Der schiefe Wurf im Sport

Aufgabe 1

> $restart : with(plots) :$

> $v_0 := 14 :$

> $h_0 := 2.2 :$

Angabe des Winkels im Bogenmaß:

> $\alpha := \frac{42 \cdot \mathrm{Pi}}{180} :$

> $y := x \rightarrow -\frac{9.81 \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} + x \cdot \tan(\alpha) + h_0;$

$$y := x \rightarrow \frac{(-1) \cdot 9.81\, x^2}{2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2} + x \tan(\alpha) + h_0 \quad \textbf{(1.1)}$$

> $solve(y(x) = 0, x)$

$$-2.199808609, 22.06997084 \quad \textbf{(1.2)}$$

Unter Annahme des optimalen theoretischen Winkels fliegt die Kugel 22,07 m weit.

> $\alpha := \frac{35 \cdot \mathrm{Pi}}{180} :$

> $y := x \rightarrow -\frac{9.81 \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} + x \cdot \tan(\alpha) + h_0;$

$$y := x \rightarrow \frac{(-1) \cdot 9.81\, x^2}{2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2} + x \tan(\alpha) + h_0 \quad \textbf{(1.3)}$$

> $solve(y(x) = 0, x)$

$$-2.741584359, 21.51627893 \quad \textbf{(1.4)}$$

Unter dem realen Winkel würde die Kugel nur 21,52 m weit fliegen. Diese Diskrepanz ergibt sich dadurch, dass angenommen wurde, dass die Anfangsgeschwindigkeit unabhängig vom Wurfwinkel ist. Dies ist aber nicht der Fall. Kugelstßer können bei geringeren Winkeln eine größere Anfangsgeschwindigkeit aufbringen und somit die Kugel weiter stoßen als beim optimal berechneten Winkel.

Aufgabe 2

> $restart : with(plots) :$

a)

> $v_0 := 9 :$

> $h_0 := 1 :$

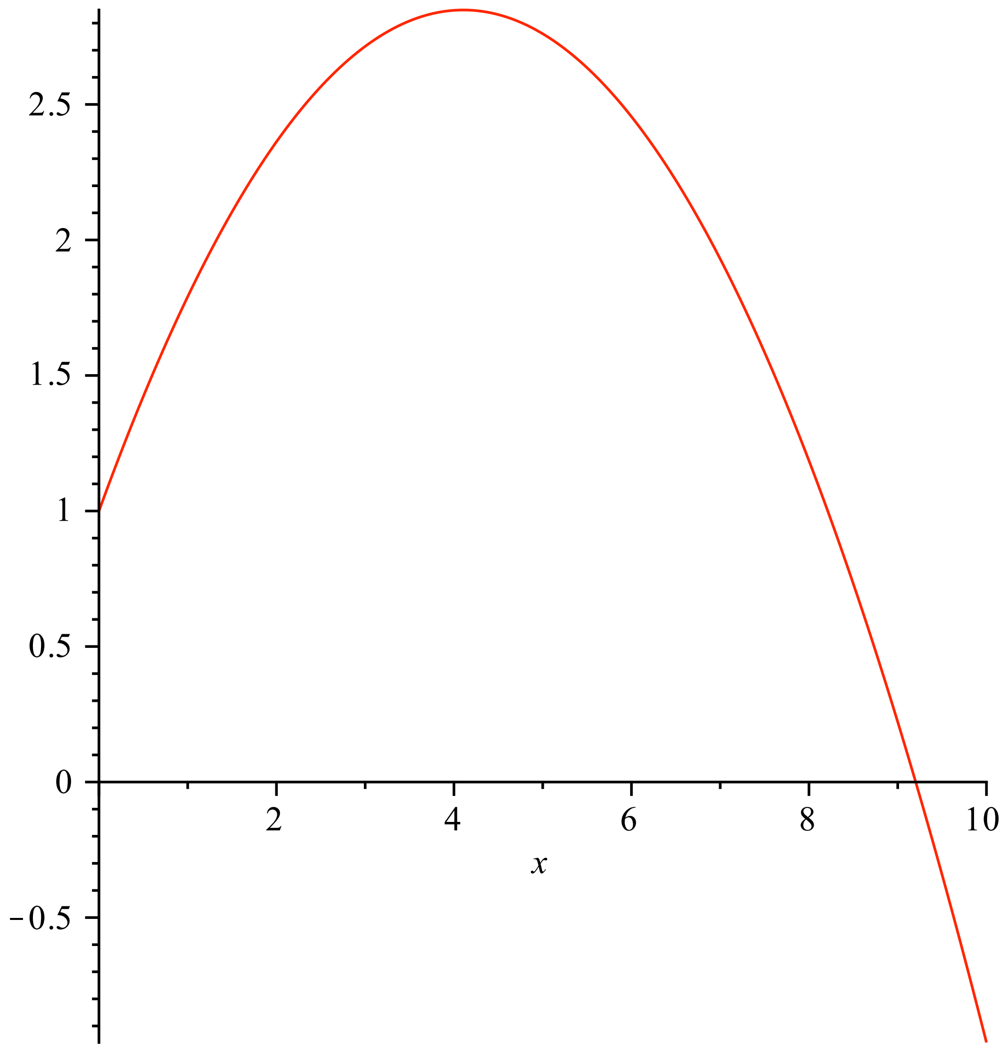
Angabe des Winkels im Bogenmaß:

