Rubik-Spiele mit einfachen Gruppen

Drei neue Puzzles nach Art des Rubikwürfels bieten die Gelegenheit, sich in die Höhen der abstrakten Algebra aufzuschwingen und mit einigen ihrer vertracktesten Objekte vertraut zu machen: den so genannten sporadischen einfachen Gruppen.

Von Igor Kriz und Paul W. Siegel

Anfang der 1980er Jahre hat der Rubikwürfel Millionen von Menschen weltweit fasziniert – und zur Verzweiflung gebracht. Falls Sie dieses Puzzle – oder die 1980er Jahre – verpasst haben: Es handelt sich um ein Objekt, das aus $3 \times 3 \times 3 = 27$ Teilwürfeln, von Kennern Kubies genannt, zusammengesetzt scheint, es aber nicht wirklich ist. Jede der sechs quadratischen Seitenflächen hat eine andere, prominente Farbe, üblicherweise Rot, Blau, Grün, Orange, Gelb und Weiß. Ein raffinierter Mechanismus, den 1974 ein ungarischer Lehrer namens Ernö Rubik erfand (und zwei Jahre später unabhängig von ihm der japanische Ingenieur Terutoshi Ishige), ermöglicht es, die sechs Seiten einzeln um ihre jeweilige Mittelachse zu drehen. Wenn Sie das ein paar Mal wahllos machen, sind die Kubies so durcheinandergemischt, dass nur Eingeweihte den Ausgangszustand wiederherstellen können. Genau darin besteht die Knobelaufgabe: aus einem willkürlich verdrehten Würfel einen zu machen, bei dem jede Seite wieder ihre ursprüngliche, einheitliche Farbe hat.

Rubik's Cube und analoge Polyeder, die in seinem Kielwasser segelten, sind allesamt Puzzles auf der Basis von Operationen, welche die Komponenten – beim Würfel also die Kubies – umordnen oder, wie Mathematiker sagen, permutieren. Stets geht es darum, eine zufällige Anordnung in eine vorgegebene Konfiguration, meist den Ausgangszustand, zu überführen. Dabei bildet die Menge aller Abfolgen von erlaubten Einzeloperationen eine so genannte Permutationsgruppe.

Eine Gruppe lässt sich mathematisch als Verallgemeinerung der gewöhnlichen Arithmetik auffassen. Paradebeispiel ist die Menge der ganzen Zahlen mit der Addition als Verknüpfung. Gruppen können aber auch aus vielen anderen Dingen bestehen – so den Drehungen und Spiegelungen von Gegenständen, den möglichen Vertauschungen einer Menge von Buchstaben oder sonstigen Objekten, den Anordnungen von Zahlen in quadratischen Matrizen und so weiter. Dabei muss eine Operation existieren, die jedes Element der Gruppe in eines überführt, das ebenfalls zur Gruppe gehört. (Außerdem muss das Assoziativgesetz gelten, zu jedem Element

Animierte Zahlen vollführen einen imaginären Tanz, indem sie gemäß dem Zug »merge« (»mische«) in dem neuen Puzzle M_{12} ihre Plätze tauschen.

ein inverses existieren und ein neutrales Element vorhanden sein.)

Die Gruppentheorie ist nicht nur für Mathematiker von Interesse, sondern hat auch bedeutende Anwendungen auf anderen Gebieten wie der Kristallografie, der Teilchenphysik und der Kosmologie. Selbst in der Telekommunikation spielt sie eine wichtige Rolle. Deshalb kann es sich für Studenten wie auch gestandene Wissenschaftler lohnen, sich spielerisch mit ihr vertraut zu machen. Die spielerische Beschäftigung mit dem Rubikwürfel hat sich zum Beispiel als fantastische Möglichkeit erwiesen, ein Gefühl dafür zu bekommen, was bei der Kombination von Elementen bestimmter Arten von Permutationsgruppen passiert.

Herausforderung für Knobelfans

Wer eine Lösungsstrategie für den Rubikwürfel gefunden hat, kann sie allerdings leicht auch auf alle Ableger dieses Puzzles übertragen. Die verlieren dadurch ihren Reiz. Zumindest haben wir selbst das so empfunden. Zugleich erkannten wir den mathematischen Grund für unsere Enttäuschung: Die Puzzles vom Rubiktyp sind alle nach demselben Schema zu knacken, weil ähnliche Gruppen dahinterstecken. Diese bilden jedoch nur einen kleinen Ausschnitt aus der Fülle mathematischer Konstrukte, die das Gruppenkonzept ermöglicht.

