationen beim DLR in Göttingen (siehe seinen Artikel »Die Berechnung reagierender Hyperschallströmungen«, Spektrum der Wissenschaft 7/1996, S. 72) und an der Universität Hamburg ist er Professor für Technomathematik an der Technischen Universität Braunschweig und Abteilungsleiter der Abteilung »Partielle Differenzialgleichungen« am Institut »Computational Mathematics«.

Caffarelli, L. et al.: Partial Regularity of Suitable Weak Solutions of the Navier-Stokes Equations. In: Communications in Pure and Applied Mathematics 35, S. 771–831, 1982.

Euler, L.: Principes généraux du mouvement des fluides (1755). Opera Omnia II 12, S. 54–91.

Szabó, I.: Geschichte der mechanischen Prinzipien. 3. Auflage, Birkhäuser, Basel 1996.

Temam, R.: Navier-Stokes Equations. 2. Auflage, North-Holland, Amsterdam 1985.

Tokaty, G. A.: A History and Philosophy of Fluid Mechanics. Dover, New York 1994. Nachdruck der Originalausgabe von 1971.

Weblinks zu diesem Thema finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/983272.