EDITORIAL
ENDLICHE KÖRPER UND DAS FREUNDLICHE MONSTER

Von Christoph Pöppe, Redakteur dieses Hefts
poeppe@spektrum.de

Wenn 1/4 dasselbe ist wie 2, wie viel ist dann 1/2? Na ja: $1/2 = 2 \cdot (1/4) = 2 \cdot 2 = 4$. Eigentlich logisch, oder? Aber wo sind wir eigentlich, wenn solche abstrus wirkenden Rechenregeln gelten?

Die Antwort lautet: in dem endlichen Körper der Ordnung 7. Worunter man sich, dem Namen zum Trotz, nichts Körperliches vorstellen sollte, sondern eine abstrakte Struktur. Man gewinnt sie aus den vertrauten natürlichen Zahlen, indem man die schlichte Festsetzung $7 = 0$ trifft. Genauer: Man rechnet in diesem Körper zunächst wie mit gewöhnlichen ganzen Zahlen, dividiert das Ergebnis durch 7 und behält nur den Rest. Zum Beispiel ist $2 \cdot 4 = 1$, denn 8 geteilt durch 7 ist 1 Rest 1. Dann muss auch $1/2 = 4$ und $1/4 = 2$ sein; denn die Division ist die Umkehrung der Multiplikation. Übrigens ist $1/3 = 5$ und $1/6 = 6$.

Diese merkwürdige Mischung aus Vertrautem und (scheinbar) Verrücktem wird Ihnen in diesem Heft auf Schritt und Tritt begegnen. Da ist von Elementen die Rede, die auf den ersten Blick aussehen wie Zahlen oder Vektoren im Raum. Es gelten sogar die geläufigen Rechenregeln – und plötzlich ist alles ganz anders.

Algebra ist die Kunst, sich weniger um elementare Gegenstände wie zum Beispiel Zahlen zu kümmern als vielmehr um die Verknüpfungen unter ihnen. Und wenn man diese – Addition, Multiplikation oder noch allgemeinere – auf neue Gegenstände anwendet, kommt häufig Überraschendes heraus. So schuf vor knapp 200 Jahren Évariste Galois eine Lösungstheorie für Gleichungen höheren Grades, indem er darüber nachdachte, welche Wirkung es hat, wenn man die Reihenfolge der – unbekannten – Lösungen vertauscht (S. 6). Damit sind diese Vertauschungen die neuen Gegenstände, und deren Verknüpfungen studiert die Gruppentheorie. Eine Jahrhundertaufgabe, die Klassifikation der endlichen einfachen Gruppen, deren größte als das »freundliche Monster« bekannt ist, nähert sich der Vollendung (S. 16).

Wählt man dagegen ganze Kurven oder Flächen als elementare Gegenstände, so kommt man zur algebraischen Geometrie, die der geniale Alexander Grothendieck praktisch im Alleingang begründete und zu höchster Blüte führte (S. 36). Und wenn man mit den natürlichen Zahlen so rechnet wie gewohnt und nur den Abstand zweier Zahlen auf eine äußerst ungewöhnliche Weise definiert, landet man bei einer Struktur namens p-adische Zahlen (S. 46). Die wiederum nutzte Peter Scholze zu so bahnbrechenden Erkenntnissen, dass ihm 2018 die Fields-Medaille verliehen wurde (S. 54).

Neue Verbindungen tun sich – im Rahmen des berühmten Langlands-Programms – auf zu dem Teil der Mathematik, der sich im Gegensatz zur Algebra mit dem Unendlichen befasst: der Analysis (S. 60). Deswegen schließt dieses Heft mit einer Hommage an Gottfried Wilhelm Leibniz, einen ihrer Gründer (S. 68), und lauter bunten Bildern zur Analysis über der Struktur, die den vertrauten Körper der reellen Zahlen algebraisch vervollständigt: dem Körper der komplexen Zahlen (S. 76).

Herzlich Ihr

Christoph Pöppe

DAS KÖNNTE SIE AUCH INTERESSIEREN:

TEPUNQT / GETTY IMAGES / ISTOCK

Spektrum Kompakt
Des Rätsels Lösung – Mathematische Beweise und ihre Entdecker
Wo Naturwissenschaftler einmal aufgestellte Thesen oft nur falsifizieren können, treten Mathematiker hingegen auch den positiven Beweis an: Sie gehen von einigen grundlegenden Annahmen aus und versuchen, über eine Reihe von Schlussfolgerungen zu einer Lösung zu gelangen. Wir werfen einen Blick auf einige dieser Beweise.

Spektrum KOMPAKT – Themen auf den Punkt gebracht
Unsere Spektrum-KOMPAKT-Digitalpublikationen stellen Ihnen alle wichtigen Fakten zu ausgewählten Themen als PDF-Download zur Verfügung – schnell, verständlich und informativ!

www.spektrum.de/kompakt