Als Knobelfans war uns einerseits an Puzzles gelegen, deren Lösungsstrategien sich wesentlich von derjenigen für den Rubikwürfel unterscheiden. Andererseits wollten wir interessierten Laien einen intuitiven Zugang zu völlig anderen Gruppen eröffnen. Es lag also nahe, beide Ziele zusammenzuführen. Tatsächlich konnten wir drei neue Puzzles kreieren, die auf so genannten sporadischen einfachen Gruppen beruhen – Konstrukten mit bemerkenswerten Eigenschaften, die nur Spezialisten bekannt sind.

Zu unserer Freude ergaben Versuche mit Kollegen, dass jeder, der eine Lösung für den Rubikwürfel austüfteln kann, auch fähig ist, durch Beschäftigung mit unseren Puzzles ein ähnlich tiefes Verständnis der zugehörigen sporadischen einfachen Gruppen zu erlangen. Außerdem stellen diese Knobelaufgaben eine wirklich neuartige Herausforderung dar, weil die Methoden zum Knacken des Rubikwürfels hier versagen. Zugleich bieten sie, wie wir meinen, eine Menge Spaß. Wer sofort loslegen will, findet die Spiele unter folgendem Link: www.spektrum.de/gruppen.

Beim Lösen der neuen Puzzles helfen Kenntnisse darüber, was die zu Grunde liegenden einfachen sporadischen Gruppen sind und wie sie sich von derjenigen unterscheiden, die hinter dem Rubikwürfel steckt. Gruppen können sowohl endlich als auch unendlich sein. Die erwähnte additive Gruppe der ganzen Zahlen hat aus offensichtlichen Gründen unendlich viele Mitglieder. Die Rubikwürfelgruppe enthält dagegen nur eine begrenzte Zahl von Elementen, auch wenn die Menge der zulässigen Zugfolgen unbegrenzt ist. Das liegt daran, dass all die verschiedenen Kombinationen von Zügen, die dasselbe bewirken, indem sie vom gleichen Ausgangs- zum identischen Zielzustand führen – und das sind beliebig viele –, als äquivalent gelten. Die Zahl unterschiedlicher Konfigurationen von Kubies ist astronomisch, nämlich 43 252 003 274 489 856 000 oder rund 4×10^{19}. Entsprechend gibt es zwar

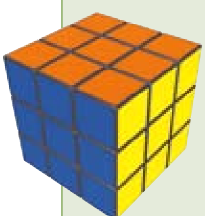
In Kürze

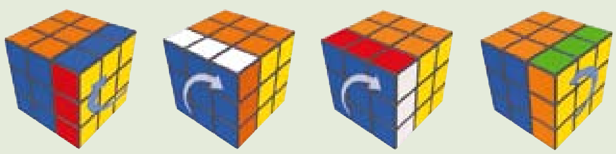
- Zum Lösen der Rubikwürfels muss man kurze Zugfolgen für **einfache Teilschritte** entdecken.
- Die Nachfolger dieses Puzzles boten keine prinzipiell **neue Herausforderung**, weil sie mit sehr ähnlichen Zugfolgen zu knacken sind.
- Die Autoren des Artikels machten sich deshalb auf die Suche nach Knobelspielen, die genauso anspruchsvoll sind, aber **andere Lösungsstrategien** erfordern.
- Auf der Basis der Gruppentheorie, die schon beim Rubikwürfel gute Dienste leistete, entwarfen sie **drei neue Puzzles**, die mit der Komplexität »sporadischer einfacher Gruppen« für Knobelvergnügen sorgen.

Eine Notation für den Rubikwürfel

Beim Lösen der von den Autoren vorgestellten drei neuen Puzzles helfen Methoden aus der Gruppentheorie. Dazu gehört das Aufstellen eines einfachen, eindeutigen Systems zur Bezeichnung der Elemente einer Gruppe und ihrer Kombinationen.