> $\alpha := \frac{42 \cdot \mathrm{Pi}}{180}$:

> $y := x \rightarrow -\frac{9.81 \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} + x \cdot \tan(\alpha) + h_0;$

$$y := x \rightarrow \frac{(-1) \cdot 9.81\, x^2}{2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2} + x \tan(\alpha) + h_0 \quad \textbf{(2.1.1)}$$

> $plot(y(x), x = 0..10);$



b)

> $solve(y(x) = 0, x);$

$$-0.9910132385, 9.202661915 \quad \textbf{(2.2.1)}$$

Die bei einem Absprunginkel von 45° erhätm man eine Weite von etwa 9,2 m.

> $y1 := \mathrm{D}(y)$:

> $solve(y1(x) = 0, x);$

$$4.105824339 \quad \textbf{(2.2.2)}$$

> $evalf(\,y(4.10)\,);$

$$2.848446700 \tag{2.2.3}$$

Die Sprunghöhe beträgt 2,80.
Anmerkung: Hier ergibt sich ein Widersrpuch zu den 3,5 m aus dem Text...

c)

Die Sprunghöhe ist absolut unrealistisch.

d)

> $v_0 := 9:$

> $h_0 := 1:$

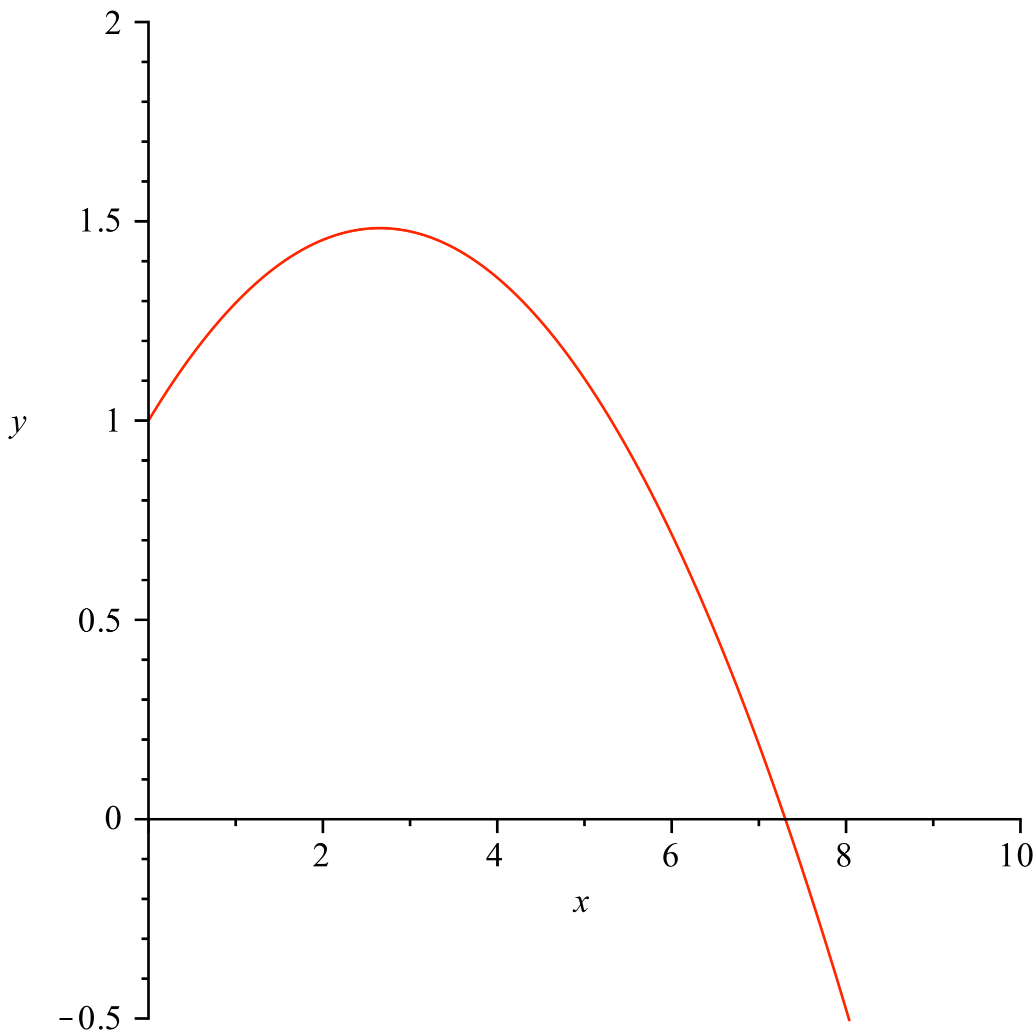
Angabe des Winkels im Bogenmaß:

> $\alpha := \frac{20\cdot \mathrm{Pi}}{180}:$

> $y := x \rightarrow -\frac{9.81\cdot x^2}{2\cdot v_0^2\cdot \cos(\alpha)^2} + x\cdot \tan(\alpha) + h_0;$

$$y := x \rightarrow \frac{(-1)\cdot 9.81\, x^2}{2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2} + x \tan(\alpha) + h_0 \tag{2.4.1}$$

> $plot(y(x), x = 0\,..10, y = -0.5\,..2);$



> $solve(y(x) = 0, x);$

$$-1.996472130, 7.303892760 \quad \textbf{(2.4.2)}$$

> $y1 := D(y):$

> $solve(y1(x) = 0, x);$

$$2.653710315 \quad \textbf{(2.4.3)}$$

> $evalf(\, y(\%)\,);$

$$1.482935783 \quad \textbf{(2.4.4)}$$

Die Sprungweite beträgt nun etwa 7,30 m und die Höhe des Sprunges 1,48 m. Diese Werte sind viel realistischer.

Aufgabe 3

> $restart : with(plots) :$

> $v_0 := \frac{50}{3.6} :$

> $h_0 := 0 :$

> $x := 16 :$

> $y := \alpha \rightarrow -\frac{9.81 \cdot x^2}{2 \cdot v_0^2 \cdot \cos(\alpha)^2} + x \cdot \tan(\alpha) + h_0;$

$$y := \alpha \rightarrow \frac{(-1) \cdot 9.81\, x^2}{2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2} + x \tan(\alpha) + h_0 \tag{3.1}$$

> $solve(y(\alpha) = 2.5, \alpha);$

$$1.007792865, 0.7180002041, -2.133799789, -2.423592449 \tag{3.2}$$

> $\mathrm{evalf}\left(\frac{\% \cdot 180}{\mathrm{Pi}}\right)$

$$57.74227778, 41.13838138, -122.2577222, -138.8616186 \tag{3.3}$$

> $solve(y(\alpha) = 2.4, \alpha);$

$$1.013716030, 0.7059702445, -2.127876624, -2.435622409 \tag{3.4}$$

> $\mathrm{evalf}\left(\frac{\% \cdot 180}{\mathrm{Pi}}\right)$

$$58.08165012, 40.44911546, -121.9183498, -139.5508845 \tag{3.5}$$

Im Video erkennt man deutlich, dass der Winkel unter 45° liegt. Somit trifft Ronaldhino die Latte falls er den Fußball unter einem Winkel zwischen 40,45° und 41,14° abschießt.

Aufgabe 4

siehe Lösung 43. Physik Olympiade 2012
Tallin & Tartu, Estland