Die Elemente der Rubikwürfelgruppe sind Drehungen der Seiten. Die Verknüpfung könnte man »und dann« nennen: »Drehe die rote Seite und dann die grüne.« Der Einblick in die innere Mechanik des Rubikwürfels (rechts) macht deutlich, dass die Würfelchen (Kubies) in den Seitenmitten immer an ihrem Platz bleiben, wie sehr man die anderen auch durcheinanderbringt. Deshalb kann man jeden Zug eindeutig beschreiben, indem man die Farbe des zentralen Würfelchens – Blau, Grün, Orange, Rot, Zitronengelb oder Weiß – in Form ihres Anfangsbuchstabens sowie den Drehwinkel angibt

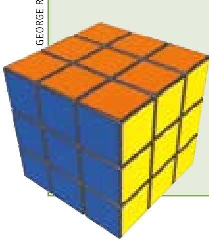


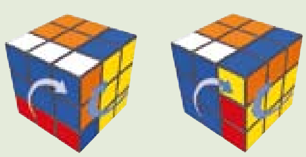


Z *B* *B* ^{2} *Z* $^{-1}$

(Mitte). Der Buchstabe allein bedeutet dabei eine Drehung um 90 Grad im Uhrzeigersinn, wenn man von vorn auf die entsprechende Seite blickt. Eine Hochzahl bezeichnet andere Drehwinkel. B^2 beschreibt so zum Beispiel eine Drehung der blauen Seite um 180 Grad und G^{-1} eine Drehung der grünen Seite um 90 Grad gegen den Uhrzeigersinn. Die Orientierung des Würfels lässt sich spezifizieren, indem man die Farben der drei sichtbaren Seiten, beginnend mit der oberen, im Uhrzeigersinn aneinanderreiht; auf allen Zeichnungen in diesem Kasten ist die Orientierung also RZB. Man beachte, dass die Auswirkung der Drehungen von ihrer Reihenfolge abhängt. So ergeben ZB und BZ, angewandt auf die Ausgangskonfiguration, unterschiedliche Muster (unten).

GEORGE RETSECK





ZB *BZ*

DREI PUZZLES, SO VIELE ZÜGE!

- Beim M_{12}-Puzzle, das auf der Mathieu-Gruppe M_{12} beruht, existieren 95 040 Permutationen.
- Beim M_{24}-Puzzle, hinter dem die Mathieu-Gruppe M_{24} steckt, gibt es 244 823 040 verschiedene Permutationen.
- Bei Dotto, das die Conway-Gruppe Co_0 repräsentiert, existieren 8 315 553 613 086 720 000 Permutationen.

Unmengen elementarer Zugfolgen, die sie ineinander umwandeln, aber es sind eben nicht unendlich viele.

Trotz der ungeheuren Zahl von Zugkombinationen ist es nicht allzu schwer, eine Lösungsstrategie für den Rubikwürfel zu entwickeln. Ein paar kleine Tipps dürften genügen. Sie brauchen Papier und Bleistift sowie natürlich einen Würfel – möglichst im unverdrehten Ausgangszustand. Zunächst sollten Sie sich eine einfache Notation für Ihre Züge überlegen (siehe Kasten oben). Dann suchen Sie nach kurzen Zugfolgen für bestimmte Aufgaben wie den Austausch zweier Eck- oder Kantenkubies und schreiben sie auf. Durch systematisches Kombinieren dieser Zugfolgen sollte es Ihnen schließlich gelingen, den Würfel zu lösen.

Ausgehend vom einfachen Probieren gelangen Sie mit dieser Vorgehensweise, wie sich zeigt, fast zwangsläufig zum Ziel. Das hat einen einfachen Grund. Grob gesprochen, handelt es sich bei den elementaren algebraischen Komponenten der Rubik-Gruppe um die so genannten symmetrischen Gruppen, die alle denkbaren Permutationen einer bestimmten Zahl von Objekten enthalten, sowie um die eng damit verwandten alternierenden Gruppen, die jeweils genau halb so viele Mitglieder wie die zugehörige symmetrische Gruppe haben. Zum Beispiel enthält die symmetrische Gruppe S_3 alle $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ möglichen Anordnungen von drei Objekten. Die entsprechende alternierende Gruppe A_3 hat dagegen nur 3 Elemente. Zu den symmetrischen Gruppen, die mit der Rubik-Gruppe verwandt sind, gehören S_8 und S_{12}. Sie beschreiben die $8! = 40\,320$ möglichen Anordnungen der acht Eck- beziehungsweise die $12! = 479\,001\,600$ denkbaren Konfigurationen der zwölf Kantenkubies.

Auch unsere Puzzles drehen sich um Permutationen, beruhen aber jeweils auf einer so genannten sporadischen einfachen Gruppe. Um zu erklären, was das ist, müssen wir zunächst das Konzept der Untergruppe einführen. Stellen Sie sich vor, Sie dürfen beim Rubikwürfel nur die blaue und die gelbe Seite verdrehen. Dann werden Sie nie das Kantenkubie mit den Farben Grün und Weiß bewegen können. Dadurch ist die Anzahl der erlaubten grundlegenden Zugfolgen geringer als in der vollständigen Rubik-Gruppe.

Sofern sämtliche Kombinationen einer Teilmenge der Elemente einer Gruppe auch zu dieser Teilmenge gehören, spricht man von einer Untergruppe. Eine einfache Gruppe zeichnet sich dadurch aus, dass sie keine »echten, normalen« Untergruppen enthält; was das genau bedeutet, können Sie im Kasten auf S. 68 nachlesen.

Das Attribut »einfach«, bezogen auf Gruppen, ist wohl eine der krassesten Fehlbezeichnungen in der Geschichte der Mathematik. Wie sich herausstellte, gehören manche einfachen Gruppen zu den komplexesten Gebilden, die man kennt. Dennoch sind sie »einfach« in dem Sinn, dass sie die Bausteine oder »Atome« der Gruppentheorie bilden. In gewisser Weise ähneln sie auch den Primzahlen (die nur durch 1 oder sich selbst teilbar sind). Jede endliche Gruppe lässt sich genauso eindeutig in einfache Gruppen zerlegen wie jede ganze Zahl in ein Produkt von Primzahlen.

Mittlerweile sind alle einfachen Gruppen gefunden und klassifiziert (Spektrum der Wissenschaft 2/1986, S. 98). Entdeckt wurden sie zwischen 1860 und 1980. Ihre Klassifikation fiel in den Zeitraum zwischen Ende der 1940er und Anfang der 1980er Jahre (mit ein paar Korrekturen in jüngerer Zeit). Hunderte von Mathematikern waren an dieser Mammutaufgabe beteiligt. Die Berichte über die Entdeckung einfacher Gruppen und der Beweis, dass die endgültige Liste vollständig ist, füllen mehr als 10000 Seiten, verteilt auf rund 500 Artikel, in mathematischen Fachzeitschriften.

Unentwegte arbeiten bis heute an einer einfacheren Version des Vollständigkeitsbeweises und hoffen, dadurch ein noch tieferes Verständnis der einfachen Gruppen zu erlangen. Dessen ungeachtet steht jetzt schon fest, dass sie aus 18 Familien, jede davon eine unendliche Sammlung einer speziellen Sorte von Gruppen, und 26 »sporadischen« Vertretern bestehen – Exzentrikern, die einmalig sind und keine Verwandten haben.

Hinter unseren Puzzles stecken drei sporadische einfache Gruppen namens M_{12}, M_{24} und Co_1. Auch sie beinhalten Permutationen. Diese sind jedoch sehr viel stärker eingeschränkt als bei den symmetrischen Rubik-Gruppen. Dadurch lassen sich in unseren Puzzles zahlreiche Zahlenkombinationen auch mit beliebig vielen Zügen nicht erreichen. Das ist im Übrigen der Grund, warum hier nicht dieselben Methoden wie beim Rubikwürfel zum Erfolg führen. Es gibt jedoch andere Lösungsstrategien, die sich aus wenigen Informationen über die Eigenschaften der Gruppen ableiten lassen.

Los geht's!

Das leichteste unserer drei Puzzles ist M_{12}. Es beruht auf der gleichnamigen Mathieu-Gruppe, einer der fünf am längsten bekannten sporadischen Gruppen. Sie sind nach dem französischen Mathematiker Émile Mathieu benannt, der sie in den 1860er Jahren entdeckte. Bei dem Puzzle M_{12} muss man eine nebeneinander aufgereihte, auf besondere Weise durcheinandergewürfelte Folge der Zahlen 1 bis 12 wieder in die richtige Reihenfolge bringen (1, 2, 3, …, 12). Dazu stehen nur zwei Operationen oder Zugarten zur Verfügung, die man beliebig oft hintereinander ausführen darf.

Wir geben Lesern, die sich an der Aufgabe versuchen wollen, nur einen kleinen Hinweis. In dem Puzzle kann man ebenso wie in der zugehörigen Gruppe jede Kombination von fünf Zahlen an jede der zwölf Positionen innerhalb der Reihe bringen. Wurden auf diese Weise zum Beispiel die Zahlen 1 bis 5 auf die richtigen Plätze manövriert, ist das Puzzle gelöst. Das liegt daran, dass die Gruppe M_{12} insgesamt $12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 95040$ Permutationen enthält. Zufällig entspricht das genau der Anzahl der Möglichkeiten, fünf Ziffern auf zwölf Plätze zu verteilen: Die erste Ziffer kann jeden der zwölf Plätze einnehmen, die zweite jeden der elf verbliebenen und so weiter. Weil die gesamte Permutation durch die Position von fünf Zahlen festgelegt ist, hat es also keinen Zweck, nach einer Zugfolge zu suchen, die nur wenige Zahlen bewegt. Außer dem Null-Zug, der nichts verändert, lässt jeder andere Zug weniger als fünf Ziffern an ihrem Platz. Andersherum gesagt, werden stets mindestens acht Ziffern verschoben.

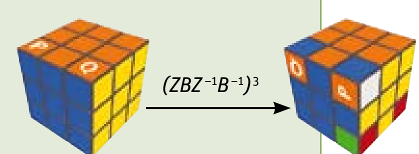
Beim zweiten Puzzle, M_{24}, sind 23 Zahlen wie auf einem Zifferblatt im Kreis angeordnet. Die 24. Zahl steht außerhalb des Kreises über der 12-Uhr-Position. Analog zu M_{12} gibt es nur zwei elementare Züge (siehe Kasten auf S. 69). Im Prinzip wäre es möglich, dieses Puzzle auch als mechanische Konstruktion zu realisieren: Der Kreis aus 23 Zahlen

Lösungsstrategie für den Rubikwürfel

Klassische Permutationspuzzles wie der Rubikwürfel, bei dem die Teile in eine bestimmte Anordnung gebracht werden müssen, lassen sich gewöhnlich mit einer Zweischritt-Methode lösen.

Schritt 1

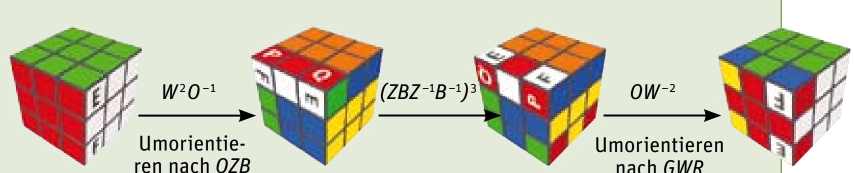
Probieren Sie kurze Kombinationen aus zwei Zügen, gefolgt von ihrer Umkehrung – also beim Rubikwürfel etwa $ZBZ^{-1}B^{-1}$ – und wiederholen Sie diese mehrmals. Oft gelangen Sie dabei zu einer Anordnung, in der sich nur wenige Teile bewegt haben. Damit verfügen Sie über ein wertvolles Hilfsmittel, um begrenzte Ziele zu erreichen. Beim Rubikwürfel vertauscht $ZBZ^{-1}B^{-1}$, dreimal hintereinander ausgeführt, zwei Paare von Kantenkubies. Eines davon, das an die blaue und orangefarbene Seite grenzt, wurde in der Illustration rechts willkürlich mit P und Q bezeichnet.



unberührter Würfel
(*OZB*-Orientierung)

Schritt 2

Modifizieren und erweitern Sie die gefundene nützliche Zugfolge. Wollen Sie zum Beispiel das Paar von Eckkubies vertauschen, das an die rote und weiße Seite grenzt, müssen Sie nach einer vorbereitenden Sequenz suchen, welche dieses Paar in die passende Ausgangskonfiguration bringt. In der Illustration unten sind die betreffenden Kubies mit E und F bezeichnet, und der Würfel hat



der Klarheit halber zunächst die Orientierung GWR. Mit der kurzen Sequenz W^2O^{-1} können Sie E und F in die Positionen P und Q befördern. Damit das besser zu erkennen ist, wurde in der Illustration die Orientierung des Würfels von GWR nach OZB geändert. Dann führen Sie Ihre nützliche Zugfolge aus und machen die vorbereitende Sequenz mit OW^{-2} rückgängig. Im Endeffekt haben Sie damit die Kubies E und F vertauscht.

Mit analogen vorbereitenden Sequenzen lässt sich jedes Paar von Eckkubies so orientieren, dass es durch die nützliche Zugfolge vertauscht wird. Indem Sie auf dieselbe Art mit anderen einfachen Zugkombinationen verfahren, gelangen Sie zu einem Satz von Hilfsmitteln, mit dem Sie den Rubikwürfel und andere klassische Permutationspuzzles lösen können.

GEORGE RETSECK

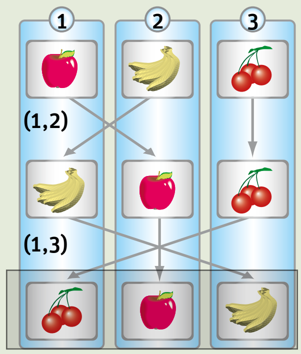
Was ist eine sporadische einfache Gruppe?

Die drei neuen Puzzles repräsentieren allesamt sporadische einfache Gruppen. Etwas Grundwissen über diese Objekte kann deshalb nicht schaden.

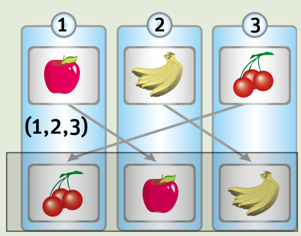
Symmetrische Gruppen

Die symmetrische Gruppe S_n enthält alle denkbaren Permutationen, also Positionsänderungen, von *n* in einer Reihe angeordneten Objekten. So umfasst S_3 die sechs unterschiedlichen Permutationen, welche die sechs möglichen Anordnungen von drei verschiedenen Objekten erzeugen. Zu jeder Permutationsgruppe gehört auch eine Null-Operation, neutrales Element genannt, die nichts tut.

Die Permutation (1,2) vertauscht die Objekte in Position 1 und 2 (rechts). Die Permutation (1,3) vertauscht entsprechend die Objekte in Position 1 und 3.



Die Anwendung von (1,3) auf das Ergebnis von (1,2), geschrieben (1,2) ∘ (1,3), ergibt dieselbe Anordnung wie die Permutation (1,2,3). Dabei handelt es sich um eine zyklische Vertauschung, bei der jedes Objekt auf die nächste und das letzte auf die erste Position rückt.



Multiplikations-tabellen

Die Multiplikationstabelle für die sechs Permutationen von drei Objekten zeigt die Ergebnisse aller 36 Kombinationen von zwei Elementen aus der Gruppe S_3. Das neutrale Element (1) wirkt wie die 1 bei der gewöhnlichen Multiplikation. Beachten Sie, dass jedes »Produkt« zweier Permutationen wieder eine Permutation ist, die auch als »Faktor« vorkommt. Diese Eigenschaft, die alle Gruppen haben, heißt Abgeschlossenheit.

		Führe als Zweites diese Permutation aus					
	∘ (»und«)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
Führe zuerst diese Permutation aus	(1)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)
	(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1)	(2,3)	(1,2)	(1,3)
	(1,3,2)	(1,3,2)	(1)	(1,2,3)	(1,3)	(2,3)	(1,2)
	(1,2)	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(1)	(1,2,3)	(1,3,2)
	(1,3)	(1,3)	(2,3)	(1,2)	(1,3,2)	(1)	(1,2,3)
	(2,3)	(2,3)	(1,2)	(1,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	(1)

Mitglieder einer Untergruppe bleiben unter sich

Jedes Produkt aus den drei Permutationen in der orangefarbenen Region der Multiplikationstabelle ist gleich einer dieser drei Permutationen. Derart abgeschlossen, bilden die drei Permutationen ebenfalls eine Gruppe, die als Untergruppe von S_3 bezeichnet wird.

Es gibt immer ein Zurück

Für jede Permutation in der linken Spalte der Multiplikationstabelle existiert ein Produkt, das gleich (1) ist. Der zugehörige Faktor in der obersten Reihe heißt inverses Element dieser Permutation. Zu jeder Permutation *g* gibt es also ein inverses Element g^{-1}, das sie rückgängig macht. So ist das inverse Element von (1,2,3), geschrieben $(1,2,3)^{-1}$, gleich (1,3,2), weil (1,2,3) ∘ (1,3,2) gleich (1) ist. (1,2) ist zu sich selbst invers; denn (1,2) ∘ (1,2) ergibt laut Tabelle (1).

Ausweis der Echtheit

Eine einfache Gruppe ist eine Gruppe ohne »echte, normale« Untergruppe. Jede Gruppe hat mindestens zwei Untergruppen: sich selbst und die leere Gruppe, die nur aus der Null-Operation (1) besteht. Jede weitere Untergruppe heißt »echt«.

Was ist normal?

Nehmen Sie eine beliebige Permutation aus der Multiplikationstabelle, beispielsweise (1,2), und bilden Sie das Produkt mit irgendeiner Permutation aus der orangefarbenen Untergruppe, etwa (1,2,3).

$$(1,2) \circ (1,2,3) = (1,3)$$

Multiplizieren Sie das Ergebnis mit dem Inversen der ersten Permutation, in diesem Fall (1,2):

$$(1,3) \circ (1,2)^{-1} = (1,3,2)$$

Kurz: $(1,2) \circ (1,2,3) \circ (1,2)^{-1} = (1,3,2)$

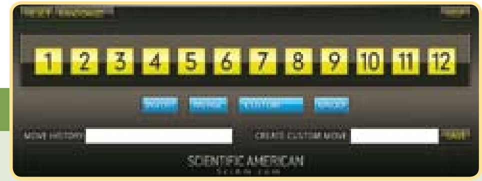
Wenn das Ergebnis jedes derartigen Dreierprodukts innerhalb der Untergruppe liegt, heißt diese »normal«. Das trifft hier zu.

Gut, das ist einfach. Aber was ist sporadisch?

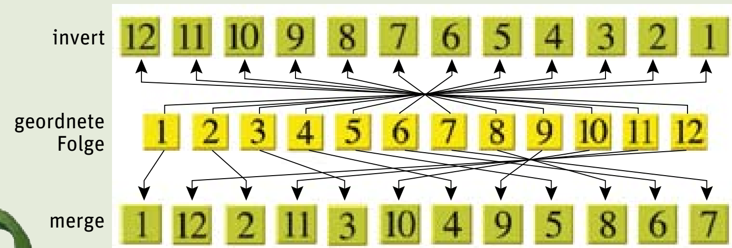
Die meisten einfachen Gruppen gehören zu Familien mit einer unendlichen Zahl von Mitgliedern. Aber 26 von ihnen sind Außenseiter, die sich keiner Familie zuordnen lassen und auch untereinander wenig gemeisam haben. Um den Ausdruck »sonstige« zu vermeiden, nennen die Mathematiker sie sporadisch.

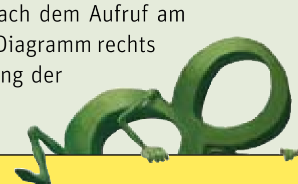
JOHNNY JOHNSON

Was Sie online erwartet



Das Puzzle M_{12} beginnt mit einer durcheinandergewürfelten Anordnung der Zahlen 1 bis 12. Die Aufgabe besteht darin, mit Kombinationen von nur zwei Zügen, die sich auf Knopfdruck ausführen lassen, die Zahlen in die richtige Reihenfolge zu bringen. Ganz oben ist gezeigt, wie das Puzzle nach dem Aufruf am Bildschirm erscheint. Das Diagramm rechts veranschaulicht die Wirkung der beiden Züge.





Beim Puzzle M_{24} sind im geordneten Zustand die Zahlen 1 bis 23 im Uhrzeigersinn auf einem Kreis aneinandergereiht; die 0 steht außerhalb des Kreises über der 12-Uhr-Position. Ziel ist wie bei M_{12}, aus einer durcheinandergewürfelten Konfiguration den geordneten Zustand wiederherzustellen. Dazu gibt es gleichfalls nur zwei Züge. Der eine lässt alle Zahlen im Kreis um einen Platz weiterrücken, der andere vertauscht die Zahlen in gleichfarbigen Kreisfeldern.

RYAN REID

ließe sich drehbar anbringen, und ein System von Zahnrädern könnte die den Zügen entsprechenden Vertauschungen von Zahlen bewirken.

Dieses Puzzle, hinter dem die Mathieu-Gruppe M_{24} steckt, ist wie M_{12} »fünf-transitiv«: Mit irgendeiner Kombination der beiden elementaren Züge lassen sich beliebige fünf der 24 Zahlen auf beliebige fünf der 24 Plätze manövieren. Damit gilt auch der gleiche Tipp wie bei M_{12}: Suchen Sie nach Zügen, welche die Zahlen 1 bis 5 an ihre richtigen Positionen bringen, ohne die bereits korrekt angeordneten Zahlen wieder zu verschieben. Aber in diesem Fall sind Sie damit noch nicht am Ende. Die Gruppe M_{24} enthält $24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 10 \times 48 = 244\,823\,040$ Elemente. Selbst wenn die Ziffern 1 bis 5 die richtigen Plätze einnehmen, können die anderen 19 Zahlen noch auf 48 verschiedene Arten über den Kreis verteilt sein.

Dotto, unser drittes Puzzle, beruht auf der Conway-Gruppe Co_0, die der Mathematiker John H. Conway von der Princeton University (New Jersey) 1968 publiziert hat. Sie enthält die sporadische einfache Gruppe Co_1 und hat genau doppelt so viele Elemente. Conway war zu bescheiden, die Gruppe nach sich zu benennen, und gab ihr deshalb die verstümmelte Bezeichnung ».0«, was sich auf Englisch »dotto« spricht (daher der Name des Puzzles).

Zu Details von Dotto müssen wir aus Platzgründen auf unsere Online-Seite verweisen (www.spektrum.de/gruppen). Wir können hier nur versichern, dass das Puzzle und die zu Grunde liegende Gruppe faszinierende mathematische Eigenschaften haben. Zum Beispiel ist Dotto eng mit dem Leech-Gitter verwandt, einer Menge von »Punkten« in einem 24-dimensionalen Raum, die aus geordneten Zahlenlisten bestehen. Dieses Gitter ist berühmt dafür, dass es die dichteste Kugelpackung in einem solchen Hyperraum liefert.

Nur vier sporadische einfache Gruppen sind noch größer als Co_1: die Janko-Gruppe J_4, die Fischer-Gruppe Fi_{24}', das Babymonster B und das Monster M. Getreu seinem Namen schießt das Monster mit rund 8×10^{53} Elementen den Vogel ab. Konstruiert hat es im Jahr 1980 Robert L. Griess jr. von der University of Michigan in Ann Arbor als Gruppe der Transformationen einer gewissen, komplizierten mathematischen Struktur im 196 884-dimensionalen Raum.

Wir haben nicht versucht, Puzzles auf der Basis anderer sporadischer einfacher Gruppen zu entwerfen, obwohl das in einigen Fällen sicher möglich wäre. Das Monster in eine Knobelei umzusetzen, wäre nicht nur eine enorme Herausforderung, sondern käme auch der Mathematik zugute. Bisher ist nämlich nicht bekannt, ob diese Gruppe die Permutationen eines Objekts beschreibt, das klein genug ist, um sich anschaulich darstellen zu lassen. Bisher wird nur vermutet, dass das Monster die Permutationsgruppe eines gewissen 24-dimensionalen, gebogenen Raums darstellt. Das Austüfteln eines zugehörigen Puzzles könnte die Mathematiker also einem Beweis dieser spannenden Hypothese näher bringen. ◁

IM INTERNET

Alle drei Spiele, M_{12}, M_{24} und Dotto, finden Sie im Internet unter www.spektrum.de/gruppen. Die ersten beiden können Sie direkt online spielen. Dotto müssen Sie herunterladen und entpacken. Es funktioniert nur auf Windows-Rechnern.

Igor Kriz ist Mathematikprofessor an der University of Michigan in Ann Arbor. Er hat an der Universität Prag promoviert und forscht vor allem über algebraische Topologie. Sein Hobby ist Klavier- und Orgelspielen. **Paul W. Siegel** hat die neuen Puzzles als Student an der University of Michigan erarbeitet. Derzeit schreibt er seine Doktorarbeit an der Pennsylvania State University.

Aschbacher, M.: Finite Group Theory. Second edition. Cambridge University Press, 2000.

Conway, J. H., Sloane, N. J. A.: Sphere Packings, Lattices and Groups. Springer, Heidelberg 1999.

Greiss jr., R. L.: Twelve Sporadic Groups. Springer, Heidelberg 2002.

Hofstadter, D. R.: Vom Zauber des Zauberwürfels. In: Spektrum der Wissenschaft 5/1981, S. 16 – 29.

Weblinks finden Sie unter www.spektrum.de/artikel/995466.